



Processi di rottura duttile nei metalli: problematiche di identificazione dei parametri di un modello di CDM

Stefania De Meo

DiMSAT – Dept. of Mechanics, Structures and Environment, University of Cassino, via G. Di Biasio 43, 03043 Cassino (FR), Italy

e-mail: stefania.demeo@unicas.it

RIASSUNTO. Il processo di cedimento duttile su scala macroscopica può essere descritto con successo attraverso l'impiego di modelli fondati sul meccanismo microscopico di nucleazione e crescita di microvuoti. Una delle più importanti caratteristiche dei modelli micromeccanici, rispetto ad altri approcci globali alla frattura, è che il progressivo danneggiamento e la rottura sono descritti attraverso parametri caratteristici del materiale e non dipendono dalla geometria. In questo lavoro, è stato utilizzato l'approccio Continuum Damage Mechanics, come proposto da Bonora, per modellare i processi di danno duttile. In particolare, tramite l'utilizzo di opportuni provini, progettati in modo da ottenere la localizzazione degli sforzi con determinate condizioni di evoluzione della triassialità, viene mostrata la procedura e le relative problematiche per l'identificazione dei parametri del modello di danno utilizzato. Inoltre, tramite l'utilizzo di clip-gauge, è possibile monitorare la variazione della rigidità al progredire della deformazione effettuando degli scarichi parziali. In particolare, confermando quanto ipotizzato dal modello di danneggiamento applicato, si osserva una progressiva riduzione della rigidità (e quindi del modulo elastico) che è correlata al danneggiamento del materiale. Per completare l'identificazione dei parametri, vengono anche usati provini intagliati in quanto la presenza dell'intaglio, una volta plasticizzata l'intera sezione netta resistente, induce al centro del provino un valore di triassialità in teoria pressochè costante durante la deformazione plastica del provino.

I parametri trovati con questa procedura necessitano poi di un confronto con i dati sperimentali.

ABSTRACT. The process of ductile failure on a macroscopic scale can be described successfully through the use of models based on microscopic mechanisms of nucleation and growth of microvoids. One of the most important features of the micromechanical models, compared to other approaches to fracture, is that the progressive damage and rupture are described through characteristic material parameters whose are geometry independent. In this work, the approach based on Bonora's Continuum Damage Mechanics has been proposed. In particular, the procedure for the identification of damage parameters has been discussed and the critical aspects have been taken in evidence. The procedure proposed is based on the use of specific specimens in order to estimate the variation of material stiffness by load reversing at established deformations. In particular, the material stiffness reduction has been related to material damage as predicted by Bonora's model hypotheses. To complete the identification of parameters are also used notched specimens since the presence of a notch, once the stress reaches the yield stress in the entire section net resistant, leads, in the center of the specimen, a constant triaxiality value during the specimen plastic deformation.

The found parameters with this procedure have to compare with the experimental data.

PAROLE CHIAVE: Rottura duttile; modello di danno.

1 INTRODUZIONE

La possibilità di poter utilizzare la proprietà di un metallo di deformarsi plasticamente, al fine di aumentare la resistenza strutturale, è condizionata dall'effettiva comprensione del fenomeno di rottura duttile e dalla

capacità di simulazione e previsione. Nello studio del danneggiamento da deformazione plastica e della conseguente frattura duttile nei materiali metallici, un concetto largamente accettato è che l'accumulo del danno e la conseguente deformazione a rottura dipendono dal livello di triassialità TF del tensore delle tensioni,

dove per triassialità si intende il rapporto tra tensione idrostatica e di von Mises [1]. La maggior parte dei modelli proposti definisce una dipendenza univoca tra TF e danno accumulato, fenomeno largamente verificato in modo sperimentale nel campo delle alte triassialità.

Gli studi sul fenomeno di cedimento duttile realizzati inizialmente da Tipper [2], Rice e Tracey [3] e McClintock [4] hanno sottolineato il ruolo chiave svolto dai microvuoti che nucleano in corrispondenza delle inclusioni fragili come carburi e solfuri, e che evolvono governati dalla triassialità e dalla deformazione plastica equivalente. Si è tentato anche di affrontare il processo di rottura duttile attraverso l'impiego della meccanica del continuo riformulando l'espressione del legame costitutivo del materiale sulla base dei processi irreversibili, quali la formazione di microvuoti, che hanno luogo nella microstruttura. Osservazioni sperimentali (Le Roy [5]), hanno evidenziato un legame diretto tra il processo di deformazione plastica ed il deterioramento del materiale. Deterioramento che si manifesta attraverso una progressiva perdita di rigidità dovuta alla riduzione dell'area effettivamente resistente in seguito alla formazione di microvuoti, microcricche ed alla loro interazione.

