



Soluzioni in forma chiusa per le distribuzioni di tensione indotte da intagli soggetti a torsione in condizioni elastiche ed elastoplastiche

Michele Zappalorto, Paolo Lazzarin

Dipartimento di Tecnica e Gestione dei Sistemi Industriali, Università di Padova, stradella San Nicola, 3-36100, Vicenza, Italia.

e-mail: zappalorto@gest.unipd.it, plazzarin@gest.unipd.it

RIASSUNTO. Il lavoro riporta delle soluzioni analitiche in forma chiusa per le distribuzioni di tensione generate da intagli circolariformi in componenti assialsimmetrici soggetti a torsione, in condizioni lineari elastiche ed elastoplastiche.

Il problema teorico in condizioni lineari elastiche è stato impostato e risolto utilizzando la teoria dei potenziali nel dominio complesso e una serie di opportuni sistemi di riferimento in coordinate curvilinee, evitando l'uso di mappature conformi. Le soluzioni proposte hanno un ampio range di applicabilità, in termini di dimensioni e forma dell'intaglio e di diametro dell'albero.

Il problema elastoplastico è stato invece risolto utilizzando la tecnica delle trasformazioni odografiche, al fine di rendere lineari le equazioni nonlineari fondamentali del problema.

Il contributo rappresenta la sintesi di una serie di lavori più ampi a cura degli stessi autori.

ABSTRACT. Closed form solutions for the elastic and elastic-plastic stress fields created by circumferential notches in an axisymmetric shaft under torsional loading are developed.

The linear elastic boundary value problem has been formulated by an approach using complex potential functions and some curvilinear coordinate system. The solutions obtained for the shear stresses have a wide range of applicability, both in terms of the size and shape of the notches and the diameter of the shafts.

Conversely the elastic-plastic problem has been solved in closed-form by using the hodograph transformation technique, which reduces the non-linear governing equations into a linear equation system.

The present paper is a synthesis of some contributions recently published by the same authors.

PAROLE CHIAVE: intagli; distribuzioni di tensione elastiche e elastoplastiche; NSIFs; densità di energia di deformazione (SED).

1 INTRODUZIONE

La conoscenza delle distribuzioni lineari elastiche delle tensioni nelle adiacenze di intagli è di grande importanza nella valutazione della resistenza a fatica ad alto numero di cicli di componenti strutturali. Il contributo più famoso allo studio analitico di alberi indeboliti da intagli raccordati circolariformi soggetti a torsione è dovuto a Neuber (1958), il quale determinò in modo sistematico il fattore teorico di concentrazione delle tensioni K_t distinguendo tra intagli profondi e poco profondi (*deep* e *shallow notches*). Le analisi di Neuber si basavano sull'utilizzo combinato di un sistema di coordinate curvilinee e di una funzione di tensione tridimensionale reale. In relazione alle distribuzioni di tensione in forma chiusa, di fondamentale importanza è il lavoro di Creager e Paris (1967), i quali riuscirono a esprimere i campi di

tensione nelle adiacenze di una *blunt crack* per i tre principali modi di sollecitazione, evidenziando analogie e differenze rispetto al caso della *sharp crack*. Degni di menzione sono anche alcuni recenti lavori di Seweryn e Molski (1996), Qian e Hasebe (1997) e Dunn *et al.* (1997). Questi ricercatori hanno fornito le distribuzioni di tensione generate da intagli a V non raccordati in presenza di sollecitazioni di taglio antiplanare. Per le tensioni è stata sempre utilizzata una formulazione a variabili separate. Uno degli obiettivi del presente lavoro è quello di fornire delle espressioni in forma chiusa per le distribuzioni di tensione e deformazione indotte da intagli circolariformi di forma semi-ellittica, parabolica o iperbolica in alberi assialsimmetrici soggetti a torsione. Il problema matematico è stato formalizzato utilizzando la teoria dei potenziali nel dominio complesso in combinazione con due opportuni sistemi di riferimento in coordinate curvilinee,

evitando così l'uso di mappature conformi. E' messo in evidenza analiticamente il legame esistente tra le distribuzioni delle tensioni e i principali parametri geometrici dell'intaglio (come raggio di raccordo e angolo di apertura).

Le soluzioni proposte hanno carattere generale e un ampio *range* di applicabilità, consentendo di trattare intagli di forma anche molto differente semplicemente variando il valore dei parametri geometrici significativi. Tali soluzioni si riconducono, in alcuni casi particolari, ad alcune soluzioni classiche già riportate nella letteratura precedente (cricca, *blunt crack*, intaglio a V non raccordato).

Quando il raggio di raccordo all'apice dell'intaglio è ridotto, il livello di tensione all'apice diviene molto alto, superando il limite di snervamento e inducendo quindi una zona plastica all'apice dell'intaglio di dimensioni paragonabili a quella della zona di processo che controlla il meccanismo di frattura. In tali circostanze, la conoscenza dell'influenza indotta dalla zona plastica localizzata sulle distribuzioni di tensione vicino a cricche o intagli è di fondamentale importanza nella valutazione dell'affidabilità in servizio dei componenti meccanici. Negli ultimi anni in letteratura è stata posta una grande attenzione alla determinazione dei campi di tensione e deformazione a modo I, II e III nelle adiacenze di cricche o intagli a V a spigolo vivo in presenza di plasticità. Di fondamentale importanza sono i lavori di Hutchinson (1968a, b) e Rice e Rosengren (1968) che fornirono una soluzione elastoplastica per i campi asintotici di tensione indotti da una cricca sollecitata a modo I. Nei decenni successivi, notevole attenzione è stata posta agli effetti di eventuali termini di ordine superiore sulle distribuzioni di tensione in presenza di sollecitazioni sia di modo I, sia di modo II (Sharma e Aravas, 1991); le analisi sono state inoltre estese agli intagli a spigolo vivo con angolo di apertura diverso da zero (Kuang e Xu, 1987) per i quali è stato discusso anche il caso di modo misto (I+II) in presenza di ampi angoli di apertura (Lazzarin et al., 2001). In questi lavori il materiale è modellato secondo la teoria J_2 e le funzioni angolari sono determinate numericamente (tipicamente con tecniche di *multi-shooting*). Il problema nonlineare antiplanare può invece essere risolto in forma chiusa con l'ausilio di mappature conformi che permettono di linearizzare le equazioni differenziali che governano il problema (Hult e McClintock, 1956, Rice, 1967).

Parallelamente, numerosi lavori in letteratura sono stati dedicati alla determinazione delle tensioni e delle deformazioni elastoplastiche all'apice di intagli raccordati. Tra questi sicuramente il più famoso è il lavoro di Neuber (1961), il quale analizzò un corpo prismatico con due intagli raccordati simmetrici in condizioni di taglio antiplanare e ottenne una soluzione secondo la quale la

media geometrica dei fattori di concentrazione delle tensioni e delle deformazioni è uguale al fattore teorico di concentrazione delle tensioni, per una qualsiasi legge costitutiva che lega le tensioni alle deformazioni. La 'regola di Neuber' è basata sull'ipotesi che il legame esistente tra la tensione reale all'apice dell'intaglio e la tensione nominale possa essere rappresentato con una particolare funzione definita da Neuber "*Leading function*". Come possibile alternativa alla regola di Neuber, Molski e Glinka (1981) formalizzarono il criterio dell'equivalenza della densità di energia di deformazione considerando componenti con intagli raccordati soggetti a trazione o flessione, in presenza di plasticità localizzata. Quel criterio è anche stato recente riformulato per intagli a spigolo vivo, considerando la costanza dell'energia di deformazione su un volume finito di materiale centrato sull'apice dell'intaglio (Lazzarin e Zambardi, 2002).

Tuttavia, in letteratura non esiste ancora una soluzione in forma chiusa per le distribuzioni di tensione nella zona plastica all'apice di intagli raccordati, né esiste un modello analitico che fornisca una transizione graduale tra meccanica della frattura e meccanica dell'intaglio elastoplastiche in funzione del raggio di raccordo. Il presente lavoro, focalizzato su questi temi, considera un intaglio parabolico soggetto a taglio antiplanare e un materiale elastico perfettamente plastico o elastico incrudente con legge di potenza. Più precisamente gli obiettivi del lavoro possono essere così riassunti:

Fornire un *frame* comune per l'analisi dei campi di tensione e deformazione indotti da cricche o intagli parabolici in condizioni di taglio antiplanare e un legame analitico tra SIF plastici ed SIF elastici (così come ottenuti da un'analisi lineare elastica);

Esprimere analiticamente la variazione della SED all'apice dell'intaglio o su un volume finito che circonda l'apice di una cricca rispetto al caso lineare elastico.

Il presente contributo rappresenta la sintesi di una serie di lavori più ampi a cura degli stessi autori (Lazzarin, Zappalorto e Yates, 2006, Zappalorto, Lazzarin e Yates, 2008, Zappalorto e Lazzarin, 2007, Lazzarin e Zappalorto, *under revision*).

2 INTAGLI SOGGETTI A TORSIONE IN REGIME LINEARE ELASTICO

Preliminari matematici

Si consideri un corpo assialsimmetrico indebolito da un intaglio di forma generica, costituito da materiale isotropo e omogeneo. Si consideri inoltre un sistema di riferimento cartesiano (x, y, z) con l'origine ad un'opportuna distanza dall'apice dell'intaglio (Fig. 1). Sia tale corpo sollecitato

da una tensione nominale di taglio τ , la quale genera solamente uno spostamento w in direzione z , normale al piano (x,y) dell'intaglio. In queste condizioni valgono per le tensioni, le deformazioni e lo spostamento w le relazioni (1 a,b,c).

