



Un nuovo modello analitico per il comportamento elasto-plastico di giunzioni saldate per punti

Francesco Vivio, Pierluigi Fanelli

Dipartimento di Ingegneria Meccanica, Università di Roma "Tor Vergata", Via del Politecnico 1, 00133 Roma, Italia

RIASSUNTO. In questo lavoro viene presentata una procedura analitica per la valutazione del comportamento elasto-plastico di giunzioni saldate per punti. La procedura è basata su un modello della regione di lamiera prossima alla saldatura: una piastra circolare con spessore variabile dotata di un nocciolo rigido che viene risolto utilizzando un metodo analitico inedito.

La soluzione in forma chiusa permette di descrivere l'evoluzione dello spostamento del nocciolo rigido quando questo viene sottoposto a carico ortogonale alla piastra, in condizioni di plasticità e grandi spostamenti. L'obiettivo è quello di ottenere un modello realistico della zona prossima al punto saldato che possa essere utilizzato come base di sviluppo per un elemento punto di saldatura in ambiente FE che sia valido anche in caso di grandi spostamenti e di avvenuta plasticizzazione. La procedura è completamente generale e assolutamente inedita in quanto non possibile trovare ad oggi lavori analoghi in letteratura tecnica. In questo lavoro, al fine di validazione dello stesso, la metodologia analitica presentata è stata applicata ad alcuni esempi di piastre comunemente utilizzate per l'analisi dei punti saldati. I risultati analitici ottenuti utilizzando le innovative relazioni generali ricalcano perfettamente quelli derivanti da modellazioni in ambiente FE della regione del punto di saldatura

ABSTRACT. An analytical procedure for the evaluation of the elastic-plastic behaviour of spot welded joints is presented. The procedure is based on a new model of spot weld region: a circular plate having variable thickness with a central rigid nugget which is resolved using an original analytical method.

The closed-form solution allows to describe the displacement of a rigid nugget when an axial orthogonal load is applied on the plate while plasticity and large displacements are present. The goal is to reach a reliable spot weld region model which can be used as the basis to develop a spot weld element in FE analysis even when plasticity and large displacements are in effect.

The procedure is as completely general as no other can be found in technical literature, and it has been applied to some examples of plates usually employed for spot weld analysis. The analytical results obtained by using the new general relations precisely match those obtained modelling spot weld region by FEA.

PAROLE CHIAVE: Spot weld; punto di saldatura; plasticità; flusso plastico; piastra circolare; grandi spostamenti.

1 INTRODUZIONE

L'interesse per le strutture saldate mediante punti di saldatura ha visto un incremento notevole negli ultimi tempi, specialmente nelle sue applicazioni in campo automobilistico e ferroviario, dove le strutture possono contenere anche migliaia di saldature a punti. Queste giunzioni sono soggette a complessi carichi multi assiali sia in condizioni di esercizio che di crash. Il campo tensionale nei pressi della regione del punto è piuttosto complesso, principalmente a causa delle irregolarità geometriche e di molteplici effetti locali al bordo del punto saldato. Inoltre, il comportamento strutturale e la valutazione delle rigidità locali delle saldature a punti mostra-

no elevate complessità, dovute alle difficoltà nell'ottenere una modellazione accurata della regione prossima al punto utilizzando modelli agli elementi finiti, caratterizzata da tensioni e deformazioni locali elevate, associate a notevoli gradienti delle stesse. In aggiunta, è necessario prevedere modelli che utilizzino un ridotto numero di gradi di libertà, poiché le strutture reali presentano spesso numerosi punti saldati. La modellazione di ciascuno mediante un complesso modello FE comporterebbe un ingente carico computazionale.