Nelle ultime tre decadi sono stati proposti molti modelli di danno nel tentativo di dare una descrizione sempre più consistente del fenomeno di rottura duttile. Gurson [6] ha proposto un modello di danno basato sul progressivo *softening* dall'aumento della porosità nel materiale durante il processo di deformazione plastica. Needleman e Tvergaard [7] hanno modificato il modello di Gurson per tener conto dell'accelerazione che subisce il processo di deterioramento per effetto della coalescenza dei microvuoti. Lemaitre [8] e Lemaitre e Chaboche [9] hanno formulato un sistema di equazioni costitutive per un materiale danneggiato identificando diverse scale dimensionali per i processi di danno e per la struttura, tenendo conto dell'elevata localizzazione degli effetti associati al danneggiamento fino alla comparsa di una cricca macroscopica. Tai [10] e Chandrakanth e Pandey [11] hanno poi modificato il modello di Lemaitre per tenere conto della non linearità della legge di evoluzione del danno. Bonora [12] ha proposto un modello di danno non lineare che tiene conto del processo di nucleazione, crescita stazionaria e coalescenza dei microvuoti. Questo modello consente di prevedere una differente legge di evoluzione del danno a seconda del legame tra la matrice duttile e le inclusioni fragili presenti nella microstruttura. Un nuovo criterio di rottura è stato presentato recentemente da Bao e Wierzbicki [13, 14], utilizzando l'integrale del fattore di triassialità rispetto alla deformazione plastica equivalente come funzione che esprime il grado di danneggiamento di un materiale: tale integrale, esteso a tutto il range di deformazione plastica (tra zero

e la rottura), è supposto essere una costante del materiale, indipendente dalla geometria e dal carico (ovvero dalla storia di triassialità) a cui può essere sottoposto il generico componente realizzato con quel materiale.

Tutti i modelli, a prescindere dall'approccio seguito, richiedono la determinazione di alcuni parametri caratteristici del materiale in esame. In alcuni di questi modelli i parametri non hanno alcun significato fisico. E' questo il caso dei modelli di danno alla Gurson in cui la porosità è solo una variabile di *softening* ha alcuna correlazione con l'effettiva porosità del materiale. Al contrario, nei modelli alla Lemaitre (o di CDM), il danno ed i parametri ad esso associati sono direttamente collegati a proprietà fisiche del materiale in esame.

In ogni caso, prescindendo dallo specifico modello di danno considerato, l'identificazione sperimentale dei parametri di danno svolge un ruolo fondamentale e condiziona l'effettiva possibilità di impiego di questi modelli come strumento efficace di previsione. Nei modelli di danno alla Gurson, gli effetti del progressivo danneggiamento sono determinati in base all'accumulo di una variabile di porosità con il progredire della deformazione plastica. La legge di evoluzione della porosità è, di fatto, ipotizzata a priori. Gurson propose un legame lineare tra porosità e deformazione plastica equivalente. Successivamente Tvergaard e Needleman hanno proposto una legge a due pendenze in modo da includere l'effetto di accelerazione della crescita di porosità durante la fase di coalescenza dei microvuoti.

I parametri di danno, a seconda delle formulazioni utilizzate, possono arrivare fino ad otto. L'identificazione sperimentale di tanti parametri, di cui nessuno riconducibile ad un'effettiva proprietà meccanica del materiale, è complessa e lascia un ampio margine di incertezza sul grado di accuratezza dei singoli valori trovati. Normalmente, l'identificazione viene effettuata attraverso un processo iterativo in cui, per la geometria in esame, la scelta dei parametri viene aggiornata sulla base di un confronto tra la curva carico-spostamento calcolata e quella sperimentale.

Nei modelli alla Lemaitre, o di CDM, l'insieme delle equazioni costitutive per un materiale danneggiato viene ricavato sulla base di alcune ipotesi elementari: l'equivalenza delle deformazioni tra micro e macro scala; l'esistenza di un potenziale di dissipazione per la variabile di danno analogo a quello per la deformazione plastica; la possibilità di utilizzare lo stesso schema di equazioni costitutive proprio del materiale privo di danno sostituendo il tensore degli sforzi con quello effettivo. In questo tipo di modelli, la scelta del potenziale condiziona la legge cinetica di evoluzione della variabile di danno con l'aumentare della deformazione plastica. Tuttavia il danno, ovvero la progressiva perdita di rigi-

dezza del materiale, può essere misurato direttamente sul materiale. L'osservazione sperimentale diretta consente, quindi, la verifica delle ipotesi scelte a fondamento del modello adottato.

2 MODELLO DI DANNO CDM DI BONORA

E' noto che uno stato di sforzo triassiale modifica il processo di crescita dei microvuoti. Pertanto un modello di danno consistente dovrebbe essere in grado di prevedere l'evoluzione della variabile di danneggiamento in regime di bassa ed alta triassialità. Il modello proposto da Bonora (1997) è estremamente accurato nella previsione della rottura duttile per differenti valori di triassialità. In particolare, il modello si è dimostrato essere molto più accurato della soluzione proposta da Rice e Tracey e del modello di danno lineare di Lemaitre. Tale modello tiene conto di una legge di accumulo del danno non lineare indipendente dal tipo di materiale in esame, la cui legge evolutiva è riportata in (1), che, nel caso di tensione monoassiale,

$$f\left(\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}\right) = 1$$

diventa pari alla relazione (2). La stessa equazione può essere integrata nel caso di *proportional loading* dove il termine $f(\sigma_H/\sigma_{eq})$ si mantiene costante durante l'integrazione. Un caso di *proportional loading* è ad esempio quello dei provini cilindrici intagliati circonfe-

renzialmente in cui l'andamento della triassialità lungo la sezione minima è indipendente dal carico di trazione applicato ed è funzione solo del rapporto tra i diametri minimo e remoto e del raggio di intaglio [15].

