



Algoritmo di propagazione automatica per fronti di cricca tridimensionali

Daniele Colombo

Dipartimento di Meccanica, Politecnico di Milano, via la Masa 34, 20156 Milano, Italia;

e-mail: daniele.colombo@polimi.it

RIASSUNTO. In questo lavoro viene presentato un algoritmo per simulare in maniera automatica la propagazione di cricche tridimensionali in modelli ad elementi finiti. L'algoritmo può essere applicato principalmente a tutti quei casi in cui il fronte di cricca si mantiene piano, anche se casi di fronte non piano possono essere trattati adottando opportuni accorgimenti nella creazione della mesh del modello. Il fronte della cricca cambia forma durante la propagazione, assumendo in maniera del tutto automatica la forma dettata dalla geometria della struttura e dai carichi applicati. Tramite opportuni accorgimenti è possibile ottenere risultati accurati anche con mesh abbastanza rade. La semplicità dell'algoritmo lo rende implementabile in poco tempo in un software che può interfacciarsi con l'ambiente di calcolo esistente.

ABSTRACT. In this work an algorithm for the simulation of 3D crack propagation in finite element models is presented in detail. This algorithm can be adopted mainly for planar three-dimensional crack fronts, even if it can be applied also to non planar cases if a special mesh is created for the model. The crack front changes automatically its profile during propagation in relation to the geometry of the structure and the applied loads. If special strategies are used, accurate solutions can be achieved also for quite coarse meshes. Thanks to its simplicity, the algorithm can be implemented in a short time in a software that can be interfaced easily with the existing FEA environment.

PAROLE CHIAVE: crack growth, surface crack, 3D crack front, 3D crack propagation.

1 INTRODUZIONE

Il metodo degli elementi finiti rappresenta uno strumento indispensabile per l'applicazione della meccanica della frattura a strutture di geometria complessa. Concettualmente l'introduzione di una cricca in un modello non rappresenta un problema e coi moderni pre-processor può essere condotta già a livello di geometria. Lo stesso dicasi per la valutazione dei fattori di intensità degli sforzi, per la quale i moderni solutori ad elementi finiti mettono a disposizione procedure di calcolo automatiche. Dal punto di vista statico, quindi, l'introduzione di una cricca in un modello ad elementi finiti e la sua caratterizzazione in termini di fattori di intensità degli sforzi non rappresenta attualmente un problema.

Diversa è la situazione per quanto riguarda la simulazione della propagazione a fatica di una cricca. Secondo l'approccio classico, la simulazione viene condotta per avanzamenti discreti aggiornando ad ogni passo la mesh del modello in modo da adattarla alla nuova geometria della cricca. La soluzione più semplice per l'aggiornamento del modello è costituita dalla modifica della geometria alla base del modello tramite l'utilizzo del pre-processor. Lavorando opportunamente sulle partizio-

ni geometriche e sfruttando, se possibile, un'impostazione parametrica, è possibile aggiornare manualmente il modello ad ogni passo della simulazione.

Questo approccio risulta però problematico sotto diversi aspetti. Innanzitutto risulta estremamente oneroso in termini di ore di lavoro richieste all'analista. Inoltre ad ogni passo di simulazione la mesh del modello o di una sua parte, limitata alla zona interessata dall'intera propagazione, cambia rispetto a quella del passo precedente. Questo può rappresentare un problema non trascurabile nel caso in cui la soluzione o parte di essa debba essere trasferita da un passo della simulazione a quello successivo, come ad esempio in presenza di tensioni residue o di plasticizzazioni del materiale, nel qual caso la storia del percorso deformativo deve essere obbligatoriamente preservata. Anche ritenendo questi due aspetti del tutto trascurabili, risulta innegabile la difficoltà nel gestire la simulazione qualora si debba tenere in considerazione e si debba studiare la variazione di forma durante la propagazione di un fronte di cricca tridimensionale. Inoltre, per poter garantire l'accuratezza dei risultati ottenuti, risulta necessario eseguire le stesse simulazioni con differenti avanzamenti di cricca e differenti livelli di infittimento della mesh. Questo risulta molto importante

nel caso di fronte tridimensionale che varia forma durante la propagazione.

Per quanto concerne quest'ultimo caso, nel quale il fronte di cricca è rappresentato da una linea nello spazio, può accadere che la forma del fronte cambi durante la propagazione. Ciò dipende ovviamente dalla geometria della struttura e dai carichi applicati ed è difficilmente prevedibile a priori. Addirittura si possono verificare condizioni di propagazione in cui il fronte propaga mantenendo un profilo non iso-K [1], contrariamente a quanto si possa pensare intuitivamente. Secondo l'approccio prima descritto, il fronte dovrebbe essere accuratamente modellato dal punto di vista geometrico e la sua geometria dovrebbe essere costantemente aggiornata ad ogni passo di simulazione. Questo compito è ovviamente oneroso e può risultare difficile. Il problema viene comunemente aggirato ipotizzando che il fronte di cricca assuma una forma predefinita e che tale forma si mantenga durante tutta la propagazione. Anche se in molti casi questa approssimazione porta a risultati accettabili, è chiaro che questo approccio non può essere ritenuto valido per qualunque situazione.

Alla luce di queste considerazioni, risulta pertanto auspicabile poter utilizzare un codice che permetta di automatizzare il processo e che permetta quindi di poter risolvere i problemi appena esposti. In letteratura sono disponibili pochi articoli che trattano algoritmi di propagazione automatica di cricche tridimensionali in modelli ad elementi finiti secondo l'approccio classico e la maggior parte di essi riguarda casi bidimensionali. Se si escludono le soluzioni che si basano su una rigenerazione ad ogni passo della mesh (ad esempio [6-9]), poche altre soluzioni sono reperibili (ad esempio [3-5]). Alcune di esse hanno limitazioni di applicabilità mentre quelle più generiche presentano difficoltà di implementazione. Ovviamente sono disponibili soluzioni basate su metodi che utilizzano approcci alternativi rispetto a quello classico, come ad esempio l'X-FEM o l'uso di elementi coesivi.

In questo articolo viene esposto un algoritmo di propagazione automatica basato sull'approccio classico. La soluzione proposta rappresenta un'estensione dell'algoritmo proposto dall'autore in un precedente lavoro [2] applicabile a modelli piani o shell. L'estensione proposta ne permette l'applicazione anche a fronti di cricca tridimensionali piani o pressoché piani, anche se la superficie di propagazione può assumere forma qualunque. Nel caso di fronti non piani sono richiesti particolari accorgimenti nella creazione della mesh che ne possono tuttavia rendere difficile l'applicazione. Tra i vantaggi dell'approccio proposto spiccano l'estrema semplicità di implementazione e l'estrema velocità di esecuzione. Da sottolineare infine anche la possibilità di implementare

l'algoritmo in un software in grado di interfacciarsi con l'ambiente di calcolo già esistente.

2 FUNZIONAMENTO DELL'ALGORITMO DI PROPAGAZIONE

Come già esposto, l'algoritmo che viene qui proposto costituisce un'estensione dell'algoritmo di propagazione ideato dall'autore per modelli piani o shell [2]. L'idea che ne stava alla base era semplice: non c'è necessità di ricreare la mesh in una zona più o meno estesa intorno all'apice della cricca per poter aggiornare il modello in seguito ad un avanzamento ma è sufficiente tagliare, in senso geometrico, esclusivamente gli elementi attraversati dalla nuova superficie di cricca. In Fig. 1 è illustrata questa idea di base.

Nella Fig. 1a è visibile una generica mesh piana attorno all'apice di cricca. Il vettore rappresenta la direzione e il modulo di avanzamento per il corrente passo di simulazione. La mesh deve essere modificata in modo tale da creare la nuova superficie di frattura indicata dal vettore. L'algoritmo seleziona solamente gli elementi interessati dalla propagazione, evidenziati con un tratteggio in figura. Solamente questi elementi devono essere geometricamente tagliati in modo tale da adattare la mesh alla nuova superficie di frattura. Per far questo l'algoritmo rimuove questi elementi (Fig. 1b) e li rimpiazza con elementi triangolari (Fig. 1c) che possono essere ottenuti automaticamente con un apposito algoritmo di triangolazione [2]. I nodi dei nuovi elementi triangolari che giacciono sulla superficie di frattura vengono infine distanziati, a discrezione dell'utente, in modo tale da aprire leggermente le due facce della cricca (Fig. 1d).

L'estensione ad una mesh triangolare nasce dall'osservazione che è prassi comune adottare mesh stratificate e ripetitive per modellare fronti di cricca tridimensionali, come visibile ad esempio nei lavori [5,10-15]. Ipotizzando quindi la presenza di una mesh stratificata costituita da prismi a base triangolare o quadrangolare, la propagazione di cricca può essere condotta semplicemente tagliando questi elementi e rimpiazzandoli con altri prismi a base triangolare. La situazione è rappresentata in Fig. 2.