In queste relazioni, la funzione $H(z)$ è una funzione olomorfa di forma arbitraria e variabile da caso a caso a seconda delle condizioni al contorno del problema.

Si noti come le tensioni e gli spostamenti non siano influenzati dall'origine del sistema di riferimento, e ciò rende le espressioni (1a-c) indipendenti da tale scelta. E' infine opportuno osservare come il simbolo "z" venga utilizzato in questo lavoro per indicare sia la variabile complessa $Z = x + iy$, sia la coordinata cartesiana

antiplanare mostrata in Fig. 1.

Intagli di forma semiellittica

Considerazioni di carattere generale

Il problema relativo ad intagli di forma ellittica può essere affrontato utilizzando il sistema di coordinate curvilinee generato dalla trasformazione (2) di (Fig. 2), dove c è una costante e $z = x + iy$ e $\zeta = \xi + i\eta$ sono le variabili complesse rispettivamente nel piano fisico e nel piano trasformato.

$$z = c \cosh \zeta \tag{2}$$

Differenti valori di ξ danno origine a una famiglia di ellissi tutte caratterizzate dagli stessi fuochi, posizionati a $x = \pm c$. Fissato $\xi = \xi_0$ e variando η , si ottiene una

$$\tau_{zx} - i\tau_{zy} = H'(z) ; \gamma_{zx} - i\gamma_{zy} = \frac{H'(z)}{G} ; w = \frac{\text{Re}\{H(z)\}}{G} \tag{1 a,b,c}$$

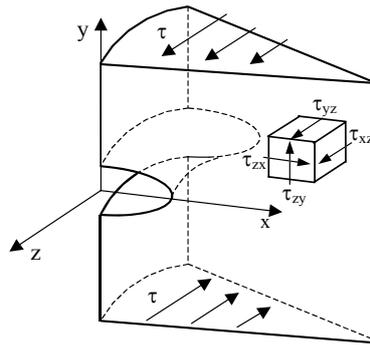


Figura 1: Componente assialsimmetrico indebolito da un intaglio circonferenziale e soggetto a taglio antiplanare.

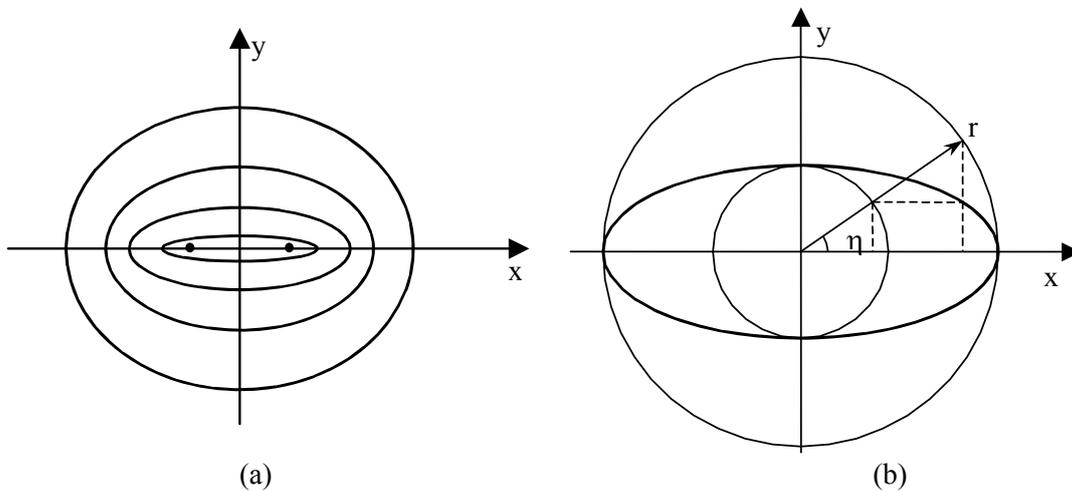


Figura 2: (a) famiglia di ellissi con gli stessi fuochi; (b) costruzione parametrica dell'ellisse.

particolare ellisse appartenente alla famiglia confocale, di semiassi maggiore e minore rispettivamente pari a $a = c \cosh \xi_0$ e $b = c \sinh \xi_0$.

L'equazione (2) può essere invertita per $x, y > 0$. Si ottiene la (3) e ciò permette, una volta note le coordinate fisiche di un punto nel piano (x, y) , di determinare i valori corrispondenti delle variabili trasformate.

Si consideri un intaglio circonferenziale semiellittico in un albero assialsimmetrico intagliato e soggetto a torsione. Il potenziale che utilizzeremo per ottenere la soluzione presenta la seguente forma (4):

$$H(z) = Ac \cosh \zeta + Bc \sinh \zeta \quad (4)$$

Quindi, poiché:

$$\frac{\partial z}{\partial \zeta} = c \sinh \zeta$$

è possibile scrivere la (5). L'espressione generale delle tensioni risulta quindi essere la (6).

Condizioni al contorno per un albero di sezione infinita

Se l'intaglio ha dimensioni infinite, le condizioni al contorno possono essere espresse nella seguente forma:

- se $|z| \rightarrow \infty$, $\tau_{zy} = \tau$ e $\tau_{zx} = 0$, dove τ è la tensione di taglio nominale;

- sul bordo dell'intaglio ($\xi = \xi_0$), $\tau_{z\xi} = 0$.

- quando ($\xi = \xi_0$) e ($\eta = \frac{\pi}{2}$) allora $\tau_{zy} = \tau_{z\xi}$;

- quando $\eta = \frac{\pi}{2}$, $\tau_{zx} = 0$.

Sostituendo le condizioni al contorno nelle equazioni (6) si ottengono i coefficienti A_i e B_i e le tensioni risultano quindi date dal sistema (7).

$$\xi = \ln \sqrt{\left(x + A \cos \frac{\beta}{2}\right)^2 + \left(y + A \sin \frac{\beta}{2}\right)^2} - \ln c, \eta = \arcsin\left(\frac{y}{c \sinh \xi}\right) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} H'(z) &= \frac{\partial H(z)}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial z} = (A_1 + iA_2) + (B_1 + iB_2) \coth \zeta \\ &= \left(A_1 + B_1 \frac{\sinh 2\xi}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta} + B_2 \frac{\sin 2\eta}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta} \right) + \\ &+ i \left(A_2 + B_2 \frac{\sinh 2\xi}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta} - B_1 \frac{\sin 2\eta}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= A_1 + B_1 \frac{\sinh 2\xi}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta} + B_2 \frac{\sin 2\eta}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta} \\ \tau_{zy} &= -A_2 - B_2 \frac{\sinh 2\xi}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta} + B_1 \frac{\sin 2\eta}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \tau_{zy} = \frac{\tau}{a-b} \left(a \frac{\sinh 2\xi}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta} - b \right) \\ \tau_{zx} = -\frac{\tau a}{a-b} \frac{\sin 2\eta}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta} \end{cases} \quad (7)$$

$$\tau_{zy} \Big|_{\substack{\eta=0 \\ \xi=\xi_0}} = \frac{\tau}{a-b} \left(a \frac{\sinh 2\xi_0}{\cosh 2\xi_0 - 1} - b \right) = \tau \left(1 + \frac{a}{b} \right) \quad (8)$$

All'apice dell'intaglio le equazioni (7) danno la (8) e quindi il fattore teorico di concentrazione delle tensioni risulta $K_t = 1 + a/b$, in accordo con Neuber (1958).

La soluzione ottenuta, che risulta matematicamente esatta solo nel caso di un albero di diametro infinito, può tuttavia essere applicata anche ad alberi di dimensione finita, almeno fino a quando il rapporto a/R è inferiore a 0.05, con errori nella determinazione della tensione massima inferiori al 10%.

Per fare ciò è però necessario tenere in considerazione l'andamento decrescente lineare della tensione nominale nella sezione, semplicemente con l'aggiunta alle espressioni delle tensioni di un fattore correttivo (9).

Le Fig. 3 e 4 mostrano un confronto tra i risultati analitici e i risultati di alcune analisi agli elementi finiti condotte su alberi in cui la dimensione dell'intaglio è molto inferiore rispetto al raggio netto dell'albero. L'accordo appare molto soddisfacente.

Cricca circonferenziale su albero infinito

La cricca circonferenziale può essere trattata da un punto

di vista matematico come un intaglio semiellittico in cui il semiasse minore b tende a zero. Utilizzando quindi i risultati ottenuti nella precedente sessione per intagli semiellittici, è possibile scrivere la (10), dove a è la lunghezza della cricca. Si noti come l'espressione posta alla sinistra nell'equazione (10) coincida esattamente con la funzione di tensione di Westergaard per il modo III.

Dall'equazione (10) è quindi agevole determinare dapprima l'espressione del fattore di intensificazione delle tensioni (11) e quindi l'espressione delle tensioni in un intorno dell'apice della cricca (12).