In questo caso la legge di evoluzione del danno in presenza di un regime di sforzo multiassiale è data dalla relazione (3). Da specificare che ε_{th} è la deformazione uniassiale di soglia per la quale i processi di danno hanno inizio, ε_f è la deformazione uniassiale a rottura per cui la variabile di danno ha raggiunto il suo valore critico, D_{cr} è il valore del danno a rottura, D_0 è il valore iniziale del danno, α è l'esponente di danno che fornisce la forma della curva di danno. Infine, f è il fattore di triassialità calcolato come nella relazione (4), dove σ_H è la tensione idrostatica ed σ_{eq} è la tensione equivalente di Von Mises e ν è il coefficiente di Poisson. Questa formulazione è indipendente dal materiale e consente la descrizione di differenti leggi di evoluzione del danno con la deformazione plastica senza la necessità di cambiare la scelta del potenziale di dissipazione del danno. Inoltre gli effetti della progressiva riduzione della duttilità con la crescita della triassialità sono previsti in maniera accurata.

E' doveroso notare come per questa teoria non è importante la modalità con cui si forma il singolo vuoto oppure quanti di quelli già presenti crescono. Il danneggiamento D è una variabile indirettamente legata alla crescita dei microvuoti che però caratterizza rigorosamente dal punto di vista macroscopico le proprietà del materiale.

Abbiamo visto come cinque parametri individuano in

$$\dot{D} = -\dot{\lambda} \frac{\partial f_D}{\partial Y} \alpha \cdot \frac{(D_{cr} - D_0)^{\frac{1}{\alpha}}}{\ln(\varepsilon_f / \varepsilon_{th})} \cdot f\left(\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}\right) \cdot (D_{cr} - D)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \cdot \frac{\dot{p}}{p} \quad (1)$$

$$D = D_0 + (D_{cr} - D_0) \cdot \left\{ 1 - \left[1 - \frac{\ln(\varepsilon / \varepsilon_{th})}{\ln(\varepsilon_f / \varepsilon_{th})} \right]^\alpha \right\} \quad (2)$$

$$D = D_0 + (D_{cr} - D_0) \cdot \left\{ 1 - \left[1 - \frac{\ln(\varepsilon / \varepsilon_{th})}{\ln(\varepsilon_f / \varepsilon_{th})} \cdot f\left(\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}\right) \right]^\alpha \right\} \quad (3)$$

$$f\left(\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}\right) = \frac{2}{3} \cdot (1 + \nu) + 3 \cdot (1 - 2 \cdot \nu) \cdot \left(\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}\right)^2 \quad (4)$$

modo univoco la legge di evoluzione del danno e possono essere determinati attraverso delle prove di trazione uniassiale usando dei provini opportunamente sagomati, [16, 17]. Il danno iniziale D_0 si assume generalmente pari a zero per un materiale senza danno. La misura del danno può essere correlata alla progressiva riduzione del modulo di Young, E , secondo la:

$$D = 1 - \frac{E}{E_0} \quad (5)$$

dove E rappresenta il modulo attuale e E_0 quello del materiale senza danno.

3 PROBLEMATICHE NELLA IDENTIFICAZIONE DI ϵ_{th} E D_{cr}

La tecnica per la misura del danno duttile, basata sulla determinazione della progressiva riduzione di rigidità all'aumentare della deformazione plastica, è stata sviluppata più di due decenni fa [18]. Lemaitre e Dufailly [19] indicarono questa metodologia come una delle più appropriate e sensibili per la misura del danno duttile. Dopo di loro, altri autori hanno sviluppato procedure per misurare il danno duttile per mezzo della riduzione del

modulo di Young [20].

Concettualmente, la misura del danno duttile può essere sviluppata come segue. Poiché il danno duttile si sviluppa quando la deformazione plastica supera un certo valore di soglia, è possibile pianificare misure del modulo di Young a diversi livelli di deformazione plastica sotto condizioni di carico uniassiale.

La procedura consolidata prevedeva l'uso di una tecnica a strain gauges multipli, Bonora et al. [21], che richiedeva l'impiego di più strain gauges per ogni singola prova. Come primo passo, si è disegnato un provino che consentisse l'impiego di un clip gauge invece degli strain gauges ed in grado di fornire un'accuratezza di misura confrontabile con quella degli strain gauges. Il vantaggio di una prova svolta in questo modo è rappresentato dal fatto che non è necessario smontare il provino dalla macchina per azzerare il clip gauge quando raggiunge il suo limite di misura. Ad esempio, se tale limite fosse rappresentato dal 40 % di deformazione, con una tecnica a strain gauges multipli per raggiungere lo stesso livello di deformazione sarà necessario impiegare almeno 5 strain gauges: ciò significa smontare e rimontare per almeno 5 volte il provino, con tutte le conseguenze del caso per quanto riguarda gli eventuali errori di allineamento del provino stesso. Tuttavia, gli

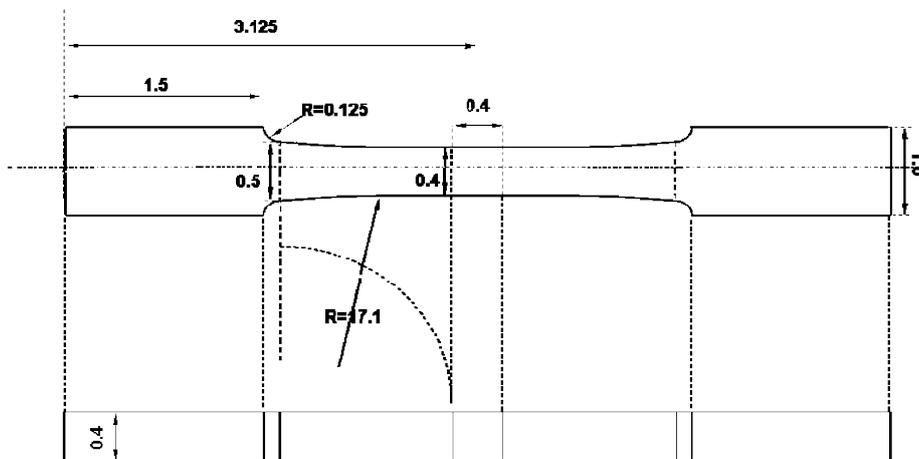


Figura 1: Disegno della geometria del provino HG(T) per misure di danno (le dimensioni sono in pollici).