Gli studi a proposito delle giunzioni saldate sono principalmente focalizzate su problemi di rotture per fatica o di collasso plastico. La stima della vita a fatica di un pezzo saldato è stata investigata utilizzando vari

approcci. Generalmente, lo sforzo principale è stato fatto al fine di ottenere le tensioni presenti sulla giunzione utilizzando sia modelli agli elementi finiti che approcci teorici. Spesso la meccanica della frattura è stata adottata per valutare i fattori di intensificazione delle tensioni lungo la circonferenza del nocciolo di saldatura. In questa direzione sono molti i lavori che hanno investigato il problema utilizzando modelli agli elementi finiti in condizioni di elasticità lineare [1,2] o generando soluzioni analitiche approssimate per l'analisi dei fattori di intensificazione [3,4]. In altri casi l'uso di un parametro di tensioni convenzionale è stato proposto dimostrando la sua efficacia nel predire la vita a fatica dei punti di saldatura. In questo caso, modelli semplici portano ad una buona stima delle forze scambiate tra il punto saldato ed il resto della struttura, e questi carichi possono essere legati ad un parametro di tensioni del punto saldato mediante un'approssimazione analitica [5] o un modello teorico [6,7].

L'interesse sul comportamento plastico del punto di saldatura è focalizzato sull'analisi dei fenomeni di crash e di fatica a basso numero di cicli. Nel primo caso, al fine di ottenere un rottura progressiva della giunzione, è auspicabile avere un ben determinato meccanismo di rottura. Alla giunzione è infatti richiesto di mantenere una rigidità sufficiente durante l'intero processo di rottura così da scongiurare un collasso improvviso in presenza di carichi ad impatto e con associato il maggiore assorbimento di energia. In tal senso il comportamento auspicabile per la giunzione è quello che prevede una rottura del punto mediante una modalità comunemente detta a 'sbottonamento'. Ci sono molti criteri disponibili in letteratura che propongono le caratteristiche geometriche della giunzione in modo da guidare il meccanismo di rottura desiderato [8]. D'altra parte, ad oggi non esistono metodi scientifici per descrivere il comportamento di una struttura complessa caratterizzata da molti punti saldati soggetti a differenti tipologie di carico tali da oltrepassare il limite elastico del materiale. Risulta particolarmente arduo determinare come la deformazione delle lamiere influenzi la trasmissione dei carichi su un singolo punto durante la rottura di un altro, o tantomeno come il meccanismo di rottura si sviluppi.

Una così complessa problematica non può essere risolta utilizzando solo criteri sperimentali, ma deve essere affrontata anche mediante l'ausilio di modelli ad elementi finiti. Molteplici tentativi sono stati fatti in questa direzione in passato, introducendo vari gradi di semplificazione della geometria sostituendo il punto saldato con singoli elementi *beam* [9,10]. Questo rappresenta al momento l'unica via di affrontare la simulazione del comportamento complessivo di strutture con molti punti di saldatura, ma allo stesso tempo in tal modo si perde in

precisione nei riguardi della definizione degli stadi di deformazione intermedi.

In base a quanto detto, la conoscenza del campo tensionale prossimo alla saldatura richiede una modellazione accurata della struttura, utilizzando modelli analitici e numerici. Tuttavia, è essenziale, quando si modellino strutture reali con molti punti di saldatura, far uso di drastiche semplificazioni, che hanno un notevole impatto sui risultati.

Per superare tali limitazioni, un metodo derivante dalla soluzione teorica della regione prossima al punto di saldatura è stato proposto da Salvini et al. [7] e Vivio et al. [11]. L'approccio legato ad un elemento punto di saldatura proposto in questi lavori rappresenta un via efficiente per modellare il punto con soluzioni FE, utilizzando una caratterizzazione completa delle rigidità della regione del punto saldato, concentrata nel nodo che rappresenta il punto, utilizzando la soluzione in forma chiusa di un modello teorico (una piastra circolare con un nocciolo rigido centrale). L'elemento punto così definito introduce un numero molto ridotto di gradi di libertà e il miglioramento in termini di accuratezza dei risultati, sotto l'ipotesi di elasticità, sono evidenti non appena li si confronta con altre tecniche di modellazione [11,12]. Nell'elemento punto di saldatura tutte le deformazioni dovute alla plasticizzazione della regione prossima al nocciolo del punto possono essere concentrate nella deformabilità del *main link* che lega le due schiere di *beam*. Proprio per questo, è necessario valutare analiticamente i cambiamenti in termini di rigidità dell'area intorno al punto, dovuti ai grandi spostamenti e alle deformazioni plastiche sopraggiunte. L'estensione a tali campi di applicazione dell'elemento punto di saldatura è da ritenersi necessaria per garantire la possibilità di introdurre una modellazione più dettagliata e realistica dei punti di saldatura in strutture da analizzare sotto un punto di vista di resistenza a crash. In tali applicazioni una notevole importanza è ricoperta dall'accuratezza della simulazione delle rigidità, nella zona limitrofa alla saldatura, nel processo di deformazione della struttura sottoposta a carichi impulsivi. Non va inoltre dimenticato quanto sia necessario, al fine di predire la durata a fatica, sapere quali siano le distribuzioni dei carichi sui punti saldati in condizioni di carichi eccezionali. In tali casi si può verificare l'insorgenza di locali deformazioni plastiche con conseguente alterazione della rigidità locale e quindi dei carichi trasferiti.