Intaglio semicircolare su albero infinito

In linea di principio il sistema di coordinate ellittiche utilizzato nella soluzione precedente non è più valido nel caso di intaglio circolare, quando $a=b$ ($c=0$), che comporta una discontinuità matematica nella definizione del sistema in questione. Nonostante ciò si può notare che la soluzione precedente continua a essere valida anche quando il rapporto a/b è molto vicino a 1, permettendo quindi di trattare l'intaglio semicircolare come il limite per

$$\begin{Bmatrix} \tau_{zy} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\tau}{a-b} \left(a \frac{\sinh 2\xi}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta} - b \right) \\ -\tau a \left(\frac{\sin 2\eta}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta} \right) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 - \frac{c \cos \eta (\cosh \xi - \cosh \xi_0)}{R + (a - c \cos \eta \cosh \xi_0)} \\ \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$$\tau \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} = \tau_{zy} + i\tau_{zx} \quad (10)$$

$$K_{III} = \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{2\pi(x-a)} \tau_{zy} \Big|_{y=0} = \tau \sqrt{\pi a} \quad (11)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{Bmatrix} = \frac{\tau \sqrt{a}}{\sqrt{2r}} \begin{Bmatrix} -\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \end{Bmatrix} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} -\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \end{Bmatrix} \quad (12)$$

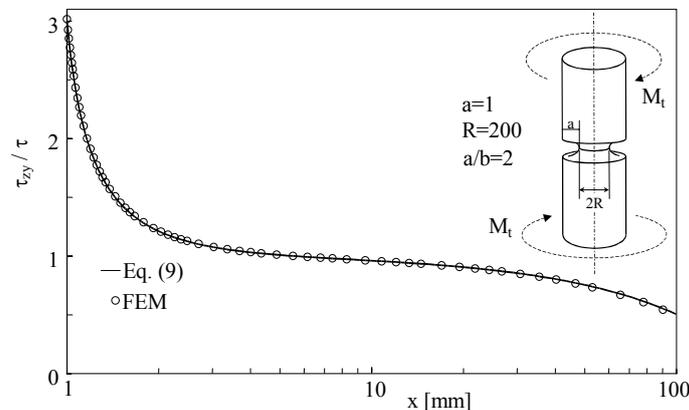


Figura 3: Componente di tensione τ_{zy} lungo la bisettrice geometrica dell'intaglio. Le tensioni sono normalizzate rispetto alla tensione nominale.

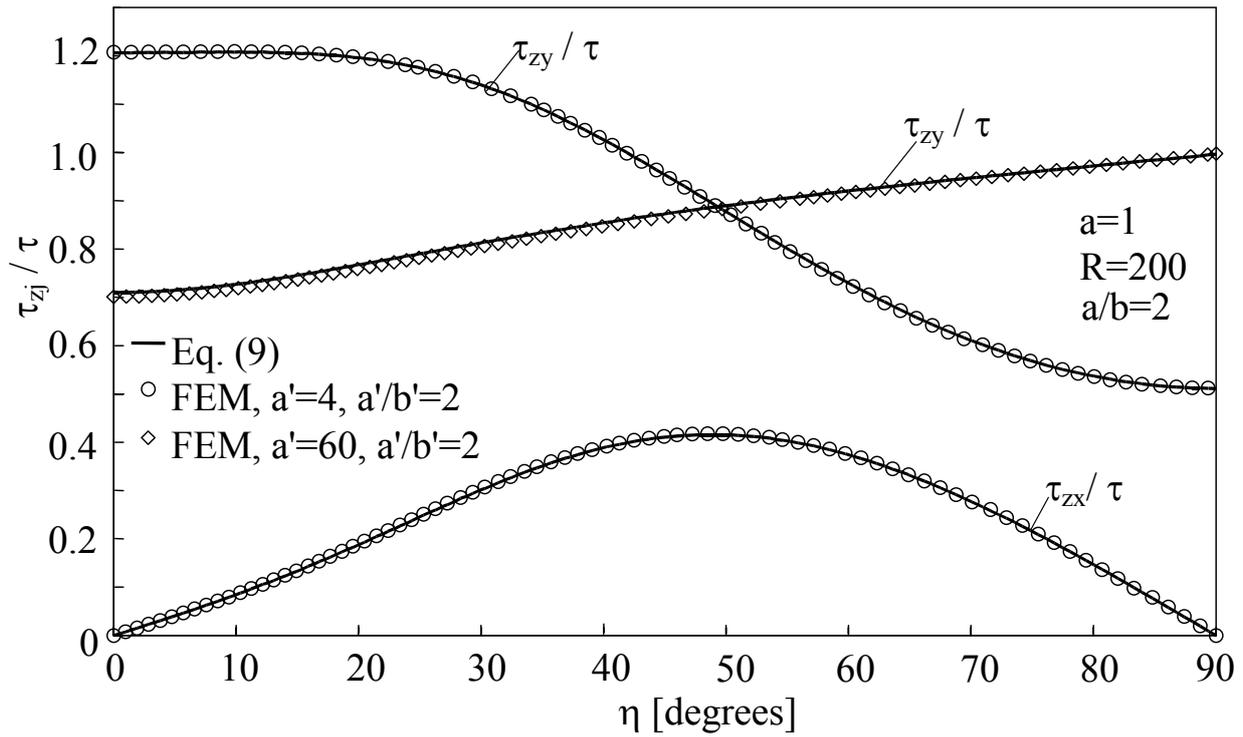


Figura 4: Componenti di tensione lungo due percorsi ellittici centrati nell'origine del sistema di riferimento (x,y); $a'=4$ mm e $a'=60$ mm, mentre $a'/b'=2$. Le tensioni sono normalizzate rispetto alla tensione nominale.

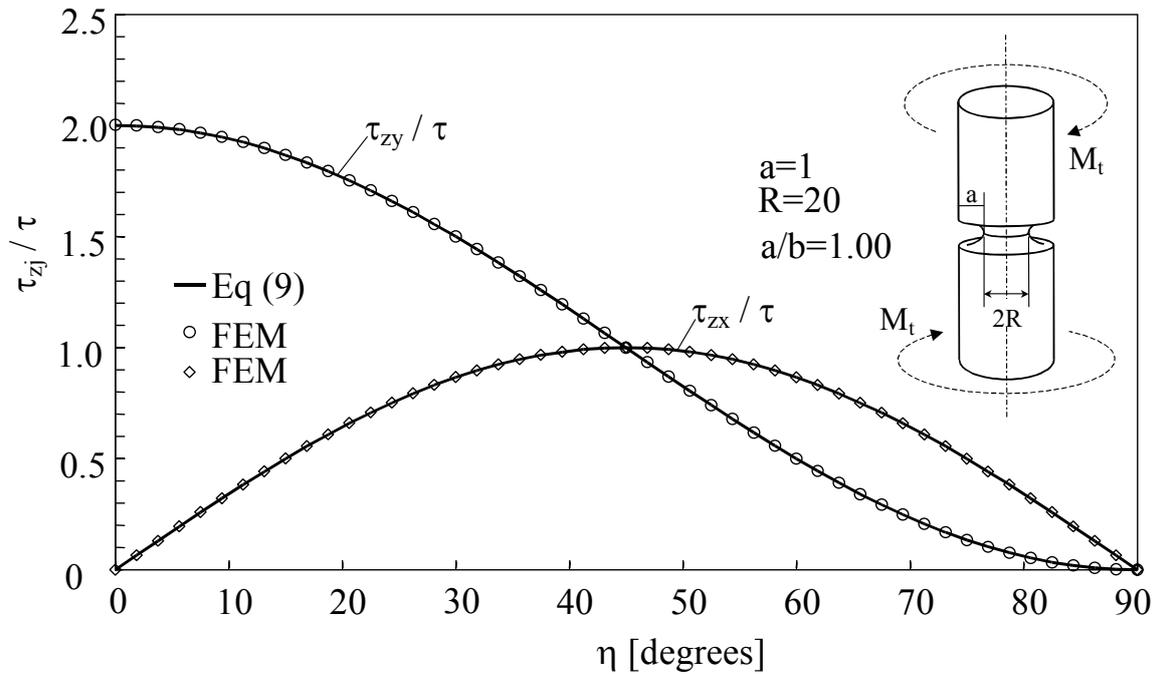


Figura 5: Componenti di tensione τ_{zy} e τ_{zx} sul bordo dell'intaglio nel caso di un intaglio che può essere considerato semicircolare ($a/b=1.001$). Le tensioni sono normalizzate rispetto alla tensione nominale.

$(a/b) \rightarrow 1$. Quest'idea è confermata da analisi agli elementi finiti condotte su alberi quasi infiniti ($a/R=0.005$) indeboliti da intagli semiellittici con $a/b=1.001$, come mostrato in Fig. 5.

Condizioni al contorno per un albero di sezione finita

Come prima approssimazione nel caso di alberi intagliati a diametro finito è possibile mantenere per il potenziale complesso la medesima forma, e modificare in modo opportuno solo le condizioni al contorno; infatti le condizioni poste nella precedente trattazione all'infinito

non risultano più valide. Il nuovo sistema di condizioni al contorno risulta quindi dato dalla (13) e dalla (14).

Sostituendo, come prima, tali condizioni all'interno delle espressioni generali delle tensioni, equazione 6, è possibile ottenere i valori dei coefficienti A_i e B_i e quindi le espressioni finali delle tensioni (15).