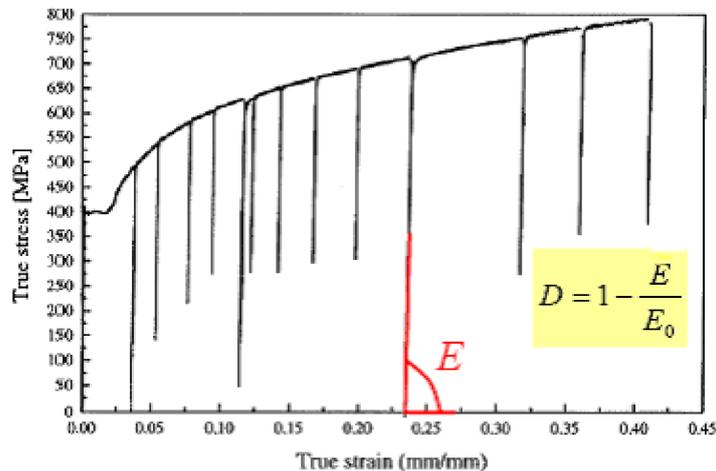


Figura 2: Misura della variazione del modulo elastico in una prova di trazione con successivi carichi e scarichi.

strain gauges hanno il vantaggio che, se scelti opportunamente, consentono di effettuare la misura in un'area molto più piccola di quella del clip gauge: ad esempio, lunghezza di misura del clip gauge = 12,5 mm contro una lunghezza di misura dello strain gauge di 6 mm. Quindi, poichè i fenomeni di iniziazione e coalescenza di microvuoti avvengono in un'area limitata del provino, la misura di deformazione effettuata con lo strain gauge dovrebbe essere più accurata di quella con il clip gauge. Si è però visto, da una prova preliminare montando sul provino entrambi gli strumenti di misura, che esiste una buona rispondenza tra le due modalità di misura.

Allo scopo, quindi, di impiegare il clip gauge, si sono realizzati dei provini secondo la geometria rappresentata in Fig. 1, in cui si ha un provino a clessidra avente però una parte centrale rettilinea di lunghezza pari alla misura base delle lame del clip gauge utilizzato. Questa geometria garantisce condizioni di carico uniassiale nella zona di misura e, inoltre, consente di conoscere a priori la zona dove si avrà il danneggiamento e, quindi, la rottura del provino.

Definita la metodologia di prova, si procede poi all'effettuazione di prove di trazione con scarichi e ricarichi intermedi al fine di poter valutare la variazione del modulo di Young E del materiale.

La misura del modulo di Young del materiale richiede una conosciuta sezione netta resistente su cui lo sforzo deve essere uniforme, e una conosciuta lunghezza base del clip gauge per misure di deformazione dove anche la deformazione deve essere uniforme. In teoria, la procedura richiederebbe che, per ogni livello di deformazione imposto, il provino venga smontato e il clip gauge azzerato e bilanciato. Dopodichè il provino viene ricaricato in campo elastico.

Abbiamo già detto che è possibile misurare l'evoluzione del danno attraverso la misura del decadimento del modulo di Young (Fig.2).

La risposta in termini di carico applicato P e allungamento Δl viene quindi convertita in sforzo-deformazione e il modulo di Young viene determinato considerando gli scarichi parziali e tagliando la parte iniziale e finale di tali scarichi, dove sono presenti delle piccole non linearità. Seguendo quanto proposto da Lemaitre e Dufrailly, si calcola il modulo E nel range:

$$0.15 \frac{P_{\max}}{A} < \frac{P}{A} < 0.85 \frac{P_{\max}}{A} \quad (6)$$

come pendenza della retta interpolante (Fig. 3).

Da specificare che P rappresenta il carico di trazione e A la sezione minima.

Questa metodologia presenta però un certo numero di svantaggi: se il clip gauge scivola mentre la deformazione cresce, l'intera catena di misura è perduta; la procedura è noiosa e soggetta ad errori di posizionamento che si accumulano durante i vari passi; è richiesto un continuo monitoraggio della riduzione dell'area resistente che diminuisce come risultato dell'effetto Poisson; in regime post necking le misure sono difficili da realizzarsi e anche la misura dell'area minima non è accurata.