In figura 2a è rappresentata una cricca con alcuni elementi circostanti. La mesh è costruita a strati (nella figura sono presenti solamente 3 strati) con elementi prismatici a base quadrata. Grazie alla particolare conformazione della mesh, ogni singolo strato può essere modificato indipendentemente rispetto agli altri. In Fig. 2b è stato isolato uno di questi strati. I vettori riportati rappresentano le direzioni e gli avanzamenti dei due punti del fronte di cricca che giacciono sulle due ba-

si dello strato (superficie 1 e superficie 2). Questi due avanzamenti possono ovviamente essere differenti. Anche in questo caso, come nel caso piano o shell, solamente l'elemento interessato dalla propagazione viene rimpiazzato all'interno della mesh. In Fig. 2c è visibile il risultato. Il processo di modifica avviene innanzitutto considerando le due superfici dello strato ed applicando l'algoritmo di avanzamento per mesh piane o shell già messo a punto [2]. Questo algoritmo produce triangoli sulle due superfici dello strato. Connettendo i triangoli corrispondenti tra le due superfici è possibile ottenere elementi prismatici che rimpiazzano l'elemento originale attraversato dalla superficie di cricca. Ripetendo questo processo per tutti gli strati è possibile aggiornare la posizione del fronte di cricca. Poiché non sono state poste condizioni sui vettori di pro-

pagazione agenti sulle due superfici di ogni singolo strato (Fig. 2b), il fronte di cricca può assumere qualunque configurazione.

3 VALUTAZIONE DELL'AVANZAMENTO DEL FRONTE

Per un fronte di cricca tridimensionale, i fattori di intensità degli sforzi variano generalmente con il punto considerato sul fronte. Considerando il fronte come una linea geometrica nello spazio e definita un'ascissa curvilinea s (Fig. 3a), e quindi un verso di percorrenza, i fattori di intensità degli sforzi sono funzione di s .

Secondo l'approccio adottato da diversi ricercatori (si veda ad esempio [20]), fissato un punto P sul fronte è pos-

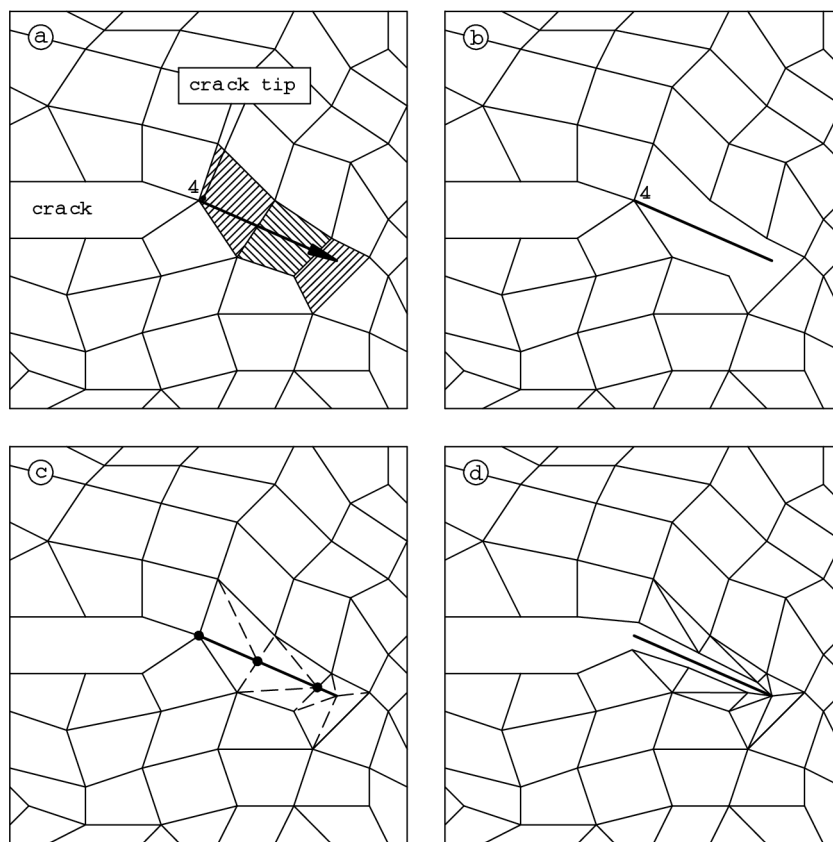


Figura 1: Schematizzazione delle fasi di applicazione dell'algoritmo di propagazione per mesh piane o shell.

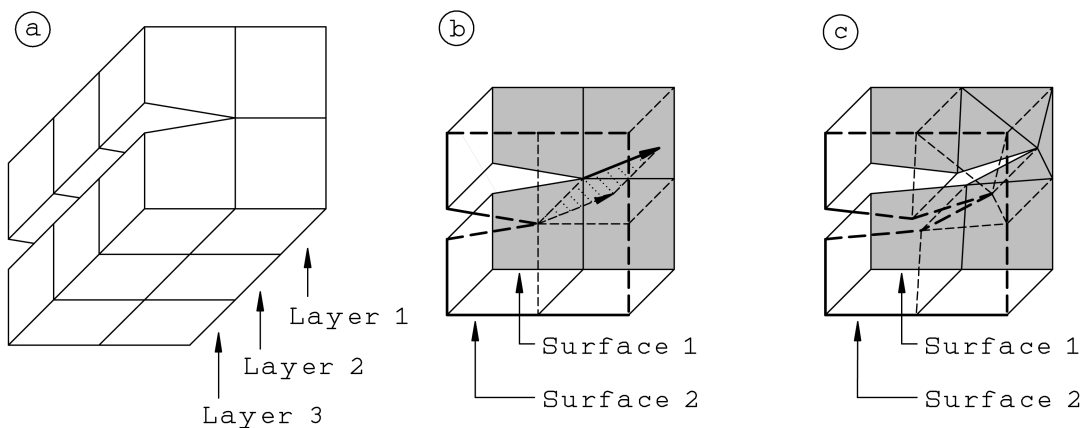


Figura 2: Estensione dell'algoritmo di propagazione al caso tridimensionale.

sibile ricavare la terna intrinseca (tangente, normale, bi-normale) e, nell'ipotesi di stato di deformazione piano, è possibile studiare il comportamento della cricca nel solo piano n-b. Fissata quindi l'ascissa curvilinea s , è possibile calcolare il valore dei fattori di intensità degli sforzi e ricavarne la variazione in un ciclo di fatica. Applicando la legge di Paris è possibile calcolare l'avanzamento Δa della cricca nel punto P considerato. Questo avanzamento avviene lungo la normale n al fronte (Fig. 3b). In questo modo è possibile valutare la nuova posizione del punto P. Ripetendo la procedura per diversi punti del fronte è possibile ricavare il nuovo fronte di cricca. La forma del fronte si modificherà automaticamente a seconda della geometria della struttura e del tipo di carichi applicati.

La legge di Paris permette di ricavare l'avanzamento della cricca in un ciclo di fatica. Questo avanzamento, variabile lungo il fronte, è troppo piccolo per poter essere introdotto nella mesh con l'algoritmo appena esposto. Fissato a priori un avanzamento massimo Δa_{max} desiderato lungo il fronte, è possibile calcolare il numero di cicli richiesto per ottenerlo:

$$n_{passo} = \frac{\Delta a_{max}}{\max_{s \in [0, L]} (\Delta a(s))} \quad (1)$$

essendo L la lunghezza del fronte di cricca e $\Delta a(s)$ l'avanzamento in un ciclo di fatica. Ipotizzando che i fattori di intensità degli sforzi rimangano pressoché costanti per n_{passo} cicli, è possibile valutare gli avanzamenti effettivi lungo il fronte per il passo di simulazione considerato:

$$\Delta a_{eff}(s) = n_{passo} \cdot \Delta a(s) \quad (2)$$

Sommando questi spostamenti alla posizione attuale dei punti del fronte lungo la normale n , è possibile valutare la nuova posizione del fronte dopo n_{passo} cicli.

La correttezza di questa procedura dipende dall'applicabilità dell'ipotesi di costanza dei fattori di intensità degli sforzi negli n_{passo} cicli considerati e dipende quindi dal

valore di Δa_{max} considerato: tanto più è piccolo il valore scelto, tanto più l'ipotesi di invarianza dei fattori di intensità degli sforzi risulta aderente alla realtà. Il valore di questo parametro è però in qualche modo legato alla dimensione degli elementi della mesh all'apice di cricca, a causa della natura dell'algoritmo di propagazione presentato. Tanto più piccolo è il valore scelto, tanto più piccoli risultano alcuni triangoli generati dall'algoritmo sulle due superfici dello strato di elementi (Fig. 2c) e quindi tanto maggiore è il rischio di ottenere elementi eccessivamente distorti. Sulla base di diverse prove effettuate, valori di Δa_{max} compresi tra 1/5 e 1/10 della lunghezza dell'elemento che viene tagliato dall'algoritmo permettono di ottenere risultati accurati senza generazione di elementi eccessivamente distorti. Qualora il caso studiato richiedesse avanzamenti massimi inferiori, la mesh del modello deve essere necessariamente infittita.

4 VALUTAZIONE DEI FATTORI DI INTENSITA' DEGLI SFORZI

L'algoritmo appena esposto permette di modificare un modello ad elementi finiti esistente per introdurre una cricca o allungare una cricca già presente. Gli elementi prismatici triangolari che vengono generati possono assumere forma distorta e fornire quindi una soluzione poco accurata all'apice di cricca dove invece è richiesto il contrario. Per ovviare a questo problema e per evitare infittimenti locali, al fine di poter ricavare i fattori di intensità degli sforzi in maniera accurata è opportuno ricorrere alla nota "quarter point technique" [2,16-18], esattamente come proposto per l'algoritmo di propagazione per modelli piani o shell [2]. A differenza del caso precedente, in cui questa tecnica viene realizzata tramite una particolare mesh focalizzata piana, nel caso attuale è necessario ricorrere ad una mesh focalizzata che si estende lungo l'intero fronte di cricca. In Fig. 4 è visibile un esempio per fronte di cricca rettilineo.