Nonostante il comportamento elastico lineare della piastra circolare sia completamente noto, qualunque sia la tipologia di sollecitazione applicata, non esistono soluzioni analitiche del medesimo problema qualora il carico ecceda il limite elastico.

Skrzypek et al. [13] propose un approccio analitico al

problema riguardo la piastra circolare sollecitata oltre il limite elastico in regime di piccoli spostamenti. Nonostante le limitazioni introdotte dall'ipotesi di Kirchoff-Love portino ad una soluzione semplificata lontana dal caso reale, il complesso sistema di equazioni differenziali presentato da Skrzypek et al. [13] non presenta soluzioni in forma chiusa.

In questo lavoro viene presentato e descritto, nelle sue linee generali, un nuovo modello analitico in grado di descrivere il comportamento plastico del punto saldato quando esso è sollecitato assialmente; questa tipologia di carico ricopre infatti il ruolo da protagonista nella plasticizzazione della giunzione. Il modello proposto fornisce il primo contributo all'implementazione dei vantaggi rappresentati dall'elemento punto di saldatura nel caso di comportamento inelastico in grandi spostamenti, attraverso la caratterizzazione delle rigidità della regione del punto saldato.

2 MODELLO EQUIVALENTE E SVILUPPO ANALITICO

La valutazione della rigidità della regione prossima al punto saldato viene calcolata attraverso la soluzione analitica di un modello bidimensionale (mostrato in Fig. 1a). La piastra presenta un nocciolo rigido centrale avente raggio r_{int} incastrato alla piastra stessa. Al tempo stesso al raggio esterno la piastra è vincolata mediante un appoggio, che non permette gli spostamenti assiali e radiali. Tale scelta è dettata dalla volontà di evitare l'insorgere di un fronte secondario di plasticizzazione, altrimenti presente al raggio esterno in caso di incastro. Questo vanificherebbe la validità del modello in termini di equivalenza con la zona della saldatura.

Col fine di definire il contributo plastico alla deformazione finale in caso sia di piccoli che di grandi spostamenti, il modello è stato sviluppato analiticamente utilizzando una nota funzione di tensioni valida per piccoli spostamenti. In seguito, una formulazione innovativa è stata

introdotta per ottenere gli apporti membranali in termini di tensioni e deformazioni.

L'interesse è concentrato sulla risposta in termini di rigidità della piastra quando un carico assiale P viene applicato sul nocciolo rigido. Nel modello proposto, è stato scelto di implementare un materiale dal comportamento elastico-perfettamente plastico con il criterio di snervamento di Von Mises.

L'analisi della distribuzione delle tensioni nella piastra mostra chiaramente due zone con comportamenti differenti oltre il limite elastico. Infatti, il flusso di plasticizzazione, che ha origine presso il nocciolo rigido, si diffonde verso il raggio esterno. In questo modo vi è una zona interamente tensionata al di sotto del limite elastico (zona-2 in Fig.1a) e una seconda dove parte del materiale ha raggiunto la condizione di snervamento (zona-1 in Fig. 1a).

A causa della distribuzione del materiale plasticizzato, la sezione della zona-1 può essere assunta geometricamente divisa in due ulteriori zone (A e B), come mostrato in Fig. 1a.