Particolarmente utile è la tensione τ_{zy} lungo la bisettrice dell'intaglio (16), che permette, tra l'altro, di determinare un'espressione approssimata del fattore teorico di concentrazione delle tensioni grazie a un'equazione di equilibrio alle rotazioni sulla sezione netta, mettendo in

$$-\tau_{zx}\Big|_{\eta=\frac{\pi}{2}} = A_1 + B_1 \frac{\sinh 2\xi}{\cosh 2\xi + 1} = 0 \quad (13)$$

$$-\tau_{zy}\Big|_{\substack{\xi=\xi_0 \\ \eta=\frac{\pi}{2}}} = -A_2 - B_2 \frac{\sinh 2\xi_0}{\cosh 2\xi_0 + 1} = -A_2 - B_2 \frac{b}{a} = 0 \quad (14 a)$$

$$-\tau_{zy}\Big|_{\substack{\xi=\xi_0 \\ \eta=0}} = -A_2 - B_2 \frac{\sinh 2\xi_0}{\cosh 2\xi_0 - 1} = -A_2 - B_2 \frac{a}{b} = \tau_{\max} \quad (14 b)$$

$$\begin{cases} \tau_{zy} = \frac{\tau}{a-b} \frac{K_{t,\text{gross}}}{1 + \frac{a}{b}} \left(a \frac{\sinh 2\xi}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta} - b \right) \left(1 - \frac{c \cos \eta (\cosh \xi - \cosh \xi_0)}{R + (a - c \cos \eta \cosh \xi_0)} \right) \\ \tau_{zx} = \frac{-\tau a}{a-b} \frac{K_{t,\text{gross}}}{1 + \frac{a}{b}} \frac{\sin 2\eta}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta} \left(1 - \frac{c \cos \eta (\cosh \xi - \cosh \xi_0)}{R + (a - c \cos \eta \cosh \xi_0)} \right) \end{cases} \quad (15)$$

$$\tau_{zy} = \frac{b \tau_{\max}}{a^2 - b^2} \left(\frac{ax}{\sqrt{x^2 - c^2}} - b \right) \cdot \left(1 - \frac{(x-a)}{R} \right) \quad (16)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \tau^* \frac{t^3}{R} dt d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^R \tau_{zy} t^2 dt d\theta, \quad (17)$$

$$K_{t,\text{net}} = \frac{c^2}{b} \cdot \frac{1}{C\left(\frac{a}{R}, \frac{a}{b}\right)}; \quad K_{t,\text{gross}} = K_{t,\text{net}} \cdot \left(\frac{R_g}{R}\right)^3 \quad (18)$$

$$\begin{aligned} C\left(\frac{a}{R}, \frac{a}{b}\right) &= \left\{ \frac{a}{2} \cdot \ln \left[\frac{\frac{b}{R} - \frac{a}{R}}{\sqrt{\left(1 + \frac{a}{R}\right)^2 - \left(\frac{c}{R}\right)^2} - \left(1 + \frac{a}{R}\right)} \right] \right\} \left[\left(\left(1 + \frac{a}{R}\right)^2 - \left(\frac{c}{R}\right)^2 \right) \left(18 \left(1 + \frac{a}{R}\right)^2 - \right. \right. \\ & 3 \left. \left(\left(1 + \frac{a}{R}\right)^2 - \left(\frac{c}{R}\right)^2 \right) \right) - 15 \left(1 + \frac{a}{R}\right)^4 \right] + \frac{ab}{2R} \cdot \left[13 \left(1 + \frac{a}{R}\right) \left(\left(1 + \frac{a}{R}\right)^2 - \left(\frac{c}{R}\right)^2 \right) - 15 \left(1 + \frac{a}{R}\right)^3 + \right. \\ & 3 \left. \left(\left(1 + \frac{a}{R}\right)^2 - \left(\frac{c}{R}\right)^2 \right) - 5 \left(1 + \frac{a}{R}\right)^2 - 2 \left(1 + \frac{a}{R}\right) - 2 \right] - \\ & \left. \frac{a}{2} \sqrt{\left(1 + \frac{a}{R}\right)^2 - \left(\frac{c}{R}\right)^2} \left[13 \left(1 + \frac{a}{R}\right) \left(\left(1 + \frac{a}{R}\right)^2 - \left(\frac{c}{R}\right)^2 \right) - 15 \left(1 + \frac{a}{R}\right)^3 \right] - b \right\} \quad (19) \end{aligned}$$

gioco il contributo fornito dalla tensione nominale, che varia da un valore massimo τ^* a zero, e la componente di taglio generata dall'intaglio, τ_{zy} .

Effettuato quindi il cambio di variabile $t = R + a - x$, è possibile imporre l'equilibrio come in (17) che fornisce la (18) data la (19).

Intagli di forma parabolica e iperbolica

Una prima classe di soluzioni

Consideriamo un sistema di coordinate iperboliche generate dalla seguente trasformazione (20) (Filon, 1900, Timoshenko and Goodier, 1970),

$$z = c \cosh \zeta \quad (20)$$

dove c è una costante e $z = x + iy$ e $\zeta = \xi + i\eta$ sono le variabili complesse nel piano fisico e nel piano trasformato.

Differenti valori di η danno origine a una famiglia di iperboli tutte caratterizzate dagli stessi fuochi, posizionati alla distanza $x = \pm c$. Fissato $\eta = \eta_0$ e variando ξ , si ottiene una particolare iperbole appartenente alla famiglia confocale, di costanti pari a $a = c \cos \eta_0$ e $b = c \sin \eta_0$ (vedi Fig. 6).

L'equazione (20) può essere invertita per $(x, y) > 0$. Si ottengono le (21) e (22).

$$\eta = \arctan \left(\frac{y + A \sin \frac{\beta}{2}}{x + A \cos \frac{\beta}{2}} \right) \quad (21)$$

$$\xi = \operatorname{arcsinh} \left(\frac{y}{c \sin \eta} \right) \quad (22)$$

e ciò permette, una volta note le coordinate fisiche di un punto nel piano (x, y) , di determinare i valori corrispondenti delle variabili trasformate.

Il problema di un intaglio iperbolico in un corpo infinito può essere affrontato osservando che la tensione nominale sulla sezione lorda deve essere nulla in modo tale da garantire una tensione nominale finita sulla sezione netta. Un potenziale che soddisfa automaticamente questa condizione è il seguente (23):

$$H(z) = (A_1 + iA_2)c\zeta \quad (23)$$

Poiché: $\frac{\partial z}{\partial \zeta} = c \sinh \zeta$, è possibile scrivere la (24).

L'espressione generale delle tensioni risulta quindi la (25).

Imponendo le seguenti condizioni al contorno:

$$\tau_{zx} \Big|_{\substack{\eta=\eta_0 \\ \xi=0}} = \frac{2A_2 \sin \eta_0}{1 - \cos 2\eta_0} = 0 \rightarrow A_2 = 0,$$

$$\tau_{\max} = \frac{cA_1}{\sqrt{c^2 - a^2}} \rightarrow A_1 = \tau^* \frac{K_{t,net}}{\sqrt{1 + \frac{a}{\rho}}}$$

$$H'(z) = \frac{\partial H(z)}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{(A_1 + iA_2)}{\sinh \zeta} = \left(\frac{2A_1 \cos \eta \sinh \xi + 2A_2 \sin \eta \cosh \xi}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta} \right) + i \left(\frac{2A_2 \cos \eta \sinh \xi - 2A_1 \sin \eta \cosh \xi}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta} \right) \quad (24)$$

$$\tau_{zx} = \frac{2A_1 \cos \eta \sinh \xi + 2A_2 \sin \eta \cosh \xi}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta}$$

$$\tau_{zy} = - \frac{2A_2 \cos \eta \sinh \xi - 2A_1 \sin \eta \cosh \xi}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta} \quad (25)$$

$$\tau_{zx} = \tau^* \frac{2K_{t,net}}{\sqrt{1 + \frac{a}{\rho}}} \frac{\cos \eta \sinh \xi}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta}$$

$$\tau_{zy} = \tau^* \frac{2K_{t,net}}{\sqrt{1 + \frac{a}{\rho}}} \frac{\sin \eta \cosh \xi}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta} \quad (26)$$

le distribuzioni di tensione assumono la forma (26).

La soluzione ottenuta, che risulta matematicamente esatta solo nel caso di un albero di diametro infinito, può tuttavia essere applicata anche ad alberi di dimensione finita; è però necessario tenere in considerazione l'andamento decrescente lineare della tensione nominale nella sezione, semplicemente con l'aggiunta alle espressioni delle tensioni di un fattore correttivo (27).

L'espressione del fattore teorico di concentrazione delle tensioni può, a questo punto, essere ottenuto con un'equazione di equilibrio sulla sezione netta (28) che fornisce la (29) in accordo con Neuber (1958).

Le Fig. 7 e 8 mostrano un confronto tra i risultati analitici e quelli di alcune analisi agli elementi finiti condotte su alberi in cui la dimensione dell'intaglio è molto superiore rispetto al raggio netto dell'albero (intaglio "deep"); l'accordo appare molto soddisfacente.

Una seconda classe di soluzioni

Consideriamo ora il sistema di coordinate curvilinee generato dalla trasformazione (30) (Neuber, 1958),

$$z = w^q \tag{30}$$

dove $z = x + iy$ e $w = u + iv$ sono le variabili complesse nel piano fisico e nel piano trasformato e q è un numero reale funzione dell'angolo di apertura 2α (31).

$$q = \frac{2\pi - 2\alpha}{\pi} = \frac{2\gamma}{\pi} \tag{31}$$

L'equazione (28) può essere riscritta nella forma (32).

Il sistema di coordinate curvilinee introdotto permette di descrivere intagli parabolici ($q=2$) o iperbolicici ($1 < q < 2$). La generica curva caratterizzata dal valore $u=u_0$ interseca l'asse delle ascisse al valore r_0 , che dipende oltre che dall'angolo di apertura, anche dal raggio di raccordo per mezzo dell'espressione $r_0 = \rho(q-1)/q$ (Fig. 9).