La mesh focalizzata mostrata in Fig. 4 non viene intro-

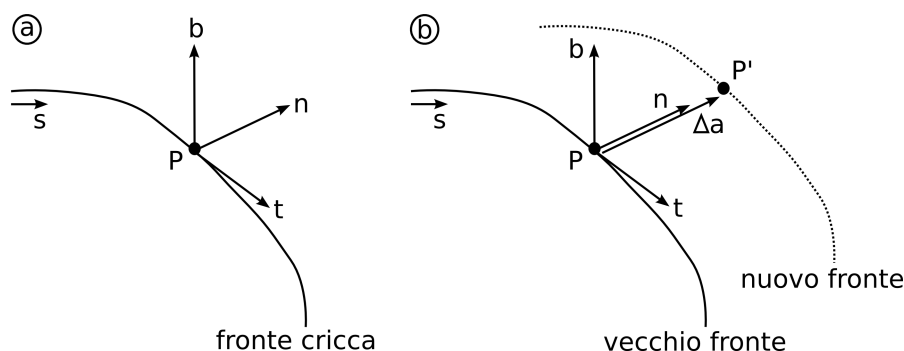


Figura 3: Definizione del sistema intrinseco locale e calcolo dell'avanzamento del fronte di cricca ad ogni passo di simulazione.

dotta nel modello contenente la cricca. Ricorrendo alla tecnica della sottomodellazione è possibile creare un modello a parte della mesh focalizzata. L'unico legame con il modello di partenza è rappresentato dalle particolari condizioni al contorno: ad ogni singolo nodo sulla superficie cilindrica laterale viene imposto lo spostamento valutato nel modello contenente la cricca come se il nodo fosse un punto geometrico al suo interno.

I fattori di intensità degli sforzi possono essere ricavati con precisione con una delle tecniche disponibili a partire dai valori di spostamento, di sforzo o di deformazione restituiti dalla mesh focalizzata. Da sottolineare il fatto che se viene utilizzato un metodo energetico, quale quello del J-integral, le basi del cilindro che costituisce la mesh focalizzata (Fig. 4) non devono necessariamente essere normali al fronte di cricca [5]. Questo facilita molto la creazione della mesh focalizzata, in special modo in superficie, dove il fronte di cricca forma un angolo non normale alla superficie stessa.

Nell'esempio che verrà mostrato tra poco, i valori dei fattori di intensità degli sforzi sono stati ricavati dal valore del J-integral.

4 ACCURATEZZA DELLA SOLUZIONE: UN CASO CONCRETO

Per poter trattare in concreto i problemi inerenti all'accuratezza della soluzione ottenibile con il metodo appena esposto, si ricorrerà ad un caso applicativo. Si supponga di voler studiare l'innesco e la successiva propagazione di una cricca da un intaglio in un comune provino SEB. Le dimensioni sono riportate in Fig. 5.

Il provino è sottoposto ad un momento flettente M variabile nel tempo. Questa sollecitazione di fatica causa la nucleazione di una cricca dall'intaglio e la sua propagazione in puro modo I. Per una cricca già formata, il valore del K_I è dato dalla formula (3) riportata da Murakami, dove a indica la lunghezza della cricca, compresa la lunghezza dell'intaglio (8 mm), W indica l'altezza del provino (24 mm) e t lo spessore (12 mm). Questa formula ha un'accuratezza dichiarata di $\pm 0.2\%$ per una lunghezza di cricca a inferiore al 60% dell'altezza del provino.

Per poter simulare la nucleazione e la propagazione di cricca è stato creato un modello ad elementi finiti con

$$K_I = \frac{6M}{tW^2} \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot \left(1.122 - 1.40 \frac{a}{W} + 7.33 \left(\frac{a}{W} \right)^2 - 13.08 \left(\frac{a}{W} \right)^3 + 14.0 \left(\frac{a}{W} \right)^4 \right) \quad (3)$$

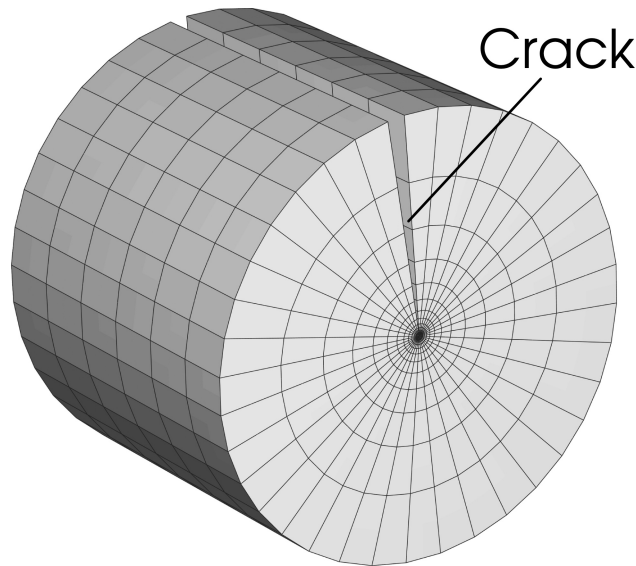


Figura 4: Esempio di mesh focalizzata all'apice di cricca per un fronte rettilineo.

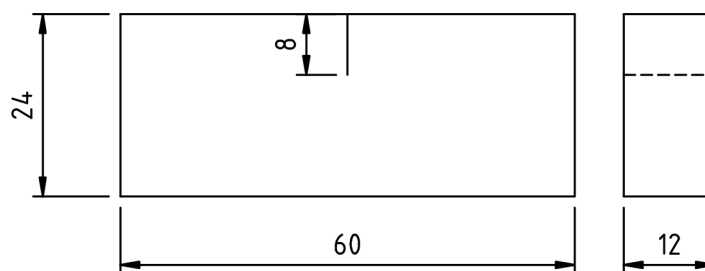


Figura 5: Provino SEB oggetto della simulazione (dimensioni in millimetri).

elementi solidi lineari il cui lato ha una dimensione minima di 0.5 mm. L'intaglio non è stato modellato e al suo posto è stata generata in automatico, tramite l'algoritmo prima esposto, una cricca lunga 8 mm con fronte rettilineo. In Fig. 6 è visibile la configurazione deformata del modello iniziale (cricca di lunghezza pari all'intaglio). In Fig. 7 è visibile un ingrandimento della mesh all'apice di cricca nel quale sono visibili gli elementi creati dall'algoritmo di propagazione automatica.

Come già dimostrato nell'articolo che descrive l'algoritmo di propagazione per modelli piani e shell [2], l'accuratezza della soluzione dipende ovviamente dalla dimensione degli elementi finiti intorno all'apice. Grazie al fatto che il calcolo dei fattori di intensità degli sforzi viene effettuato a livello di mesh focalizzata (sottomodello di Fig. 4), il modello del provino contenente la cricca può essere costituito da una mesh abbastanza rada, come visibile in Fig. 7. Quello che risulta però fondamentale da questo punto di vista è l'estensione della mesh focalizzata relativamente alla dimensione dell'elemento della mesh all'apice di cricca. Questo aspetto viene sinte-

tizzato dalla dimensione radiale relativa della mesh focalizzata [2], definita come rapporto tra il raggio della mesh focalizzata e la dimensione dell'elemento all'apice della cricca.

Nel caso piano e shell, esiste un valore ottimale della dimensione radiale relativa che assicura la massima accuratezza dei risultati ottenibili con la mesh adottata [2]. Questo valore deve essere trovato iterativamente aumentando il raggio della mesh focalizzata e monitorando la variazione dei risultati. Lo stesso discorso si verifica per il caso qui analizzato e pertanto il fronte tridimensionale non introduce variazioni per quanto riguarda la dimensione radiale relativa ottimale.

Tuttavia per il caso di fronte tridimensionale entrano in gioco nuovi fattori che influiscono sull'accuratezza dei risultati e che non erano presenti per il caso piano o shell:

- a) valore dell'avanzamento adottato ad ogni passo di simulazione
- b) vicinanza alla superficie libera della struttura
- c) profilo del fronte e forma degli elementi finiti all'apice

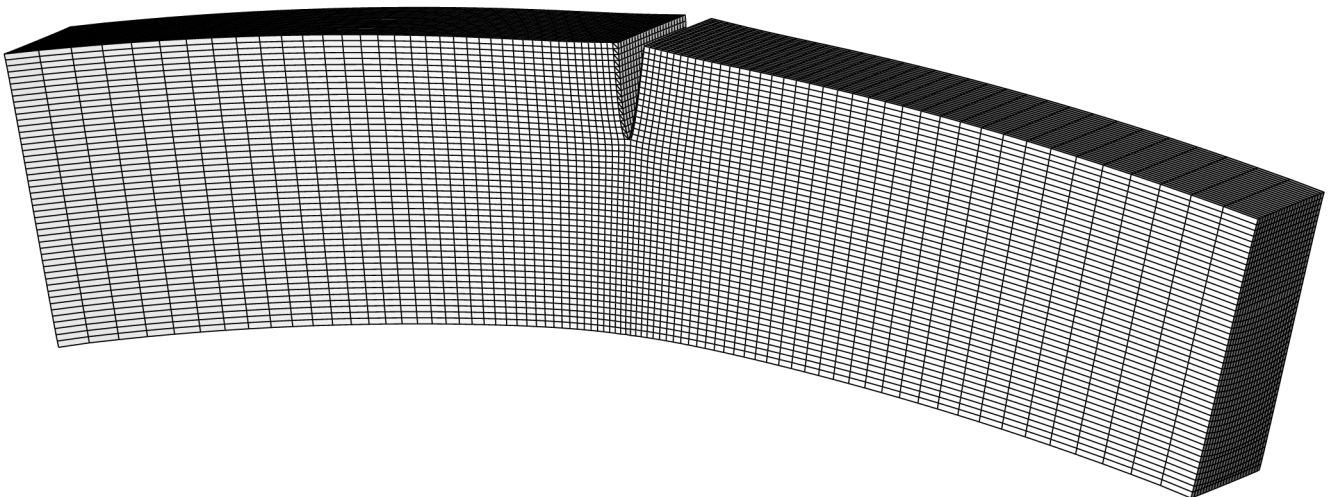


Figura 6: Mesh deformata del modello del provino SEB. La cricca iniziale, di lunghezza pari all'intaglio, è stata introdotta tramite l'algoritmo di propagazione automatica presentato in questo articolo.