La variabile principale nel problema è rappresentata dalla modalità con la quale il flusso di plasticizzazione si evolve al crescere del carico applicato, fino a giungere al collasso della piastra. Fino ad un generico raggio di confine tra le due zone, all'interno della zona-1 lo spessore del materiale elasticizzato cresce in direzione radiale al crescere del carico. Questa relazione tra lo spessore ed il raggio viene qui assunta lineare. Al contrario, la valutazione dell'evoluzione del raggio di confine tra le due zone (r_e), al variare del carico applicato, risulta più complessa.

L'approssimazione di un andamento lineare tra le zone A e B (zona-1 in Fig.1a) è giustificata dalla valutazione della distribuzione delle tensioni lungo la sezione trasversale della piastra reale oltre il limite elastico, effettuata utilizzando analisi FE.

La teoria delle piastre flessibili in regime di piccoli spostamenti può essere utilizzata per rappresentare la zona esterna che risulta sollecitata al di sotto del limite elasti-

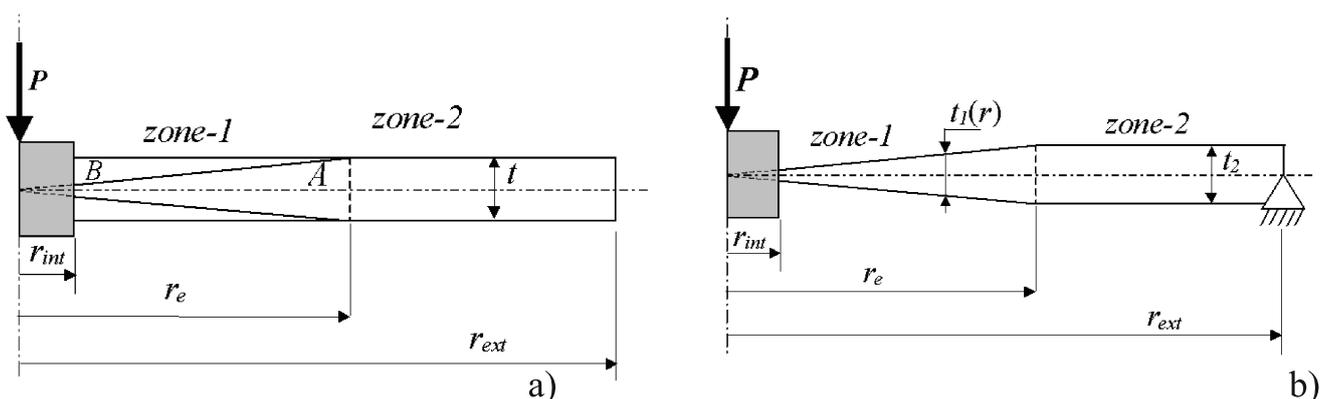


Figura 1: a) Distribuzione delle tensioni lungo la sezione della piastra; b) Sezione della piastra equivalente.

co. Nella zona-1 è chiaramente possibile distinguere due differenti comportamenti. Da una parte c'è la zona A (come indicato in Fig. 1a), dove il materiale è ancora sollecitato sotto al limite elastico; dall'altra la zona B dove la deformazione risulta plastica. Lungo la linea di divisione tra le due zone, la tensione equivalente deve essere pari a quella di snervamento. Il comportamento della zona A può essere descritto mediante l'approccio di Conway [14] per una piastra a spessore linearmente variabile. La zona B risulta ben più complessa da analizzare analiticamente.

Poiché l'interesse è focalizzato sulla rigidità della piastra, e la zona plasticizzata non offre resistenza allo spostamento, trova accoglimento la definizione di un nuovo modello equivalente, mostrato in Fig. 1b. In esso la zona elasticizzata della piastra (zona B) non viene rappresentata a causa del suo pressoché nullo apporto in termini di rigidità. Infatti, utilizzando un materiale dal comportamento elastico-perfettamente plastico, le equazioni di congruenza, tra i momenti risultanti e le curvature della piastra, sono soddisfatte della sola zona A (oltre naturalmente alla zona-2). In questo modo, si ottiene una piastra equivalente interamente definita sotto l'ipotesi di elasticità, che garantisce una buona valutazione della rigidità della piastra sollecitata oltre il limite di snervamento.