Il problema matematico può essere risolto utilizzando lo stesso potenziale adottato per la trasformazione precedente dalla (33).

Posta la seguente condizione al contorno:

$$\tau_{zx} \Big|_{\substack{u=u_0 \\ v=0}} = \frac{A_1}{qu_0^{q-1}} = 0 \rightarrow A_1 = 0$$

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= \tau^* \frac{K_{t,net}}{\sqrt{1 + \frac{a}{\rho}}} \cdot \frac{\cos^2 \eta \sinh 2\xi}{\cos \eta_0 \cosh \xi^* (\cosh 2\xi - \cos 2\eta)} \\ \tau_{zy} &= \tau^* \frac{K_{t,net}}{\sqrt{1 + \frac{a}{\rho}}} \cdot \frac{\sin 2\eta \cosh^2 \xi}{\cos \eta_0 \cosh \xi^* (\cosh 2\xi - \cos 2\eta)} \end{aligned} \tag{27}$$

$$\int_A \tau(x) x dA = \int_A \tau_{zy} x dA, \tag{28}$$

$$K_{t,net} = \frac{3}{4} \frac{\left(1 + \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1}\right)^2}{\left(1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho} + 1}\right)} \tag{29}$$

$$\begin{cases} u = r^{\frac{1}{q}} \cos \frac{\varphi}{q} \\ v = r^{\frac{1}{q}} \sin \frac{\varphi}{q} \end{cases}, \quad r = (u^2 + v^2)^{\frac{q}{2}} \tag{32a,b}$$

$$H'(z) = \frac{(A_1 + iA_2)}{q(u + iv)^{q-1}} = \frac{(A_1 + iA_2)(u - iv)^{q-1}}{q(u^2 + v^2)^{q-1}}. \tag{33}$$

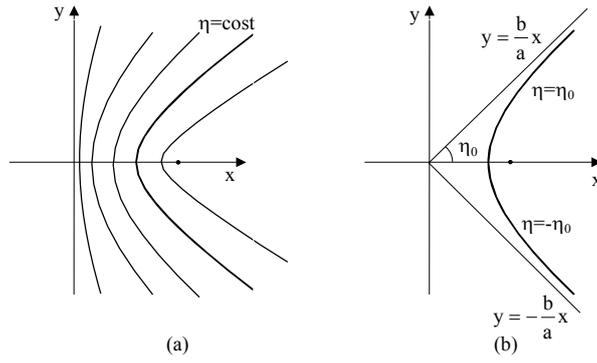


Figura 6: Famiglia di iperboli confocali (a); profilo iperbolico (primo e quarto quadrante) (b).

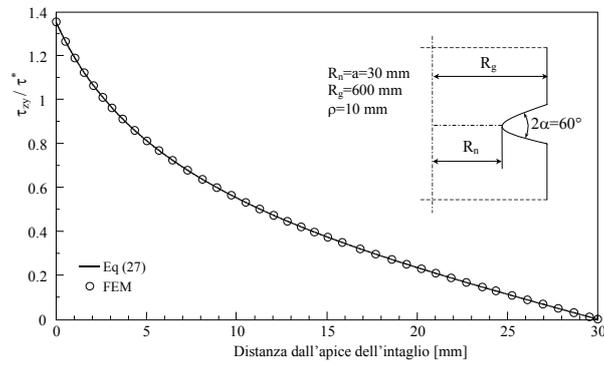


Figura 7: Componente di tensione τ_{zy} lungo la bisettrice dell'intaglio normalizzata rispetto alla tensione nominale sull'area netta.

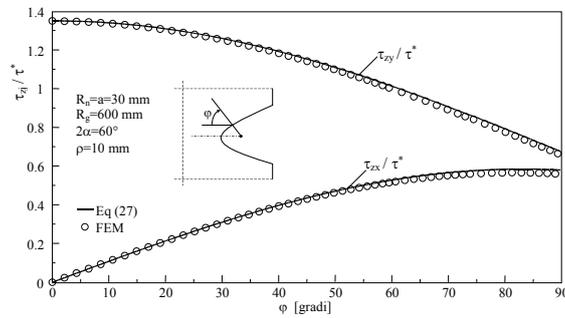


Figura 8: Campi di tensione lungo il bordo dell'intaglio normalizzati rispetto alla tensione nominale sulla sezione netta.

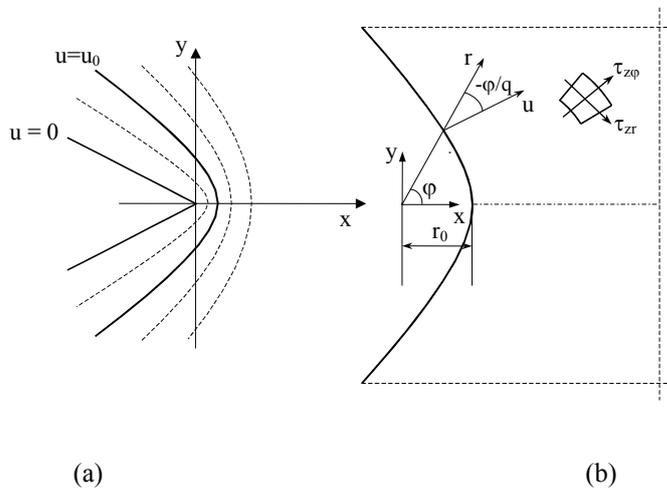


Figura 9: (a) Sistema di coordinate curvilinee (u, v); (b) sistema di riferimento adottato per la soluzione.

si ottengono le (34).

Indicando con $\lambda_3 = 1/q$, è possibile determinare la costante A_2 in funzione della tensione di taglio massima o del fattore generalizzato di intensificazione delle tensioni di modo III dalla (35)

$$A_2 = -\frac{K_{3p}}{\sqrt{2\pi}\lambda_3}, \quad A_2 = \frac{-\tau_{\max}}{\lambda_3 r_0^{\lambda_3-1}} \quad (35)$$

nella quale

$$K_{3p} = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow r_0^+} \left[r^{1-\lambda_3} \tau_{z\varphi}(r, \varphi = 0) \right] \quad (36)$$

Le tensioni, espresse in coordinate polari risultano quindi espresse dalla (37) o in modo equivalente dalla (38).

$$\begin{cases} \tau_{zr}(r, \varphi) \\ \tau_{z\varphi}(r, \varphi) \end{cases} = \tau_{\max} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\lambda_3-1} \begin{cases} \sin \lambda_3 \varphi \\ \cos \lambda_3 \varphi \end{cases} \quad (37)$$

$$\begin{cases} \tau_{zr}(r, \varphi) \\ \tau_{z\varphi}(r, \varphi) \end{cases} = \frac{K_{3p} r^{\lambda_3-1}}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} \sin \lambda_3 \varphi \\ \cos \lambda_3 \varphi \end{cases} \quad (38)$$

Uguagliando le due espressioni si ottiene la relazione (39) fondamentale che lega NSIF generalizzato e tensione massima:

Si noti come nel caso di un intaglio parabolico si abbia $2\alpha=0$, $\lambda_3=0.5$ e quindi la (40).

$$K_{3p} = \tau_{\max} \sqrt{2\pi} r_0^{1-\lambda_3} \quad (39)$$

$$K_{3p} = \tau_{\max} \sqrt{\pi} \rho \quad (40)$$

Questa relazione è stata ottenuta precedentemente da altri autori (Hasebe and Kutanda, 1978).

Anche in questo caso è possibile correggere le

distribuzioni delle tensioni per tenere in considerazione l'effetto di decremento lineare della tensione nominale attraverso la (41), dove vale la (42) e R è il raggio della sezione netta dell'albero.

Con un'equazione di equilibrio sulla sezione netta è inoltre possibile determinare il valore del fattore teorico di concentrazione delle tensioni per alberi soggetti a torsione indeboliti da intagli profondi (*deep notches*) attraverso la (43) ottenendo l'espressione (44) dove valgono le (45).

Le Fig.e 10 e 11 mostrano un confronto tra i risultati analitici e quelli di alcune analisi agli elementi finiti condotte su alberi in cui la dimensione dell'intaglio è molto superiore rispetto al raggio netto dell'albero (intaglio "*deep*"); l'accordo appare molto soddisfacente.