In alternativa, quindi, possono essere usate procedure con carichi-scarichi continui. Applicando questa metodologia, il clip gauge non viene mai rimosso durante la prova e un parziale scarico viene effettuato a livelli di allungamento predefiniti. Il più comune errore sistematico associato a questa tecnica è la perdita della compensazione della corretta lunghezza di riferimento del clip gauge e dell'area della sezione nominale durante la prova. Alves e Jones [22] discussero circa la possibilità di

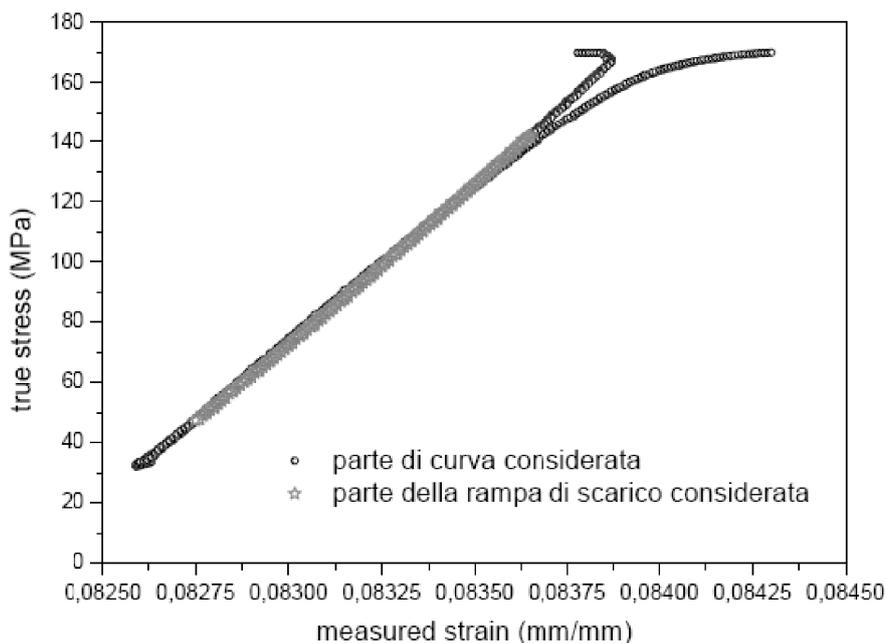


Figura 3: Parte di rampa di scarico considerata per il calcolo di E (indicata in grigio).

avere diverse espressioni per derivare il modulo di Young in caso di una geometria rettangolare piatta.

Allo scopo di evitare queste sorgenti di errore oppure di minimizzare i loro effetti sulle misure, è stata sviluppata una procedura basata sugli elementi finiti. Poiché il metodo agli elementi finiti restituisce la risposta strutturale basata sui dati del materiale forniti in input, esso può essere usato per determinare la risposta del provino in termini di rigidità vs deformazione plastica crescente, trascurando gli effetti del danno. Attraverso il confronto con le misure sperimentali, ottenute direttamente dal grafico carico applicato vs allungamento clip gauge, il contributo del danno può essere ottenuto per differenza.

In un'analisi lineare elastica in piccoli spostamenti, la rigidità calcolata dipende dalla geometria del provino e dal modulo elastico. Effettuando, invece, un'analisi elasto-plastica in grandi spostamenti e deformazioni finite, la rigidità calcolata dipende anche dallo snervamento del materiale, dalla curva di flusso plastico e dalla variazione di geometria del provino che avviene a causa della localizzazione della deformazione. A tale scopo viene suggerito di calibrare la curva di flusso plastico del materiale per ottenere la stessa risposta $P-\Delta l$ dell'esperimento.

Simulando gli scarichi multipli, è possibile ricavare la relazione tra la rigidità calcolata e il modulo di Young (che è conosciuto a priori in questo primo stadio) come funzione del massimo Δl imposto:

$$K^{FEM}(\Delta l) = \frac{E_0 A_0}{l_0} f(\Delta l) \quad (7)$$

La funzione di calibrazione $f(\Delta l)$ tiene conto degli effetti geometrici associati alla variazione della lunghezza di riferimento del clip gauge e di conseguenza la necessità di tenerne conto per il calcolo della rigidità del provino durante la fase di carico e scarico, e della sezione resistente. Se il provino è un provino non intagliato (piatto o circolare), per piccoli allungamenti $f(\Delta l)=1$, mentre diventa minore di 1 quando inizia a manifestarsi deformazione plastica. Fino alla comparsa del necking, per la conservazione dei volumi si può dimostrare che:

$$K^{FEM}(\Delta l) = \frac{E_0 A_0}{l_0} \frac{1}{(1 + \varepsilon_{eng})^2} \quad (8)$$

dove $\varepsilon_{eng} = \Delta l/l_0$. Dopo il necking, invece, sforzo e deformazione non sono più uniformi all'interno della lunghezza di riferimento del clip gauge e della sezione minima, e nessuna correlazione può essere ricavata tra la rigidità misurata sperimentalmente e il corrispondente modulo di Young. Anche qui gli elementi finiti possono essere usati a tale scopo assicurandoci che la geometria

del necking venga correttamente simulata al crescere dell'allungamento applicato.

Così la funzione di calibrazione può essere usata per convertire la rigidità sperimentale misurata nel modulo di Young:

$$\tilde{E} = K^{exp}(\Delta l) \frac{l_0}{A_0} \frac{1}{f(\Delta l)} \quad (9)$$

e il danno può essere calcolato come:

$$D = 1 - \frac{\tilde{E}}{E_0} \quad (10)$$

Ora è necessario definire la relazione per la deformazione vera da associare al danno appena calcolato. Fino al verificarsi del necking, la deformazione, lo sforzo ed eventualmente il danno sono uniformemente distribuiti nel volume di controllo all'interno della lunghezza di riferimento del clip gauge. Di conseguenza, si applica una deformazione vera espressa dalla relazione:

$$\varepsilon_{ln} = \ln \left(1 + \frac{\Delta l}{l_0} \right) \quad (11)$$

All'inizio del necking, la deformazione e il danno localizzano all'interno della lunghezza di riferimento del clip gauge. Celentano e Chaboche [23] proposero l'uso della soluzione di Bridgman visto che la localizzazione della deformazione concentra il danno nella sezione minima (ϕ_0 è il diametro iniziale e ϕ è il diametro nella sezione dove avviene il necking):

$$\varepsilon_{ln} = 2 \ln \left(\frac{\phi_0}{\phi} \right) \quad (12)$$

Questa definizione ci fornisce la deformazione plastica media attraverso la minima sezione, essa si usa solo per provini cilindrici ed è abbastanza accurata. Per materiali molto duttili, però, la soluzione di Bridgman può discostarsi molto dall'effettiva deformazione plastica che si ha al centro della sezione di necking.