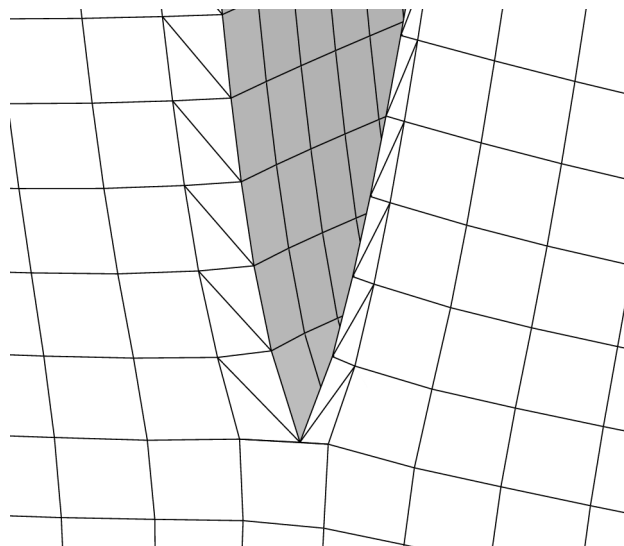


Figura 7: Dettaglio dell'apice di cricca di Fig. 6.

È intuibile che anche nel caso bidimensionale l'accuratezza del percorso di propagazione predetto dal modello è influenzata dal valore dell'avanzamento di cricca scelto ad ogni passo della simulazione (punto a). Nel caso di fronte tridimensionale questo parametro influisce anche sull'accuratezza della predizione della forma del fronte. È intuibile che avanzamenti troppo elevati portano ad avere una forma del fronte in un punto della struttura in cui tale forma non si dovrebbe avere. Questo aspetto è però connesso e dipendente anche da una peculiarità dell'algoritmo presentato (punto c) che verrà ripresentata ed analizzata in dettaglio più avanti.

Vicinanza della superficie libera della struttura

Come già esposto in precedenza, i fattori di intensità degli sforzi vengono valutati in diversi punti lungo il fronte di cricca. Se il punto si trova troppo vicino alla superficie libera, il valore predetto risulta poco accurato od addirittura da scartare.

In Fig. 8 è riportato l'andamento del K_I lungo lo spessore del provino SEB analizzato per diverse lunghezze di cricca. Essendo il comportamento del materiale lineare elastico e dal momento che non viene considerata la soglia di propagazione della cricca, per le simulazioni è

stato adottato un valore di comodo per il momento flettente (10 Nm). Come si vede dalla figura, il valore del K_I risulta pressoché costante lungo tutto lo spessore una volta che la cricca si è formata (K_I maggiore di 65 MPa $\sqrt{\text{mm}}$), come verrà discusso più avanti.

Si nota immediatamente che in prossimità della superficie, per una profondità di circa 2 millimetri, il valore del K_I ha un andamento che devia da quello più regolare assunto negli altri punti lungo lo spessore (zona 1 in Fig. 8): spostandosi dal centro del provino verso la superficie, il K_I aumenta inizialmente di valore per poi diminuire bruscamente.

Questo andamento può essere spiegato con il fatto che in superficie lo stato di sforzo tende a diventare piano e non è più verificata l'ipotesi di stato di deformazione piano utilizzato nella valutazione dei fattori di intensità degli sforzi. Se si ricalcolano i valori di K_I adottando l'ipotesi di stato di sforzo piano, si ottengono i valori riportati in Fig. 9. Questo approccio è proposto ed utilizzato anche nel lavoro di Lin e Smith [5].

Come è visibile, la correzione apportata smorza i picchi del K_I vicino alla superficie, che non sarebbero altrimenti giustificabili. La correzione è stata apportata solamente ai tre nodi della mesh focalizzata più in superficie

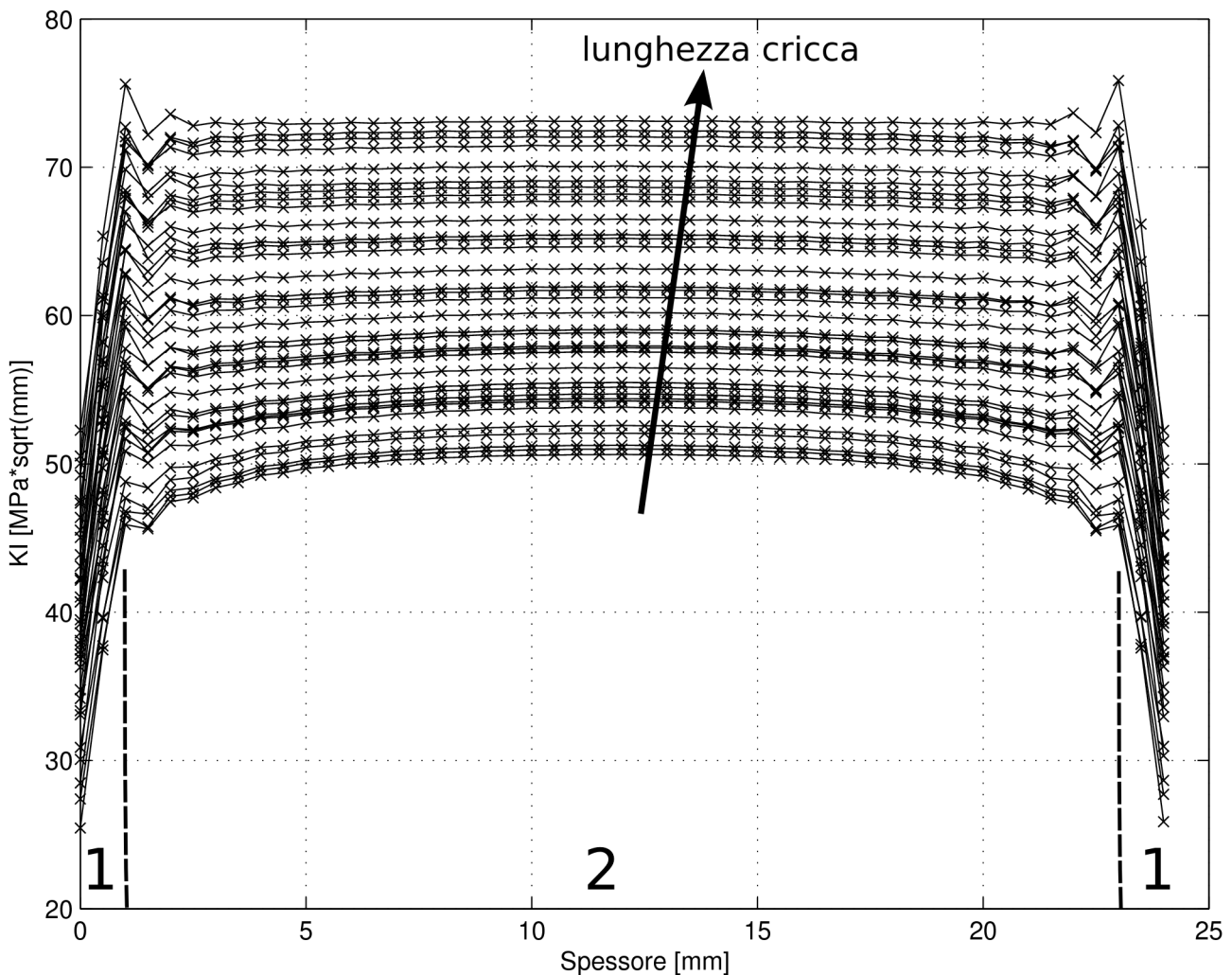


Figura 8: Andamento del K_I nello spessore per diverse lunghezze di cricca per il provino SEB analizzato ($\Delta a_{\max} = 0.1$ mm).

(zona 1 di Fig. 8) che corrispondono al primo strato superficiale di elementi della mesh focalizzata. Nonostante la correzione di stato di sforzo piano, i valori in superficie sono comunque troppo bassi. Questo comporta un avanzamento estremamente basso del fronte sulla superficie del provino SEB. In Fig. 10 è riportata la sezione del modello ad elementi finiti con riportati i primi fronti di propagazione ottenuti dalle simulazioni.

Come è visibile, in superficie il fronte avanza molto lentamente. Secondo quanto riportato in [21] e [22], il fronte di una cricca che propaga in un materiale isotropo e omogeneo forma con la superficie libera un angolo il cui valore dipende esclusivamente dal coefficiente di Poisson del materiale. Nelle simulazioni riportate in questo articolo è stata adottata una lega di titanio (Ti-10V-2Fe-3Al) per la quale il coefficiente di Poisson vale 0.33. Secondo quanto riportato in [22], il valore dell'angolo formato tra la tangente al fronte di cricca e la normale alla superficie è pari a circa 11 gradi. Il valore predetto dal modello ad elementi finiti è invece pari a circa 25 gradi (Fig. 11).