La propagazione del flusso plastico viene descritta dalla variazione del raggio equivalente r_e , che divide le due parti della piastra.

Il modello equivalente così definito utilizza esclusivamente equazioni elastiche, ma è in grado di definire il comportamento plastico di una piastra circolare reale in termini di spostamenti al variare del raggio equivalente r_e . Come precedentemente spiegato, questo non rappresenta il reale raggio di plasticizzazione a causa dell'approssimazione introdotta, assumendo lineare la frontiera tra le zone A e B. Detto ciò, per generare la medesima quantità di materiale resistente alla sollecitazione, il modello equivalente deve compensare la differente distribuzione di materiale lungo il raggio imponendo un raggio equivalente differente da quello di plasticizzazione. Inoltre, il modello di Conway implica un'ulteriore approssimazione rispetto al modello reale, dovuta all'ipotesi di spessore non nullo al raggio interno. In realtà questa teoria necessita di un valore nullo dello spessore in corrispondenza dell'asse della piastra, così da generare uno spessore al raggio interno dipendente sia dallo spessore costante della zona-2 che dal valore del raggio equivalente. Quest'aspetto, in aggiunta alla non linearità dell'andamento della frontiera nel caso reale, determina una distribuzione differente dei momenti lungo il raggio

nella piastra equivalente rispetto a quella reale. In entrambe i casi tuttavia si hanno i medesimi valori di spostamento, provando così la validità dell'approccio presentato in questo lavoro, dove l'interesse è focalizzato sulla rigidità della piastra.

La piastra equivalente (Fig. 1b) deve soddisfare le condizioni di vincolo e congruenza. Al raggio interno, il disco rigido è vincolato così da rendere nulla la rotazione. Al bordo esterno, la piastra è semplicemente appoggiata da cui derivano due condizioni, ovvero l'annullamento dello spostamento verticale e del momento radiale. In fine, la continuità dei momenti e degli spostamenti al raggio equivalente r_e deve essere garantita.

Relazione tra il raggio equivalente ed il carico applicato

La variabilità del raggio equivalente comporta l'implementazione di una relazione che legghi il carico applicato con esso. Per questo, è stato sviluppato un modello FE utilizzato per simulare il comportamento della piastra equivalente (Fig. 1b) implementando un materiale elastico lineare. Conseguentemente, è stato messo a punto un modello della piastra di riferimento (Fig. 1a) caricato oltre il limite elastico. Fissando il carico ortogonale applicato e ottenendo lo spostamento del disco rigido della piastra di riferimento, il raggio equivalente è stato calibrato per ottenere lo stesso spostamento. Confrontando le due configurazioni all'aumentare del carico applicato, è possibile valutare la propagazione del raggio equivalente, al variare dei singoli parametri geometrici della piastra individualmente (Fig. 2). In Fig. 2 ci si trova in regime di grandi spostamenti, P/P_{fp} è il carico adimensionalizzato, P_{fp} è il carico per il quale la fibra estrema al raggio interno snerva, t è lo spessore della piastra reale, $\beta = r_{int}/r_{ext}$ è il raggio adimensionale del nocciolo rigido e $\rho_e = r_e/r_{ext}$ la forma adimensionale del raggio equivalente.

Utilizzando queste curve derivanti dall'interpolazione dei punti ottenuti, è possibile definire un'equazione parametrica che colga la variazione del raggio equivalente al variare del carico applicato e di tutti i parametri geometrici caratteristici della piastra reale.

L'equazione parametrica ottenuta è una funzione di quinto grado del carico adimensionalizzato $p = P/P_{fp}$, dove P_{fp} è il carico di prima plasticizzazione. I coefficienti della potenze nell'equazione sono a loro volta funzioni dei parametri geometrici. Per ottenere la funzione finale, si necessita di definire una configurazione geometrica di riferimento.