3 INTAGLIO PARABOLICO SOGGETTO A TAGLIO ANTIPLANARE IN REGIME ELASTO-PLASTICO

Materiale a comportamento elastico perfettamente plastico

Consideriamo un intaglio parabolico in un materiale elastico perfettamente plastico e soggetto a taglio antiplanare. Utilizzando un approccio già adottato per la cricca (da Irwin, 1960, a Unger, 2001), il confine elastoplastico Ω può essere determinato introducendo le distribuzioni di tensioni lineari elastiche nella seguente condizione di snervamento (46):

$$\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2 = \tau_0^2 \quad (46)$$

ottenendo per il raggio plastico l'espressione (47).

$$\begin{cases} \tau_{zx} = \frac{A_2}{qr^{\frac{q-1}{q}}} \sin\left(\frac{q-1}{q}\varphi\right) \\ \tau_{zy} = \frac{-A_2}{qr^{\frac{q-1}{q}}} \cos\left(\frac{q-1}{q}\varphi\right) \end{cases} \quad \begin{cases} \tau_{zr} = \frac{-A_2}{qr^{\frac{q-1}{q}}} \sin\left(\frac{1}{q}\varphi\right) \\ \tau_{z\varphi} = \frac{-A_2}{qr^{\frac{q-1}{q}}} \cos\left(\frac{1}{q}\varphi\right) \end{cases} \quad (34 \text{ a,b})$$

$$\begin{cases} \tau_{zr}(r, \varphi) \\ \tau_{z\varphi}(r, \varphi) \end{cases} = \tau_{\max} \cdot \left(1 - \frac{(r-r')\cos\varphi}{R'} \right) \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\lambda_3-1} \begin{cases} \sin \lambda_3 \varphi \\ \cos \lambda_3 \varphi \end{cases}, \quad \varphi \neq \pm\gamma \quad (41)$$

$$r' = \frac{r_0}{(\cos(\varphi/q))^q}; \quad R' = R + (r_0 - r' \cos \varphi) \quad (42)$$

$$\int_A \tau(t) \, tdA = \int_A \tau_{zy} \Big|_{y=0} \, tdA \quad (43)$$

$$K_{t,net} = \frac{s_3^4 + 10s_3^3 + 35s_3^2 + 50s_3 + 24}{4 \sum_{j=0}^3 I_j} \quad (44)$$

$$s_3(2\alpha) = \lambda_3 - 1$$

$$k(r_0, R) = \frac{r_0}{R}$$

$$I_0 = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{s_3} \left[6 + 24k + 36k^2 + 24k^3 + 6k^4\right] \quad (45)$$

$$I_1 = -k \left(24 + 26s_3 + 9s_3^2 + s_3^3\right)$$

$$I_2 = -k^2 \left(36 + 21s_3 + 3s_3^2\right)$$

$$I_3 = -k^3 \left(24 + 6s_3\right) - 6k^4$$

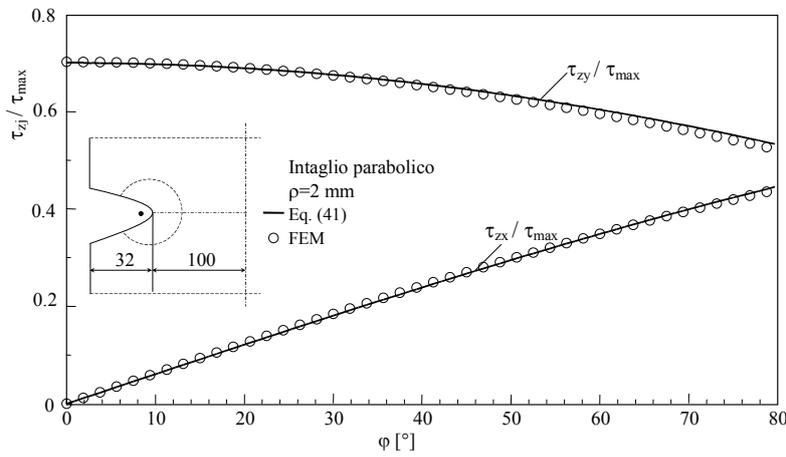


Figura 10: Campi di tensione su un percorso circolare di raggio pari a $r=2$ mm centrato sul fuoco dell'intaglio normalizzati rispetto alla tensione massima.

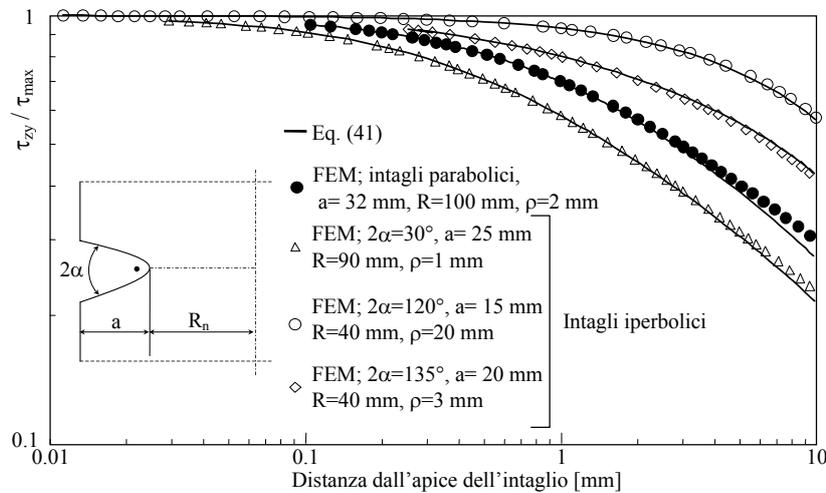


Figura 11: Componenti di tensione lungo la bisettrice dell'intaglio normalizzate rispetto alla tensione massima (intagli iperbolici e parabolici).

$$r|_{\Omega} = R_{pz} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_{3p}^e}{\tau_0} \right)^2 \quad (47)$$

La funzione di tensione ϕ per lo sforzo antiplanare può essere legata alle componenti di tensione per mezzo delle espressioni (48).

$$\tau_{zx} = \frac{\partial\phi}{\partial y} \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial\phi}{\partial x} \quad (48)$$

Introducendo ϕ nell'equazione (46) e chiamando $p = \partial\phi / \partial x$ and $q = \partial\phi / \partial y$ si ottiene la (49).

$$p^2 + q^2 = \tau_0^2 \quad (49)$$

L'equazione (49) può essere convertita in un sistema di equazioni differenziali ordinarie utilizzando il metodo di *Charpit-Lagrange* (Valiron, 1984, Forsyth, 1996 and Unger, 2001). Il sistema risulta essere il (50) dove s è una variabile ausiliaria. Integrando rispetto a s e utilizzando i valori iniziali per $s=0$, cioè quando $r = R_{pz}$, è possibile determinare le costanti c_i e quindi le variabili x, y, p, q

attraverso le (51) laddove $t = \sin \frac{\varphi}{2}$.

Il parametro ausiliario t può ora essere determinato in funzione delle coordinate fisiche x e y attraverso la (52).

Quindi, le espressioni finali per le tensioni nella zona plastica risultano essere le (53).

Definiamo ora un nuovo sistema di riferimento con origine O' , traslato di R_{pz} nella direzione x (vedi Fig. 12). Le coordinate rispetto a O' risultano quindi le (54).

$$\bar{r} = \sqrt{(x + R_{pz})^2 + y^2}$$

$$\bar{\varphi} = \arctan\left(\frac{y}{x + R_{pz}}\right) \quad (54)$$

Il confine elastoplastico continua a essere centrato nell'origine O , ma le componenti di tensione valutate rispetto al nuovo sistema di riferimento diventa la seguente (55):

$$\tau_{zx} = -\tau_0 \sin \bar{\varphi}$$

$$\tau_{zy} = \tau_0 \cos \bar{\varphi} \quad (55)$$

che costituisce una soluzione ammissibile in accordo con la teoria delle slip lines di Sokolovskii (Cherepanov, 1962). L'entità della traslazione, R_{pz} , dipende dall'NSIF elastico e dalla tensione di snervamento τ_0 .

L'estensione della zona plastica di fronte all'intaglio risulta quindi la (56a).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial F}{\partial p} = 2p \\ \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial F}{\partial q} = 2q \\ \frac{\partial p}{\partial s} = -\left(\frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial \phi} \right) = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial s} = -\left(\frac{\partial F}{\partial y} + q \frac{\partial F}{\partial \phi} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (50)$$

$$\begin{aligned} x &= -2\tau_0 \sqrt{1-t^2} s + R_{pz} (1-2t^2) \\ y &= -2\tau_0 t s + 2R_{pz} t \sqrt{1-t^2} \\ p &= -\tau_0 \sqrt{1-t^2} \\ q &= -\tau_0 t \end{aligned} \quad (51)$$

$$t = \frac{y}{\sqrt{(x + R_{pz})^2 + y^2}} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= -\tau_0 \frac{y}{\sqrt{(x + R_{pz})^2 + y^2}} \\ \tau_{zy} &= \tau_0 \frac{x + R_{pz}}{\sqrt{(x + R_{pz})^2 + y^2}} \end{aligned} \quad (53)$$

$$\Delta P = 2R_{pz} - \frac{\rho}{2} \quad (56a)$$

Quando l'intaglio diviene una cricca ($\rho=0$), si ottiene $\Delta P = 2R_{pz}$ e l'equazione (56a) risulta in accordo con la soluzione di Hult e McClintock (Hult and McClintock, 1956, Hutchinson, 1979, Unger, 2001).

Si osservi inoltre come due intagli con lo stesso valore di K_{3p}^e , ma con due differenti raggi di raccordo, presentano due differenti dimensioni della zona plastica; in particolare minore è il raggio di raccordo, maggiore è la zona plastica. Si noti inoltre come sostituendo nell'equazione (56a) l'espressione di R_{pz} e $K_{3p}^e = \tau_{max}^e \sqrt{\pi\rho}$ sia possibile ottenere la (56b).

$$\Delta P = \rho \left[\left(\frac{\tau_{max}^e}{\tau_0} \right)^2 - \frac{1}{2} \right] \quad (56b)$$

La relazione mostra che, a parità di tensione massima, la zona plastica è tanto minore quanto minore è il raggio di raccordo.

Lo spostamento w per un intaglio parabolico in condizioni lineari elastiche risulta pari alla (57) (Zappalorto *et al.*, 2008).

$$w = \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \frac{K_{3p}^e}{G} \sin \frac{\varphi}{2} \quad (57)$$

Quindi sostituendo $r=R_{pz}$, si ottiene la (58).