Per poter correttamente simulare l'avanzamento di cricca in superficie, si propone la seguente correzione: i valori della prima coppia e dell'ultima coppia di valori di K_I

forniti dalla mesh focalizzata vengono ignorati e al loro posto viene adottato il valore estrapolato linearmente. In Fig. 12 è rappresentato il risultato della simulazione di propagazione eseguita adottando la correzione proposta. Confrontando i risultati con quelli precedenti (Fig. 10) si nota come la velocità di propagazione in superficie sia aumentata. L'angolo formato tra la tangente al fronte e la normale alla superficie è ora pari a circa 8 gradi (Fig. 13). Questo angolo, che rimane pressoché costante durante tutta la successiva propagazione, si avvicina molto a quello teorico riportato in [22] (11 gradi).

Profilo del fronte e forma degli elementi finiti all'apice

Durante la propagazione il fronte di cricca deve essere contenuto in un'unica fila di elementi finiti: per la natura stessa dell'algoritmo di propagazione, considerato uno strato di elementi finiti (Fig. 2b), la cricca deve essere contenuta in un solo elemento finito. Ciò significa che le basi sulle due superfici che vengono elaborate dall'algoritmo di triangolazione (Fig. 2b) devono appartenere allo stesso elemento. Applicando questa condizione anche agli altri strati di elementi (Fig. 2a), si conclude che l'algoritmo lavora correttamente solamente

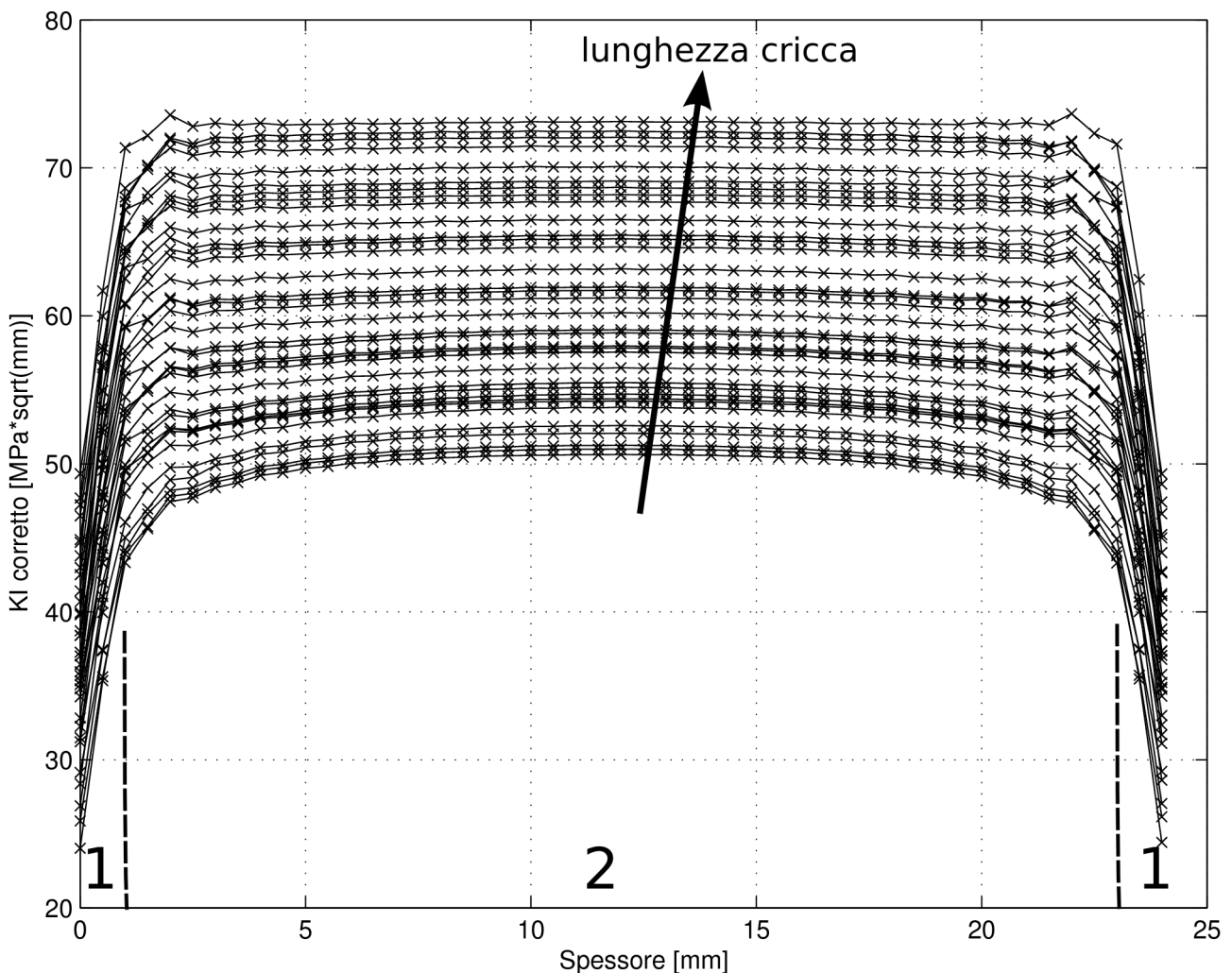


Figura 9 - Andamento del K_I nello spessore per diverse lunghezze di cricca per il provino SEB analizzato. Ai primi tre valori in superficie è stata apportata la correzione che considera lo stato di sforzo piano.

se il fronte di cricca è sempre contenuto in una fila di elementi che si estende lungo i vari strati della mesh. Questo non significa necessariamente che il fronte deve essere piano: l'algoritmo lavora correttamente anche nel caso di fronte non piano se la mesh viene preparata correttamente in modo tale che sia rispettata la condizione precedente.

Supponiamo che ad un dato passo di simulazione il fronte sia correttamente contenuto in una fila di elementi e che in seguito all'avanzamento calcolato una parte di esso fuoriesca dalla fila attuale e penetri nella fila successiva. In Fig. 14a è rappresentata la sezione del provino

SEB e l'andamento della forma e posizione del fronte nei primi 5 passi di propagazione. La mesh è stata costruita in modo tale che le file di elementi risultano rettilinee poiché questa è la maniera più semplice e veloce per realizzare la mesh stratificata. Nella figura è stata anche rappresentata con la linea tratteggiata la posizione che assumerebbe il fronte in seguito all'avanzamento. Come visibile, il fronte interesserebbe due file di elementi e la condizione di fronte di cricca interamente contenuto in una singola fila sarebbe pertanto violata. In questo caso pertanto l'algoritmo di propagazione non può fare altro che aumentare il numero di cicli n passo

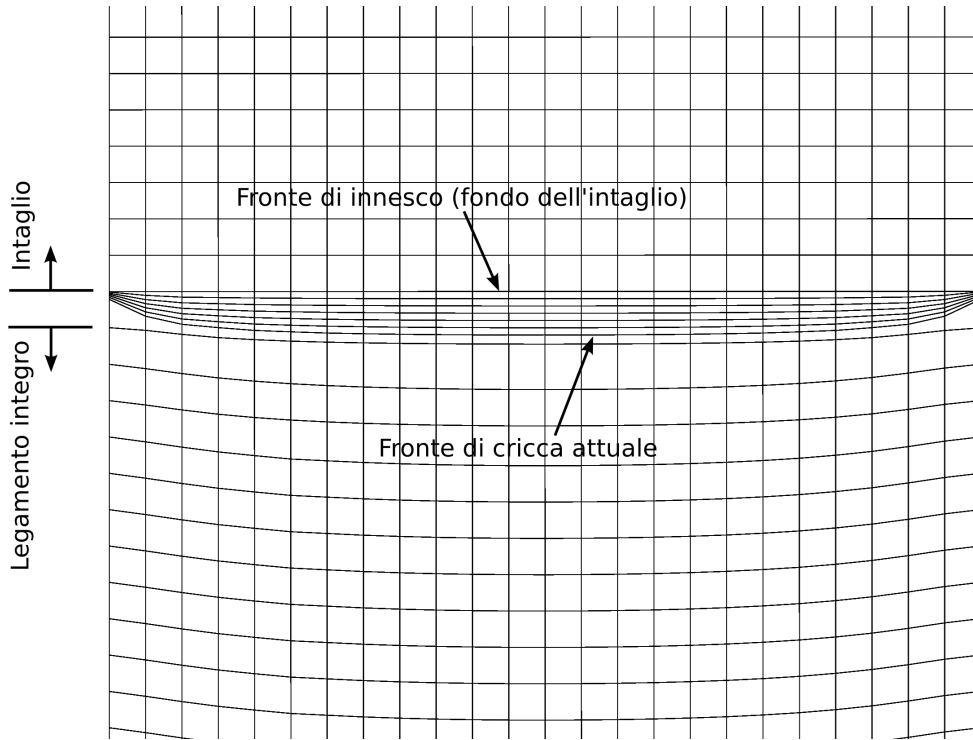


Figura 10: Sezione del modello ad elementi finiti del provino SEB dopo alcuni passi di simulazione di propagazione.