Dalle prove di carico e scarico eseguite come appena descritto, è possibile ottenere il danno in funzione della deformazione plastica e determinare così la deformazione di soglia ε_{th} (Fig. 4).

Dallo stesso grafico si ricava anche il valore del danno critico D_{cr}

4 PROBLEMATICHE NELL'IDENTIFICAZIONE DI ε_f E α

Ora dobbiamo identificare la deformazione a rottura ε_f ,

cioè la deformazione vera di un metallo in corrispondenza della quale si ha la rottura (chiamata anche duttilità). Applicando la soluzione proposta da Bridgman, la duttilità è definita dalla seguente relazione:

$$\varepsilon_f = \ln\left(\frac{A_0}{A_f}\right) \quad (13)$$

dove A_0 è la dimensione della sezione iniziale ed A_f è la misura della sezione a rottura. Normalmente la duttilità viene misurata su provini cilindrici durante prove di trazione monoassiali. L'effetto di uno stato di sforzo triassiale sulla duttilità di un metallo è stato ampiamente studiato sperimentalmente da Hancock e Meckenzie [24] su acciai ad alta resistenza. Questo studio è stato effettuato utilizzando la tecnica proposta da Earl e Brown [25] attraverso l'impiego di provini cilindrici intagliati circonferenzialmente con differenti raggi di intaglio. Utilizzando la relazione di Bridgman per l'andamento della triassialità lungo la sezione minima, Hancock e Meckenzie hanno correlato la duttilità al li-

vello di triassialità individuando una relazione non lineare, inversamente proporzionale, tra questi due parametri. Un andamento di questo tipo era già stato anticipato da Rice e Tracy i quali avevano previsto per la duttilità una diminuzione esponenziale con l'aumentare della triassialità:

$$\varepsilon_f = C_0 \cdot \exp\left(-\frac{3}{2} \cdot \frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}\right) \quad (14)$$

dove C_0 è una costante del materiale. McClintock, studiando l'evoluzione di vuoti ellittici trovò una relazione analoga (15), dove l_0 e b_0 sono la dimensione iniziale del microvuoto e della cella, σ_a e σ_b sono le componenti di sforzo principali nella matrice secondo gli assi del vuoto, n è l'esponente di incrudimento.

Anche Lemaitre (1985), nel suo modello di danno lineare, ricavò una relazione che esprime la variazione della duttilità in presenza di uno stato di sforzo multiassiale (relazione 16).

Dividendo membro a membro la 16 e la 2, si ha:

$$\varepsilon_f = \frac{(1-n) \cdot \ln(l_0/b_0)}{\sinh\left[\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (1-n) \cdot \left(\frac{\sigma_a + \sigma_b}{\sigma_{eq}}\right)\right] + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{\sigma_b - \sigma_a}{\sigma_{eq}}\right)} \quad (15)$$

$$\left(\varepsilon_f - \varepsilon_{th}\right) = \frac{\left(\varepsilon_f - \varepsilon_{th}\right)}{\frac{2}{3} \cdot (1+\nu) + 3 \cdot (1-2 \cdot \nu) \cdot \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}\right)^2} \quad (16)$$

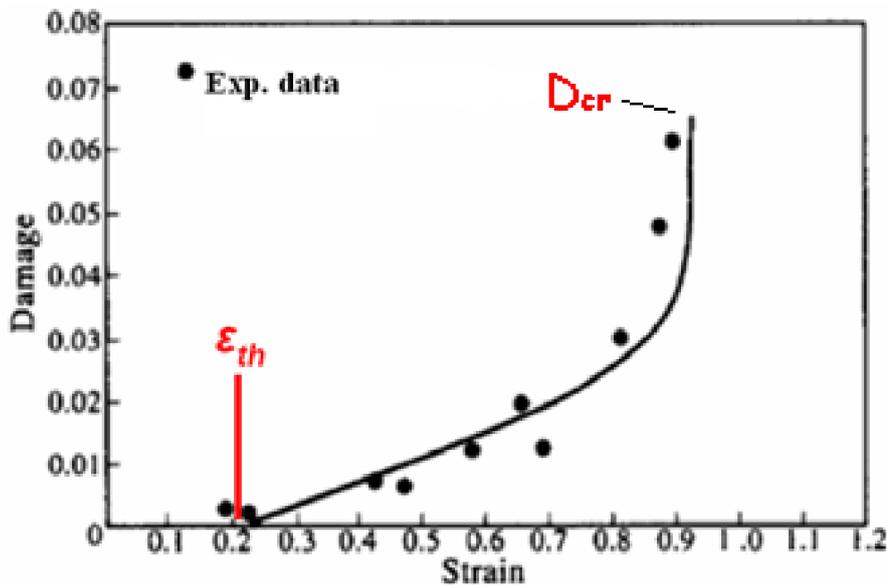


Figura 4: Valori del danno in funzione della deformazione plastica.

$$\ln\left(\frac{\epsilon_f}{\epsilon_{th}}\right) = f\left(\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}\right) \cdot \ln\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_{th}}\right) \quad (17)$$

e cioè:

$$\epsilon = \epsilon_{th} \cdot \left(\frac{\epsilon_f}{\epsilon_{th}}\right)^{1/f(\sigma_H/\sigma_{eq})} \quad (18)$$

che ci dà la deformazione equivalente a rottura. E' da questa relazione che possiamo ricavare il valore di ϵ_f che meglio approssima i dati sperimentali, una volta fissata ϵ_{th} (già prima determinata); eventualmente possiamo poi anche aggiustare ϵ_{th} (Fig. 5).