Contemporaneamente, l'equazione di Hencky (59) assicura che $w=const$ lungo le slip lines (Cherepanov, 1962), e quindi Eq. (23) può essere estesa all'intera zona plastica.

Gli scorrimenti, in coordinate cartesiane, risultano quindi dati dalle (60).

$$w_p = w|_{\Omega} = \sqrt{\frac{2R_{pz}}{\pi}} \frac{K_{3p}^e}{G} \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{(K_{3p}^e)^2}{\pi G \tau_0} \sin \bar{\varphi} \quad (58)$$

$$\tau_{zy} \frac{\partial w}{\partial x} - \tau_{zx} \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (59)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial \bar{\varphi}} \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = - \frac{(K_{3p}^e)^2}{\pi \tau_0 G} \frac{\cos \bar{\varphi} \sin \bar{\varphi}}{\bar{r}} \quad (60)$$

$$\gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial \bar{\varphi}} \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} = \frac{(K_{3p}^e)^2}{\pi \tau_0 G} \frac{\cos^2 \bar{\varphi}}{\bar{r}}$$

Materiale a comportamento incrudente con legge di potenza

Trattazione matematica

Si consideri ora invece una legge lineare al di sotto dello snervamento e una legge di potenza per la zona plastica (Fig. 13) del tipo (61) e (62)

$$\frac{\gamma}{\gamma_0} = \frac{\tau}{\tau_0} \quad \text{se } \tau \leq \tau_0 \quad (61)$$

$$\frac{\gamma}{\gamma_0} = \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^n \quad \text{se } \tau > \tau_0, \quad (62)$$

dove $\gamma_0 = \frac{\tau_0}{G}$ e $1 \leq n \leq \infty$. In questa formulazione, γ_0 è

la deformazione a snervamento e τ_0 è la corrispondente tensione di snervamento.

Sono inoltre valide le seguenti relazioni:

$$\tau = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}, \quad \frac{\gamma_{zi}}{\gamma_0} = \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^{n-1} \frac{\tau_{zi}}{\tau_0}$$

$$\gamma = \sqrt{\gamma_{zx}^2 + \gamma_{zy}^2}, \quad \gamma_0 = \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^{n-1} \frac{\tau_{zi}}{\tau_0}$$

Utilizzando la trasformazione odografica (63)

$$x = - \frac{\partial \psi}{\partial \tau_{zy}}, \quad y = \frac{\partial \psi}{\partial \tau_{zx}} \quad (63)$$

(suggerita da Hult and McClintock nel 1956) le equazioni di equilibrio e compatibilità possono essere riscritte come (Rice, 1967) le (64 a-b):

$$\frac{\partial x}{\partial \tau_{zx}} + \frac{\partial y}{\partial \tau_{zy}} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial \tau_{zy}} - \frac{\partial y}{\partial \tau_{zx}} = 0 \quad (64a-b)$$

purché lo Jacobiano delle trasformazioni non sia nullo.

Inoltre introducendo un sistema di coordinate polari nel piano delle tensioni (65) è possibile riscrivere le coordinate

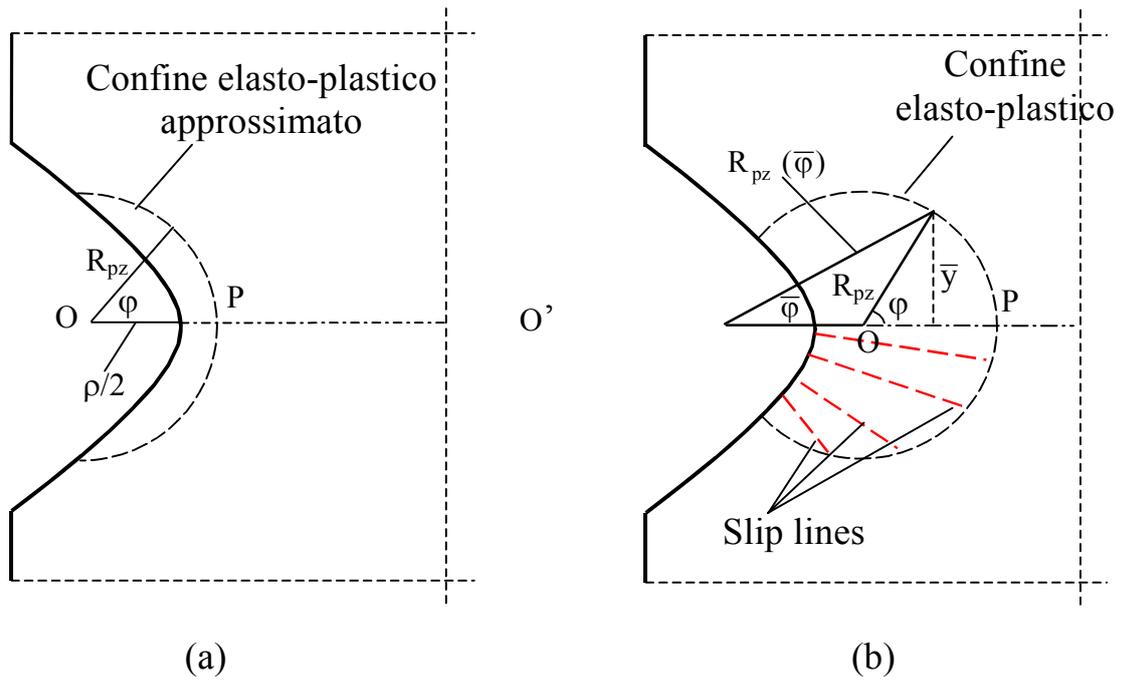


Figura 12: Confronto tra la zona plastica approssimata (a), basata sulla soluzione lineare elastica, e la zona plastica esatta (b) per un materiale a comportamento elastico perfettamente plastico.

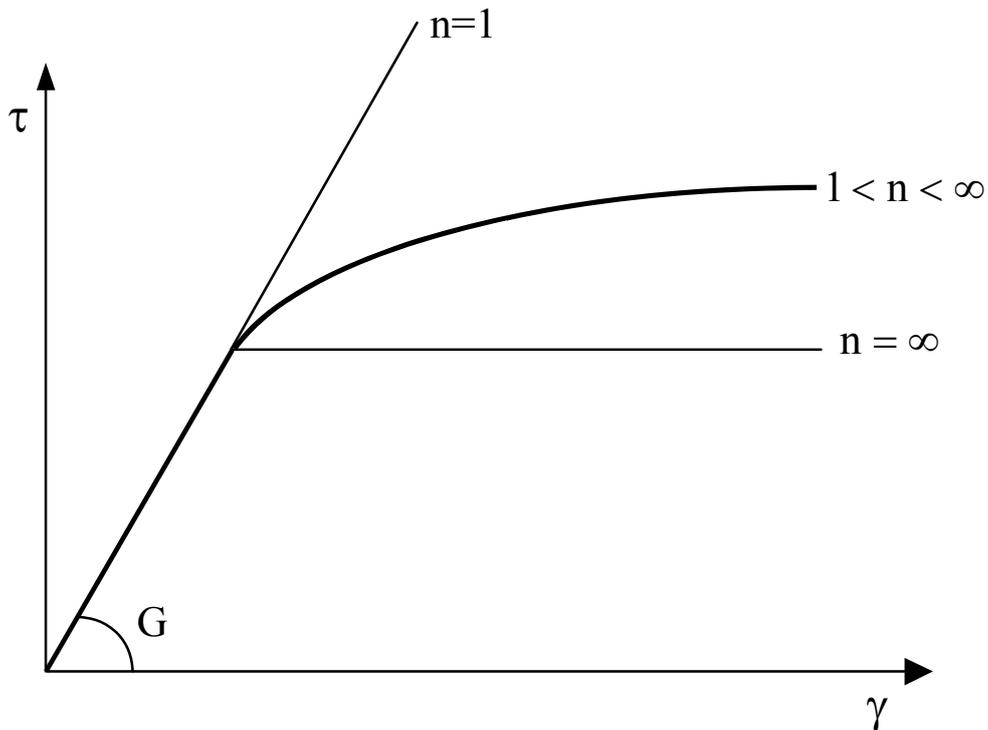


Figura 13: Curva tensioni deformazioni utilizzata per la formulazione matematica del problema.

(x,y) nella forma (66).

$$\tau_{zx} = -\tau \sin \bar{\varphi} \quad \tau_{zy} = \tau \cos \bar{\varphi} \quad (65)$$

$$x = -\frac{\partial \psi}{\partial \tau_{zy}} = -\frac{\partial \psi}{\partial \tau} \cos \bar{\varphi} + \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\varphi}} \frac{\sin \bar{\varphi}}{\tau} \quad (66)$$

$$y = \frac{\partial \psi}{\partial \tau_{zx}} = -\frac{\partial \psi}{\partial \tau} \sin \bar{\varphi} - \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\varphi}} \frac{\cos \bar{\varphi}}{\tau}$$

Sostituendo le equazioni (66) nell'equazione di compatibilità inversa e utilizzando la legge costitutiva del materiale si ottiene la(67).

$$\frac{1}{n} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \frac{1}{\tau^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{\varphi}^2} = 0 \quad (67)$$

L'equazione (67) è un'equazione di Eulero che ammette soluzioni nella forma (68).

$$\psi(\tau, \bar{\varphi}) = \tau^m \tilde{\psi}(\bar{\varphi}) \quad (68)$$

Sostituendo la (66) nella (65) si ottiene la (69) e quindi la (70).