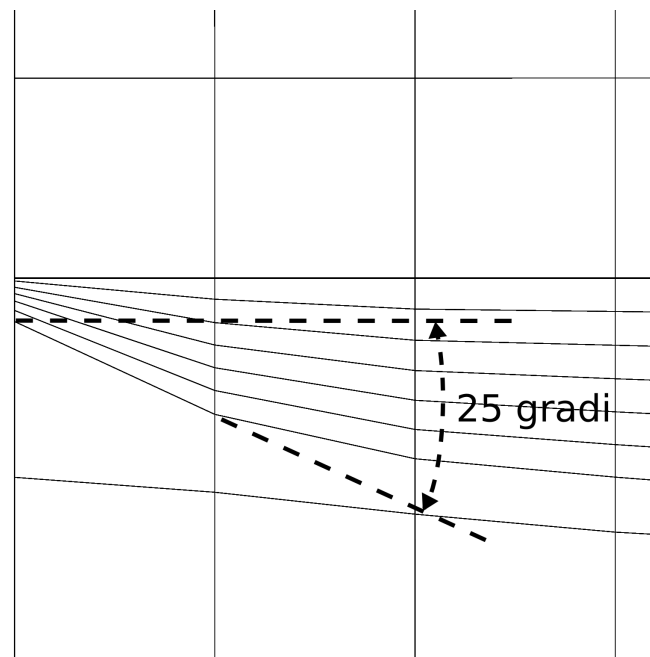


Figura 11: Ingrandimento della zona di intersezione fra fronte di cricca e superficie sinistra del provino SEB di Fig. 10.

assunto nel passo di avanzamento in modo tale che tutto il fronte attraversi contemporaneamente la fila di elementi (Fig. 14b).

Anche se questa operazione potrebbe sembrare innocua, in realtà porta con sé due problemi. Innanzitutto la variazione massima di lunghezza di cricca lungo il fronte ($a(s)_{\max} - a(s)_{\min}$) non può superare l'altezza della fila di elementi. Questo limiterebbe fortemente l'applicazione dell'algoritmo di propagazione. Infatti sarebbe necessario rendere più rada la mesh nella zona di propagazione della cricca, ma questo aumenterebbe l'errore sui risultati ottenibili poiché il Δa_{\max} imposto sarebbe maggiore essendo correlato, come già esposto, alla dimensione dell'elemento all'apice di cricca.

Il secondo problema riguarda l'accuratezza dei risultati. In Fig. 15 è riportato l'andamento del K_I previsto dal modello ad elementi finiti e quello ricavato dalla formula di Murakami sopra riportata [19]. In Fig. 16 sono riportati i diversi fronti di cricca ottenuti per i vari passi di simulazione.

Dai risultati riportati si nota che solamente i primi passi di propagazione, fino a una lunghezza di cricca di circa 9.5 mm, forniscono dei valori di K_I accettabili. La discrepanza rispetto a quelli riportati in letteratura è da imputare al fatto che questi ultimi si riferiscono a una cricca già formata, mentre nei primi passi della simulazione ad elementi finiti la cricca sta ancora nucleando dall'intaglio e non ha raggiunto una configurazione stabile. Si nota anche che l'andamento del K_I mostra dei picchi pressoché equidistanti che sono da imputare ai maggiori avanzamenti imposti dall'algoritmo di propagazione per fare in modo che il fronte di cricca sia sempre contenuto in un'unica fila di elementi. Questi picchi corrispondono a maggiori errori di valutazione del K_I . Ma non solo. Osservando la successione dei fronti di cricca si può notare che la forma del fronte varia gradualmente e che gli avanzamenti vengono forzatamente aumentati man mano che la cricca procede al fine di far rimanere il fronte in un'unica fila di elementi. Alla settima fila di elementi, la variazione massima di

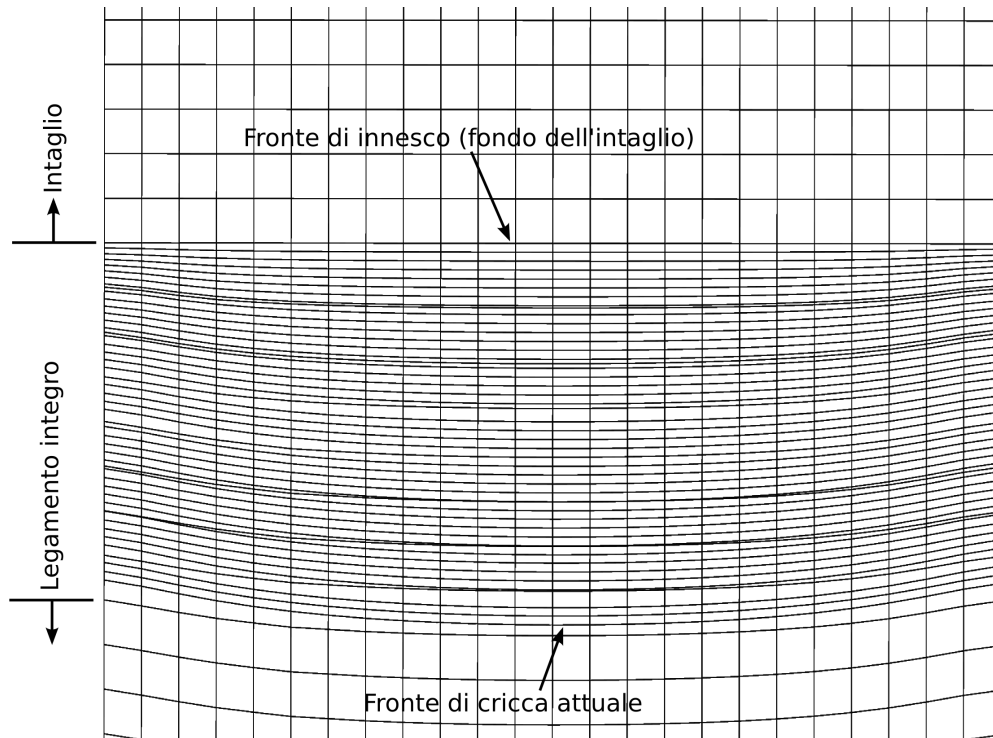


Figura 12: Sezione del modello ad elementi finiti del provino SEB con cricca completamente formata. Il K_I è stato estrapolato linearmente in superficie.

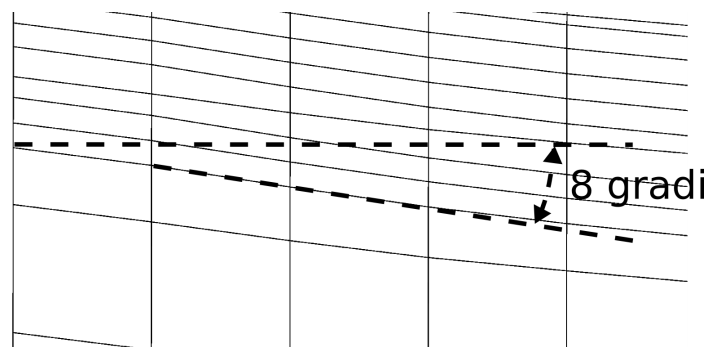


Figura 13: Ingrandimento della zona di intersezione fra fronte di cricca e superficie sinistra del provino SEB di Fig.12.

lunghezza di cricca lungo il fronte ($a(s)_{\max} - a(s)_{\min}$) ha assunto un valore pari circa all'altezza della fila stessa. Questo comporta che una fila di elementi può essere usata per simulare un solo avanzamento e il fronte deve avanzare di 0.5 mm ad ogni passo di simulazione. Probabilmente anche la forma del fronte non può evolvere correttamente con questi avanzamenti e ad ogni passo di simulazione il modello ad elementi finiti possiede un

fronte di forma leggermente errata che fornisce, ovviamente, valori del K_I errati. La soluzione a questi problemi consiste nell'adattare la forma di partenza della mesh al profilo assunto dal fronte di cricca durante la propagazione. Questa operazione può essere agevolmente condotta in automatico dal software di propagazione facendo avanzare i nodi degli elementi della mesh antistante il fronte di cricca in

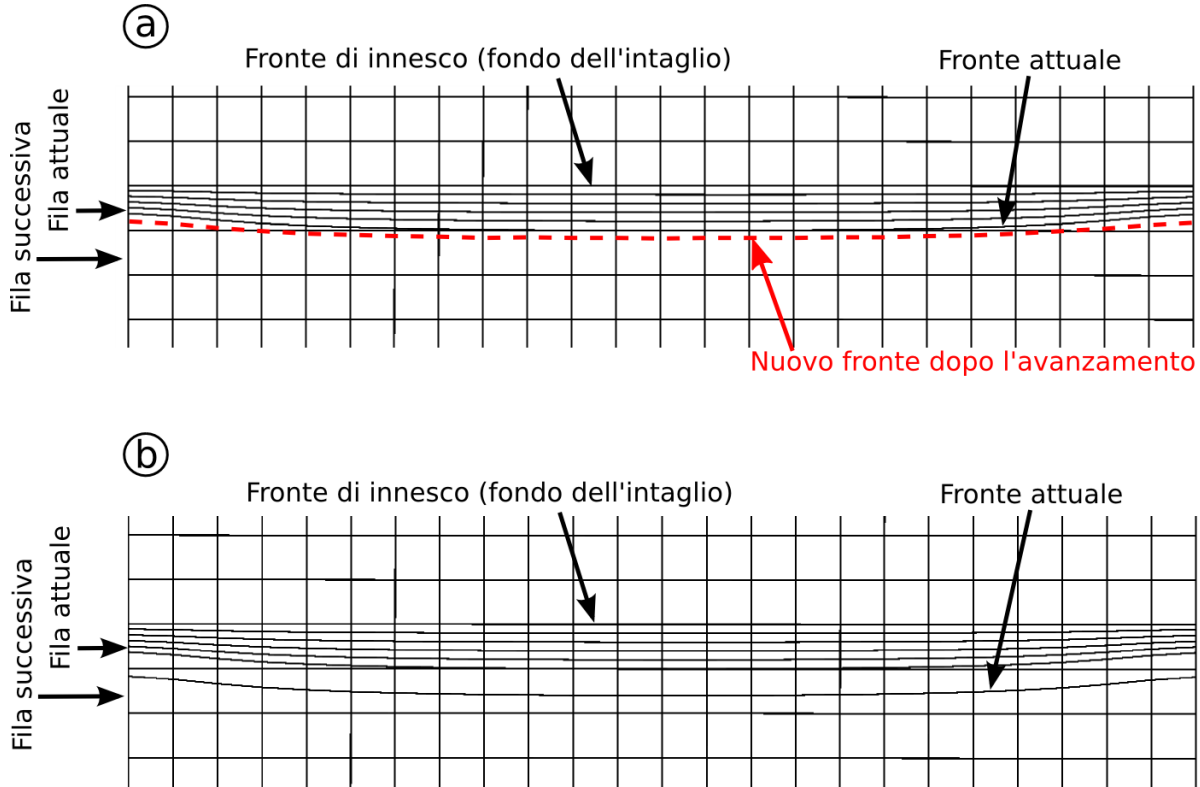


Figura 14: Comportamento dell'algoritmo di propagazione quando il fronte di cricca, a seguito di un avanzamento, interessa due file di elementi.