Per far questo quindi abbiamo bisogno di fare prove a triassialità costante per ottenere la deformazione equivalente a rottura per diversi valori di triassialità. A tale scopo vengono in genere usati provini intagliati; infatti, la presenza dell'intaglio, una volta plasticizzata l'intera sezione netta resistente, induce al centro del provino un valore di triassialità pressochè costante per ogni raggio di intaglio ed indipendente dal carico. Tuttavia, poiché TF non è esattamente costante durante la deformazione, viene assunto un valore medio [26].

Per quanto riguarda la determinazione dell'esponente di danno α , questo valore si ricava separando il danno D dalla deformazione ϵ nella 3 ed effettuando il logaritmo dell'espressione così ottenuta [27]:

$$\ln\left(\frac{D_c - D}{D_c - D_0}\right) = \alpha \cdot \ln\left[\ln\left(\frac{\epsilon_f}{\epsilon}\right)\right] - \alpha \cdot \ln\left[\ln\left(\frac{\epsilon_f}{\epsilon_{th}}\right)\right] \quad (19)$$

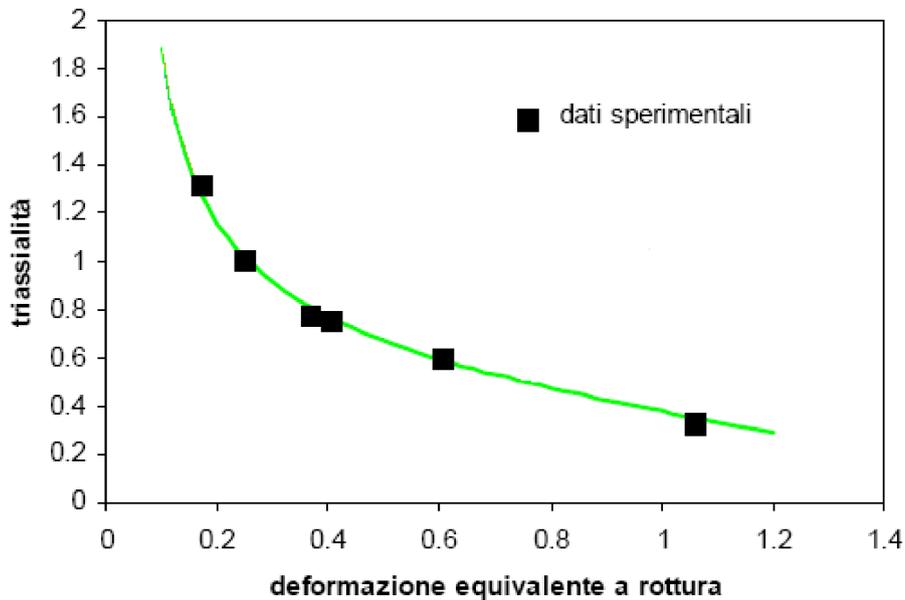


Figura 5: Esempio di curva che meglio approssima la deformazione equivalente a rottura per diversi valori di triassialità.

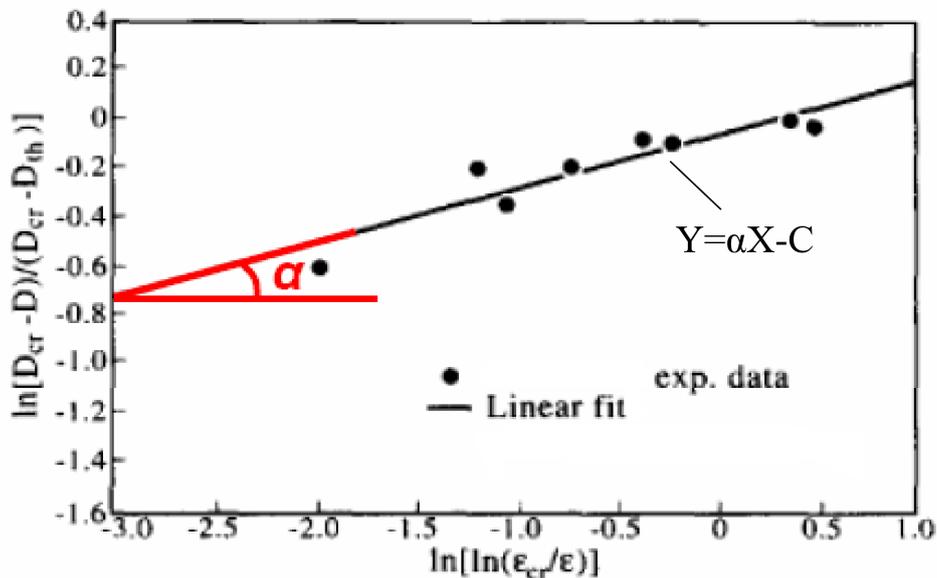


Figura 6: Individuazione dell'esponente di danno α .