La relazione che permette di calcolare il raggio equivalente ρ_e in termini del carico adimensionale p , in regime di grandi spostamenti, risulta esprimibile come

$$\rho_e = \sum_{i=0}^5 (C_i r_{ext}^{-3} + D_i r_{ext}^{-2} + E_i r_{ext}^{-1} + F_i t^2 + G_i t + H_i \beta + I_i) p^i \quad (1)$$

In questo caso, tutti i parametri geometrici hanno un effetto importante sull'evoluzione del raggio equivalente. Tab. 1 mostra i valori numerici per i coefficienti numerici dell' Eq. (1).

La procedura analitica può quindi ora essere estesa al caso di grandi spostamenti, utilizzando l' Eq. (1) e risolvendo il modello equivalente della piastra con spessore variabile (Fig.1b). In questo modo i due contributi che influenzano la zona prossima al punto saldato (grandi spostamenti e deformazioni plastiche) e la formulazione dell'elemento punto di saldatura possono essere combinati utilizzando una soluzione analitica.

Modello equivalente per grandi spostamenti

Una volta rimosse le ipotesi di Kirchoff-Love, il contributo membranale deve essere aggiunto alle tensioni derivanti dalla flessione. Gli spostamenti, non più trascurabili rispetto allo spessore della piastra, devono rimanere comunque dello stesso ordine di grandezza delle altre dimensioni della piastra. Per la trattazione analitica si fa riferimento a [15].

Timoshenko [15] propose una soluzione per la semplice piastra circolare, utilizzando un metodo che si basa sull'energia di deformazione. Questo approccio viene utilizzato qui come punto di partenza per valutare il mo-

dello equivalente della piastra con l'inclusione rigida centrale e spessore variabile (Fig. 1b).

Il lavoro effettuato dalle forze interne per una deformazione infinitesima δ_{ϵ_r} e δ_{ϵ_t} è dato dalla (2), dove $i=1$, $a=r_{int}$ e $b=r_e$ per la zona-1 e $i=2$, $a=r_e$ e $b=r_{ext}$ per la zona-2.

Il lavoro fornito dai momenti flessionali radiali e circonferenziali è per una variazione infinitesimali delle curvatures principali:

$$\delta V_B = 2\pi \int_a^b \left[M_{r_i} \delta \left(\frac{d^2 w_i}{dr^2} \right) + M_{t_i} \delta \left(\frac{1}{r} \frac{dw_i}{dr} \right) \right] r dr \quad (3)$$

mentre le forze esterne generano

$$\delta V_C = 2\pi \int_a^b \frac{d}{dr} (r \psi_i) \delta w_i r dr \quad (4)$$

dove Ψ_i è una funzione del carico che in questo caso vale:

$$\psi_1 = \psi_2 = \psi = \frac{P}{2\pi r} \quad (5)$$

La condizione che deve essere applicata all'intero modello:

$$\delta V_A = -2\pi \int_a^b (N_{r_i} \delta \epsilon_{r_i} + N_{t_i} \delta \epsilon_{t_i}) r dr = -2\pi \int_a^b \left\{ N_{r_i} \delta \left[\frac{du_i}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw_i}{dr} \right)^2 \right] + N_{t_i} \delta \left(\frac{u_i}{r} \right) \right\} r dr \quad (2)$$