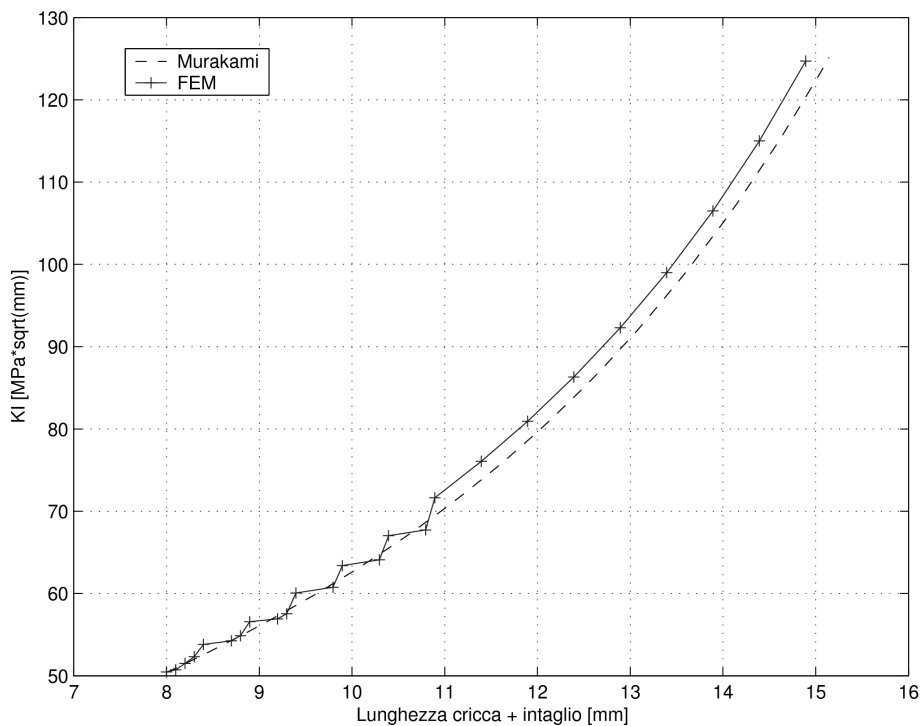


Figura 15: Confronto tra l'andamento del K_I previsto dal modello ad elementi finiti e quello noto in letteratura [19].

modo da riprodurre la forma stessa del fronte e minimizzare quindi gli avanzamenti forzati della cricca. La modifica della mesh deve avvenire in automatico e progressivamente durante la propagazione, in modo tale da tenere in considerazione la forma effettiva assunta dal fronte. Questa modifica può avvenire basandosi esclusivamente sulla connessione degli elementi. La correzione apportata alla posizione dei nodi può essere progressivamente ridotta a zero allontanandosi dalla zona di propagazione, in modo tale da arrivare al bordo libero del modello con una correzione nulla che non modifica la forma geometrica del provino SEB.

Il risultato di questa procedura di adattamento della forma della fila degli elementi a quella del fronte è visibile in Fig. 17. Per illustrare l'efficacia della procedura proposta, l'adattamento della forma degli elementi è stata applicata fino a una lunghezza di cricca di 12 mm (prime 7 file di elementi). Il termine dell'adattamento è rilevabile in Fig. 17 per la presenza di un piccolo spazio tra due fronti contigui. Il confronto fra i dati di letteratura e il caso precedente è riportato in Fig. 18. In Fig. 19 è riportato l'errore percentuale. Il miglioramento della soluzione è evidente.

Osservando l'errore relativo percentuale (Fig. 19) si ve-

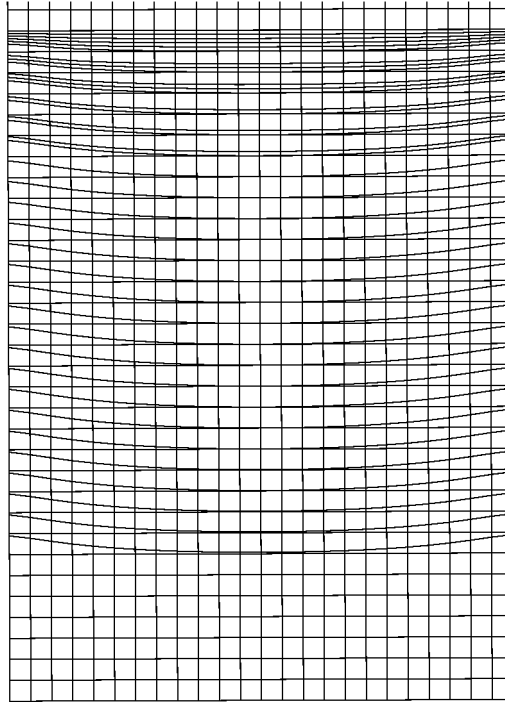


Figura 16: Andamento dei fronti di propagazione (linee curve) ($\Delta a_{\max}=0.1$ mm).

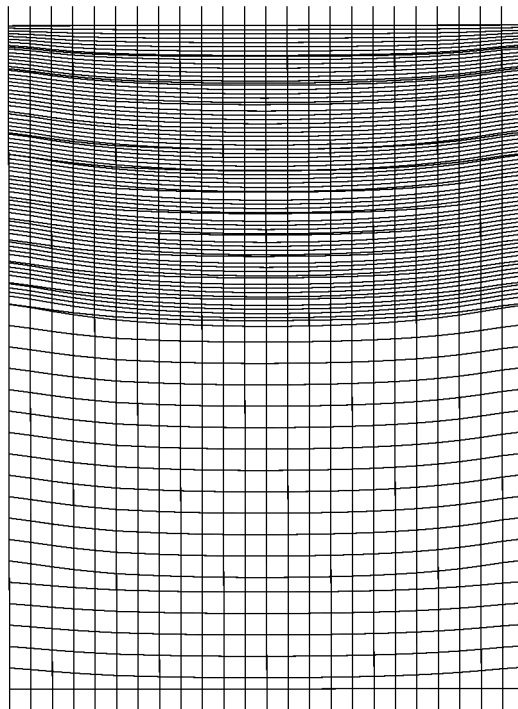


Figura 17: Andamento dei fronti di propagazione (linee curve) con adattamento della forma della fila di elementi a quella del fronte fino a 4 mm dall'intaglio, cioè una lunghezza di cricca pari a 12 mm ($\Delta a_{\max}=0.1$ mm).

de che l'effetto dell'adattamento non è significativo fino a circa 10.5 mm, nel senso che l'errore è paragonabile a quello della soluzione senza adattamento. L'unico vantaggio apportato dalla procedura di adattamento consiste nel maggior numero di valori calcolati poiché l'algoritmo di propagazione non impone maggiori avanzamenti alla cricca per mantenere il fronte in un'uni-

ca fila di elementi. Se si considera l'andamento dei valori del K_I nello spessore (Fig. 8), si può notare che a circa $65 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$ la curva tende ad appiattirsi lungo tutto lo spessore. Il fronte di cricca propaga cioè in maniera iso-K. Questo può essere assunto come punto in cui la cricca è completamente formata e quindi la soluzione fornita dal modello ad elementi finiti può essere parago-