Si ottengono così i dati di danno in un diagramma doppio logaritmico in cui l'esponente α viene determinato dalla pendenza della retta ottenuta effettuando il fit lineare dei punti sperimentali (Fig. 6). Quindi avremo:

$$Y = \ln\left(\frac{D_c - D}{D_c - D_0}\right)$$

$$X = \ln\left[\ln\left(\frac{\varepsilon_f}{\varepsilon}\right)\right] \quad (20)$$

$$C = \alpha \cdot \ln\left[\ln\left(\frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_{th}}\right)\right]$$

E' bene, comunque, verificare sempre il valore di α così trovato mediante la simulazione numerica agli elementi finiti.

5 CONCLUSIONI

Nel presente lavoro le tecniche sperimentali per la misura del danno duttile sono state riviste e discusse mettendo così in evidenza le numerose difficoltà che si incontrano.

Sono state usate due diverse tipologie di provini, un provino usato appositamente per le misure di danno e dei provini con intaglio circonferenziale. Le problematiche relative all'uso del primo riguardano soprattutto il fatto che, se la variazione della lunghezza di riferimento base e della sezione di riferimento non sono correttamente presi in considerazione, la variazione della rigidità dovuta alle modificazioni geometriche causate dalla deformazione plastica può essere erroneamente interpretata come danno. L'uso, invece, dei provini con intaglio circonferenziale si è reso necessario in quanto si necessitava di valori di triassialità costanti; tuttavia, poiché la triassialità nemmeno in questi provini è esattamente costante, si è assunto un valore medio.

Applicando tale procedura, è stata inoltre confermata la natura non lineare della relazione tra danno e deformazione plastica.

6 BIBLIOGRAFIA

[1] P.W. Bridgman, *Studies in Large Plastic Flow and Fracture*, McGraw-Hill, New York (1952).
 [2] C. F. Tipper, *Metallurgia*, 39 (1949) 133-137.
 [3] J. R. Rice, D. M. Tracey, *J. Mech. Phys. Solids*, 17 (1969) 201-217.

[4] F. A. McClintock, *J. Appl. Mech.*, 35 (1968) 363-371.
 [5] G. Le Roy, J. D. Embury, J. Edward, M. F. Ashby, *Acta Metallurgica*, 29 (1981) 1509-1522.
 [6] A. L. Gurson, *J. Engng. Mater. Technol.*, 99 (1977) 2-15.
 [7] A. Needleman, V. Tvergaard, *J. Mech. Phys. Solids*, 32 (1984) 461.
 [8] J. Lemaitre, *J. of Engn. Mat and Tech.*, 107 (1985) 83-89.
 [9] J. Lemaitre, J. M. Chaboche, *Mechanics of Solids Materials*, Cambridge Academic Press.
 [10] H. W. Tai, *Engn. Frac. Mec.*, 36-4 (1990) 853-880.
 [11] S. Chandrakanth, P.C. Pandey, *International Journal of Fracture*, 60 (1993) R73-R76.
 [12] N. Bonora, *Engineering Fracture Mechanics*, (58 (1997) 11-28.
 [13] Y. Bao, T. Wierzbicki, *Int. Journal of Mechanical Sciences*, 46 (2004) 81-98.
 [14] Y. Bao, T. Wierzbicki T, *ASME Journal of Engineering Materials and Technology*, 126 (2004) 314-324.
 [15] N. Bonora, D. Gentile, F. Iacoviello, *Proceedings of XII Italian Group of Fracture National Meeting*, Parma (1996).
 [16] N. Bonora, M. Cavallini, F. Iacoviello, M. Marchetti M., *Localized Damage III Computer-Aided Assessment and Control*, Eds M.H. Aliabadi, A. Carpinteri, S. Kalisky and D.J. Cartwright. *Computational Mechanics Publication*, Southampton, (1994) 657-665.
 [17] C. L. Chow, J. Wang, J., *Engineering Fracture Mechanics*, 27 (1987) 547-558.
 [18] J. Dufailly J., *Modélisation mécanique et identification de l'endommagement plastique des matériaux*, Ph.D. thesis, Université Pierre et Marie Curie (1980).
 [19] J. Lemaitre J. Dufailly, *Engineering Fracture Mechanics*, 28- 5/6 (1987) 643-661.
 [20] N. Bonora N., *Journal of Strain Analysis*, 34-6 (1999) 463-478.
 [21] N. Bonora, D. Gentile, A. Pirondi, G. Newaz, *Int. J. of Plasticity*, 21 (2005) 981-1007.
 [22] M. Alves, J. Yu, N. Jones, *Computer and Structures*, 76 (2000) 703-712.
 [23] D. J. Celentano, J.-L. Chaboche, *International Journal of Plasticity*, 23 (2007) 1739-1762.
 [24] J. W. Hancock, A. C. Meckenzie A, *J. Mech. Phys. Solids*, 24 (1976) 147-169.
 [25] J. C. Earl, D. K. Brown D.K., *Engn. Fract. Mech.*, 8 (1976) 599-611.
 [26] T. Wierzbicki, Y. Bao, Y. -W. Lee, Y. Bai, *Int. Journal Of Mech. Sciences* 47 (2005) 719-743.
 [27] N. Bonora, D. Gentile, A. Pirondi A., *Journal of Strain Analysis*, 39 (2004) 6.