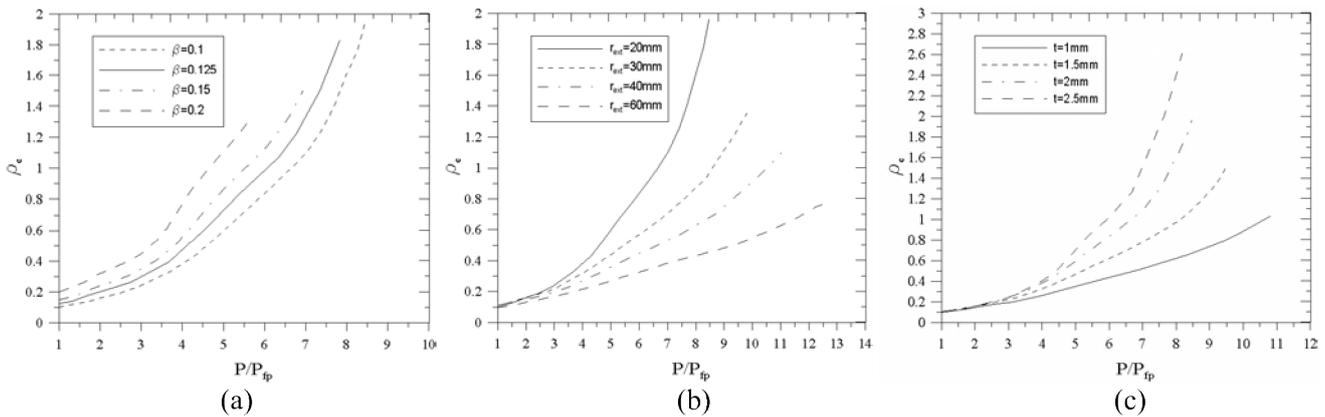


Figura 2: a) Diagramma del raggio equivalente adimensionalizzato al variare del carico adimensionalizzato per differenti valori di β ; $t=2\text{mm}$; $r_{ext}=20\text{mm}$; b) Diagramma del raggio equivalente adimensionalizzato al variare del carico adimensionalizzato per differenti valori di r_{ext} ; $t=2\text{mm}$; $\beta=0.1$; c) Diagramma del raggio equivalente adimensionalizzato al variare del carico adimensionalizzato per differenti valori di t ; $\beta=0.1$; $r_{ext}=20\text{mm}$;

i	C _i	D _i	E _i	F _i	G _i	H _i	I _i
0	-5597.8906	178.29649	-1.40685	0.14533	-0.66118	-4.54338	1.32847
1	13747.5595	-637.12536	10.52898	-0.24596	1.18396	10.67878	-2.57876
2	-9901.0846	477.92286	-7.11555	0.12628	-0.67821	-7.35874	1.65871
3	3133.39059	-164.72301	2.82262	-0.02790	0.17279	2.36578	-0.49249
4	-443.71136	25.30827	-0.47818	0.00244	-0.01868	-0.33699	0.06471
5	22.90092	-1.38297	0.02788	-0.00005	0.00068	0.01764	-0.00313

Tabella1: Valori numerici dei coefficienti dell' Eq. (1).

$$\delta(V_A + V_B + V_C) = 0 \quad (6)$$

Per la risoluzione degli integrali si rimanda alla trattazione presente in [16].

Sostituendo $r_e = \rho_e R_{ext}$ con l'equazione parametrica (1), è possibile ottenere l'espressione dello spostamento massimo w_θ . In questo modo si ricava la variazione dello spostamento w_θ al crescere del carico applicato fino alla rottura della piastra, per qualunque configurazione geometrica della piastra reale.

I risultati analitici ottenuti utilizzando la procedura proposta sono confrontati con quelli derivanti da soluzioni FE della piastra reale. In Fig. 3, raffigurante alcune configurazioni geometriche a titolo di esempio, è evidente l'accuratezza dei risultati analitici ottenuti.

3 CONCLUSIONI

Il lavoro presenta una procedura analitica per la valutazione del comportamento elasto-plastico delle piastre circolari con un'inclusione rigida centrale. La soluzione in forma chiusa permette di descrivere lo spostamento del nocciolo rigido, nel caso in cui esso sia sottoposto ad un carico ortogonale, considerando i grandi spostamenti ed un materiale dal comportamento elastico-perfettamente plastico. L'obiettivo è quello di ottenere un modello attendibile della zona del punto di saldatura che possa essere utilizzato come base per lo sviluppo dell'elemento punto di saldatura nelle analisi FE di strutture multi punto quando plasticizzazione e grandi spostamenti sono largamente presenti.

La procedura è completamente generica come nessun'altra in letteratura tecnica. Essa porta a risultati che coincidono in maniera adeguata con quelli ottenuti mediante modelli FE della zona del punto saldato di riferi-

mento. Analizzando qualunque configurazione geometrica in grandi spostamenti sollecitando oltre al limite di snervamento, questa procedura non presenta nessuna delle limitazioni altrimenti frequenti in letteratura finora.