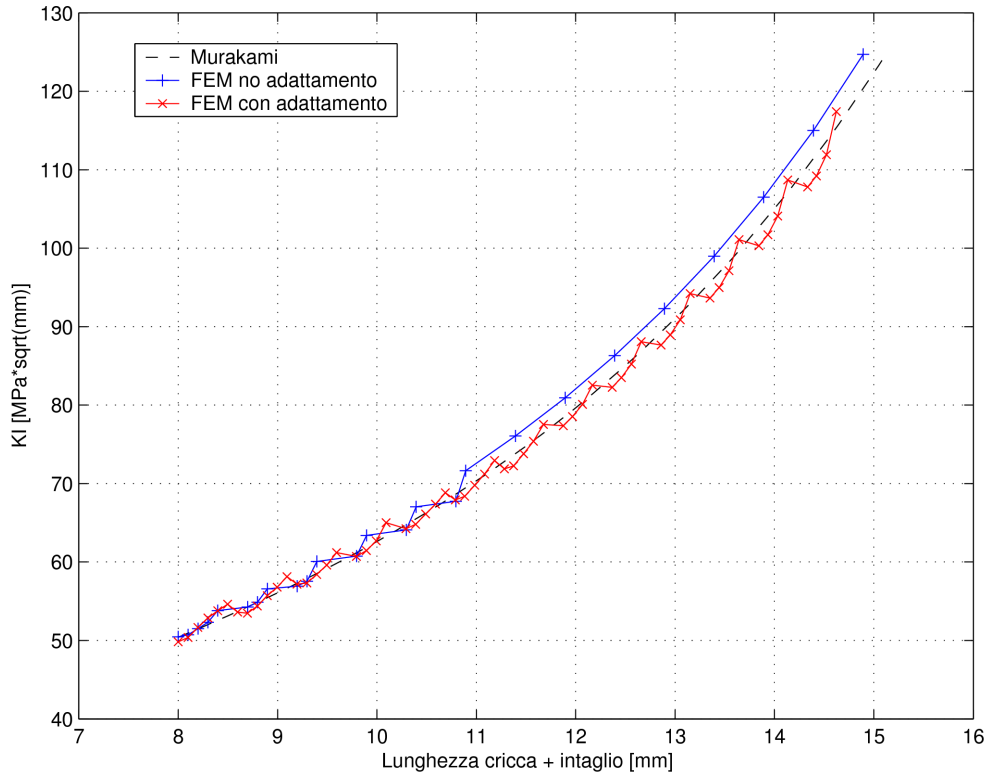


Figura 18: Confronto tra l'andamento del K_I previsto dal modello ad elementi finiti con e senza adattamento e quello noto in letteratura [19].

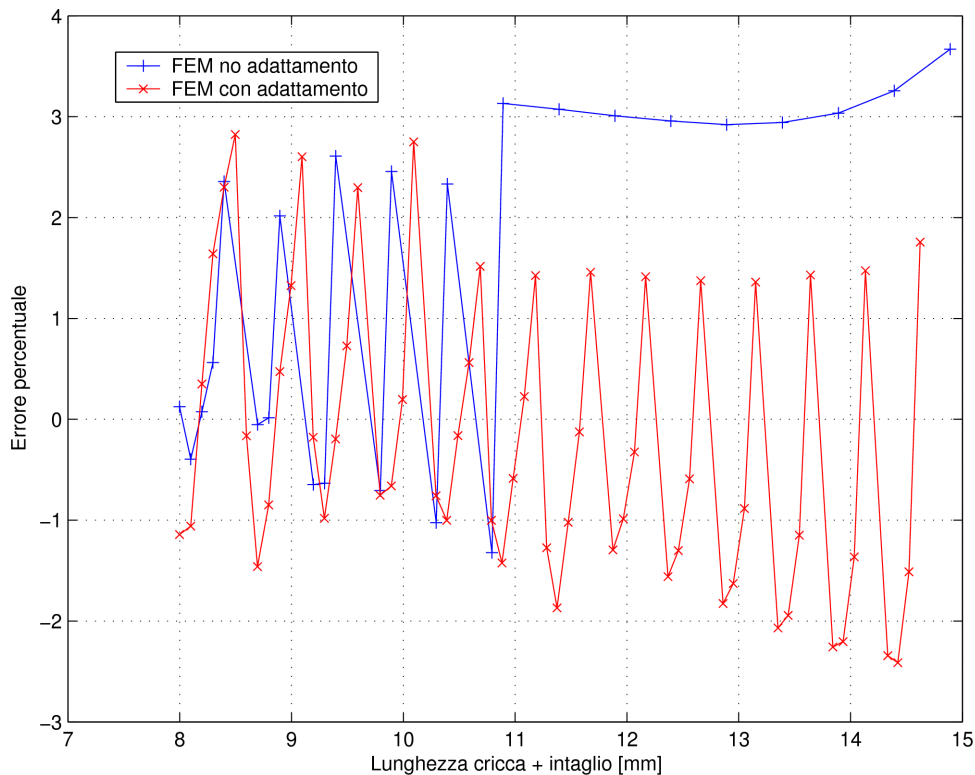


Figura 19: Errore percentuale sul K_I fornito dal modello ad elementi finiti rispetto al valore di letteratura, con e senza adattamento.

nata a quella disponibile in letteratura [19]. Dalla Fig. 18 si può leggere che ad un K_I pari a $65 \text{ MPa}\sqrt{\text{mm}}$ corrisponde una lunghezza di cricca di circa 10.5 mm. Pertanto il grafico dell'errore percentuale di Fig. 19 deve essere considerato a partire da 10.5 mm. Da questo valore di lunghezza di cricca si vede che l'errore ottenuto con la procedura di adattamento è inferiore a quello ottenuto senza adattamento. L'errore si mantiene limitato nella fascia $\pm 1.5\%$ fino a circa 12.5 mm di lunghezza di cricca, cioè fino al punto in cui l'adattamento viene applicato al modello. Oltre questa lunghezza, l'errore comincia gradatamente a crescere.

5 CONCLUSIONI

In questo lavoro è stato presentato un algoritmo per simulare in automatico la propagazione di cricca di un fronte tridimensionale. L'implementazione può essere realizzata agevolmente in poco tempo e senza particolari difficoltà tramite la scrittura di un software che si può interfacciare al sistema di analisi ad elementi finiti presente nell'ambiente di lavoro.

Nella discussione dei risultati dello studio di propagazione in un provino SEB ottenuti tramite l'algoritmo di propagazione proposto sono stati messi in luce particolari problematiche. Innanzitutto si è messo in evidenza che la valutazione dei fattori di intensità degli sforzi in prossimità della superficie non risulta accurata. Questo aspetto non dipende dall'algoritmo di propagazione ed è stato riscontrato anche da altri autori. E' stata quindi proposta la correzione dei valori ottenuti considerando sia la condizione di stato di sforzo piano, sia l'estrapolazione lineare degli ultimi tre valori ricavati in superficie. I risultati ottenibili con questo approccio risultano in buon accordo con i valori teorici e sperimentali previsti da alcuni lavori presenti in letteratura. In secondo luogo è stato mostrato un limite dell'algoritmo di propagazione che porta a un peggioramento dell'accuratezza dei risultati. Al fine di superare quest'ultima limitazione è stato proposto un processo di adattamento della mesh, anch'esso realizzabile in maniera del tutto automatica.

Grazie a questi accorgimenti, i risultati ottenibili con l'algoritmo di propagazione risultano corretti. Ulteriore lavoro su quanto proposto è necessario per poter generalizzare l'algoritmo a una qualunque tipologia di mesh.

6 BIBLIOGRAFIA

[1] X.B.Lin, R.A.Smith, *Engineering Fracture Mechanics*, 63 (1999) 541-556.
 [2] D.Colombo, M.Giglio, *Engineering Fracture Mecha-*

tics, 73 (2006) 490-504.
 [3] M.Schollman, M.Fulland, H.A.Richard, *Engineering Fracture Mechanics*, 70 (2003) 249-268.
 [4] W.T.Riddell, A.R.Ingraffea, P.A.Wawrzynek, *Engineering Fracture Mechanics*, 58(4) (1997) 293-310.
 [5] X.B.Lin, R.A.Smith, *Engineering Fracture Mechanics*, 63 (1999) 503-522.
 [6] T.N.Bittencourt, P.A.Wawrzynek, A.R.Ingraffea, *Engineering Fracture Mechanics*, 55 (1996) 321-334.
 [7] P.O.Bouchard, F.Bay, Y.Chastel, I.Tovena, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 189 (2000) 723-742.
 [8] I.L.Lim, I.W.Johnston, S.K.Choi, *Engineering Fracture Mechanics*, 53-2 (1996) 193-211.
 [9] A.C.O.Miranda, M.A.Meggiolaro, J.T.P.Castro, L.F.Martha, T.N.Bittencourt, *Engineering Fracture Mechanics*, 70 (2003) 1259-1279.
 [10] S.A.Fawaz, B.Andersson, *Engineering Fracture Mechanics*, 71 (2004) 1235-1254.
 [11] S.Simandjuntak, H.Alizadeh, D.J.Smith, M.J.Pavier, *International Journal of Fatigue*, 28 (2006) 335-345.
 [12] P.W.Tan, *Engineering Fracture Mechanics*, 55(3) (1996) 505-512.
 [13] Daniele Colombo, Marco Giglio, Andrea Manes, *Int. J. Materials and Product Technology*, 30 (2007) 107-123.
 [14] Chi-King Lee, Sing-Ping Chiew, Seng-Tjhen Lie, Hong-Li Ji, *Engineering Fracture Mechanics*, 74 (2007) 721-738.
 [15] C.Gardin, S.Courtin, G.Bézine, D.Bertheau, H.Ben Hadj Hamouda, *Fatigue Fract Engng Mater Struct* 30 (2007) 231-242.
 [16] R.D.Henshell, K.G.Shaw, *Int J Numer Meth Engng*, 9 (1975) 495-509.
 [17] R.S.Barsoum, *Int J Numer Meth Engng*, 10 (1976) 25-37.
 [18] Hibbit Karlsson & Sorensen. *ABAQUS user's manual Version 6.3-1*. Pawtucket (2002).
 [19] Y.Murakami, "Stress intensity factors handbook". Oxford: Pergamon Press (1987).
 [20] X.B.Lin, R.A.Smith, *Engineering Fracture Mechanics*, 59-1 (1998) 73-87.
 [21] M.Heyder, G.Kuhn, *International Journal of Fatigue*, 28 (2006) 627-634.
 [22] M.Heyder, K.Kolk, G.Kuhn, *Engineering Fracture Mechanics*, 72 (2005) 2095-2105.