La procedura è stata applicata a numerosi esempi di piastre spesso utilizzate per l'analisi dei punti saldati. Gli esempi mostrano chiaramente l'accuratezza dei risultati ottenibili in termini di valutazione della rigidità della regione del punto saldato.

4 BIBLIOGRAFIA

- [1] S. D. Sheppard, *Advances in Fatigue Lifetime Predictive Techniques*, ASTM STP 1211. American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 2 (1983) 169-185.
- [2] D. -A. Wang, S. -H. Lin, J. Pan, *International Journal of Fatigue* 27 (2005a) 581-598.
- [3] S. Zhang, *International Journal of Fracture* 112 (2001) 247-274.
- [4] P. -C. Lin, D. -A. Wang, J. Pan, *International Journal of Solids and Structures* 44 (2007) 1013-1037.
- [5] A. Rupp, K. Storzel, V. Grubisic, *SAE Technical Paper No. 950711*, Society of Automotive Engineers, Warrendale, Pa (1995).
- [6] P. Salvini, E. Scardecchia, F. Vivio, *SAE Transaction, Journal of Materials and Manufacturing*, 106 (1997) 967-975.
- [7] P. Salvini, F. Vivio, V. Vullo, *International Journal of Fatigue*, 22 (2007) 645-656.
- [8] J. Chao, *Science and Technology of Welding and Joining* 8-2 (2003) 133-137.
- [9] B. Langrand, J. Fabis, A. Deudon, J.M. Mortier, *Mécanique & Industries* 4 (2003) 273-283.
- [10] Y. Xianga, Q. Wanga, Z. Fanb, H. Fangc, *Finite Ele-*

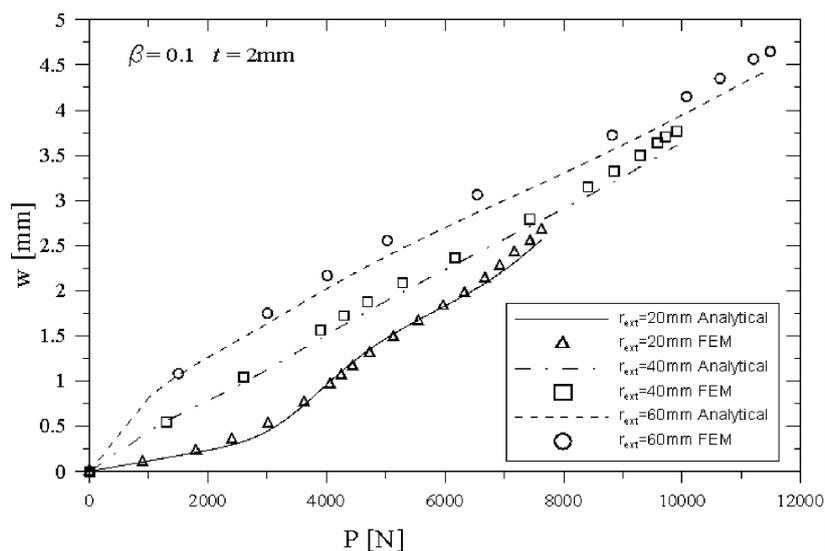


Figura 3: Spostamento del nocciolo rigido in funzione del carico applicato in regime di grandi spostamenti.

- ments in Analysis and Design 42 (2006) 846 – 855.
- [11] F. Vivio et al., International Journal of Computer Applications in Technology 15 (4–5) (2002) 218–229.
- [12] M. Palmonella, M.I. Friswell, J. E. Mottershead, A.W. Lees, Computers and Structures, 83 (2005) 648–661.
- [13] J.J. Skrzypek, R.B. Hetnarski, Plasticity and Creep: theory, examples, and problems, Begell house (1993).
- [14] H.D. Conway, Journal of Applied Mechanics, 15 (1948) 1-6.
- [15] S.P. Timoshenko, Theory of plates and shells, Part II. D. Van Nostrand Co., Princeton (NJ), 3th ed. (1956).
- [16] F. Vivio, P. Fanelli, A new analytical model for the elastic-plastic behaviour of spot welded joints. Inviato a International Journal of Solids and Structures, in pubblicazione.