E' possibile a questo punto risolvere il problema di Neumann, specificando il valore della derivata prima della funzione $\psi(\tau, \bar{\varphi})$ sul confine del dominio di integrazione (ovvero sul confine elastoplastico).

Se si ipotizza quindi che, in analogia con il caso elastico

perfettamente plastico, l'origine del sistema di riferimento risulti traslato rispetto al centro del confine elastoplastico di una quantità pari a $k R_{pz}$, con $k < 1.0$, (vedi Fig. 14), dalle equazioni lineari elastiche si ottiene la (71).

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{\tau_{zy}|_{\Omega}}{\frac{K_{3p}^e}{\sqrt{2\pi R_{pz}}}} = \frac{\tau_{zy}|_{\Omega}}{\tau_0} \quad (71)$$

$$\sin \frac{\varphi}{2} = -\frac{\tau_{zx}|_{\Omega}}{\frac{K_{3p}^e}{\sqrt{2\pi R_{pz}}}} = -\frac{\tau_{zx}|_{\Omega}}{\tau_0}$$

Quindi dalle equazioni (65, 71) si ha la (72).

Usando l'espressione (73) e le Equazioni (61, 63, 70) si ha la (74).

In modo del tutto indipendente dall'equazione (70) è possibile ottenere la (75).

Inoltre uguagliando le due formulazioni si hanno la (76) ed infine la (77 a - b).

All'estremità delle zona plastica, lungo la bisettrice dell'intaglio, si ha $x_p = (1+k)R_{pz}$ mentre $\tau = \tau_0$. Quindi vale la (78).

A partire dalle equazioni (77a, b) è possibile ottenere la

$$\tilde{\psi}(\bar{\varphi}) \left[\frac{1}{n} m(m-1) + m \right] + \tilde{\psi}''(\bar{\varphi}) = 0 \quad (69)$$

$$\psi(\tau, \bar{\varphi}) = \tau^m (c_1 \sin \omega \bar{\varphi} + c_2 \cos \omega \bar{\varphi}), \quad \omega = \frac{1}{n} m(m-1) + m \quad (70)$$

$$\begin{aligned} x|_{\Omega} &= R_{pz} \cos \varphi + kR_{pz} = R_{pz} \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) + kR_{pz} \\ &= R_{pz} \left(1 - 2 \left(\frac{\tau_{zx}|_{\Omega}}{\tau_0} \right)^2 \right) + kR_{pz} \\ &= R_{pz} (1 - 2 \sin^2 \bar{\varphi}) + kR_{pz} = R_{pz} \cos 2\bar{\varphi} + kR_{pz} \end{aligned} \quad (72)$$

$$\begin{aligned} y|_{\Omega} &= R_{pz} \sin \varphi = 2R_{pz} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = -2R_{pz} \frac{\tau_{zx}|_{\Omega}}{\tau_0} \frac{\tau_{zy}|_{\Omega}}{\tau_0} \\ &= 2R_{pz} \sin \bar{\varphi} \cos \bar{\varphi} = R_{pz} \sin 2\bar{\varphi} \end{aligned}$$

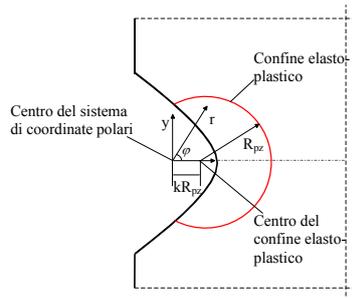


Figura 14: Zona plastica per un materiale incrudente secondo legge di potenza.

coordinata radiale (79) dove vale la (80) e infine, invertendo la (80), il modulo del vettore τ si ha la (81).
Le componenti di tensione e dei deformazione risultano quindi le (82) ed (83).

E' anche possibile ottenere il legame tra l'angolo $\bar{\varphi}$ nel piano delle tensioni e l'angolo φ nel piano fisico, utilizzando le relazioni (84) da cui si ha la (85).

L'intensità dei campi di tensione può essere anche espressa in funzione dell'NSIF elastico, sostituendo esplicitamente x_p ed ottenendo la (86).

Alternativamente è anche possibile definire un fattore plastico di intensificazione delle tensioni,

$$K_{3p}^p = \lim_{r \rightarrow \frac{r_p}{2}} \sqrt{2\pi} r^{\frac{1}{n+1}} \tau_{zy}(r, \varphi = 0)$$

e riscrivere quindi le tensioni nella forma (87) dove vale la seguente relazione tra NSIF elastico ed NSIF plastico (88).

Inoltre, usando l'espressione $K_{3p}^e = \tau_{\max}^e \sqrt{\pi \rho}$, le componenti di tensione possono essere riscritte in funzione della tensione massima elastica (89).

All'apice dell'intaglio risulta la (90) che fornisce un

legame analitico tra la massima tensione elastica e plastica.

Usando infine τ_{\max}^p è possibile riscrivere le tensioni nella seguente forma (91).

Si noti infine come uguagliando le equazioni (87) e (91), si ottiene la relazione (92), valida in campo plastico, tra NSIF e tensione massima.

La Fig. 15 mostra un confronto tra i risultati analitici e quelli di alcune analisi agli elementi finiti. L'accordo appare ancora soddisfacente.

Confronto con la regola di Neuber

Dall' Equazione (90) è possibile ricavare la (93).

$$\tau_{\max}^p \cdot \gamma_{\max}^p = \frac{2n}{n+1} \frac{(\tau_{\max}^e)^2}{G} \quad (93)$$

Dividendo ambo i membri per $\tau_{\text{nom}} \cdot \gamma_{\text{nom}} = \frac{\tau_{\text{nom}}^2}{G}$ si ottiene la (94)

$$K_t \cdot K_\gamma = \frac{2n}{n+1} K_t^2 \quad (94)$$

diversa dalla proposta di Neuber (95).

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{\varphi}} = \frac{\partial \psi}{\partial \tau_{zx}} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial \bar{\varphi}} + \frac{\partial \psi}{\partial \tau_{zy}} \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial \bar{\varphi}} \quad (73)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \bar{\varphi}} \right)_{\Omega} &= x|_{\Omega} \cdot \tau_0 \sin \bar{\varphi} - y|_{\Omega} \cdot \tau_0 \cos \bar{\varphi} \\ &= (R_{pz} \cos 2\bar{\varphi} + kR_{pz}) \tau_0 \sin \bar{\varphi} - R_{pz} \sin 2\bar{\varphi} \tau_0 \cos \bar{\varphi} = \\ &= R_{pz} \tau_0 (k-1) \sin \bar{\varphi} \end{aligned} \quad (74)$$

$$\frac{\partial \psi(\tau, \bar{\varphi})}{\partial \bar{\varphi}} = \omega \tau^m (c_1 \cos \omega \bar{\varphi} - c_2 \sin \omega \bar{\varphi}) \quad (75)$$

$$c_1 = 0, \quad \omega = 1, \quad m = -n, \quad c_2 = (1-k)R_{pz} \tau_0^{n+1}, \quad \psi = (1-k)R_{pz} \tau_0^{n+1} \tau^{-n} \cos \bar{\varphi} \quad (76)$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{(1-k)R_{pz} \tau_0^{n+1}}{\tau^{n+1}} (n \cos^2 \bar{\varphi} - \sin^2 \bar{\varphi}) \\ y &= \frac{(1-k)R_{pz} \tau_0^{n+1}}{\tau^{n+1}} (n+1) \cos \bar{\varphi} \sin \bar{\varphi} \end{aligned} \quad (77a-b)$$

$$k = \frac{n-1}{n+1}, \quad x_p = \frac{2n}{n+1} R_{pz} \quad (78)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{(1-k) R_{pz} \tau_0^{n+1}}{\tau^{n+1}} n \tilde{F} = x_p \frac{\tau_0^{n+1}}{\tau^{n+1}} \tilde{F} \quad (79)$$

$$\tilde{F} = \sqrt{\frac{\sin^2 \bar{\varphi}}{n^2} + \cos^2 \bar{\varphi}} \quad (80)$$

$$\tau = \tau_0 \left(\frac{x_p}{r} \tilde{F} \right)^{\frac{1}{n+1}} \quad (81)$$

$$\tau_{zy} = \tau_0 \left[\frac{x_p}{r} \tilde{F} \right]^{\frac{1}{n+1}} \cos \bar{\varphi} \quad (82)$$

$$\tau_{zx} = -\tau_0 \left[\frac{x_p}{r} \tilde{F} \right]^{\frac{1}{n+1}} \sin \bar{\varphi}$$

$$\gamma_{zy} = \gamma_0 \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^{n-1} \frac{\tau_{zy}}{\tau_0} = \gamma_0 \left(\frac{x_p}{r} \tilde{F} \right)^{\frac{n}{n+1}} \cos \bar{\varphi} \quad (83)$$

$$\gamma_{zx} = \gamma_0 \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^{n-1} \frac{\tau_{zx}}{\tau_0} = -\gamma_0 \left(\frac{x_p}{r} \tilde{F} \right)^{\frac{n}{n+1}} \sin \bar{\varphi}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{(n+1) \sin \bar{\varphi} \cos \bar{\varphi}}{n \cos^2 \bar{\varphi} - \sin^2 \bar{\varphi}} = \frac{\sin 2\bar{\varphi}}{\cos 2\bar{\varphi} + k} \quad (84)$$

$$\bar{\varphi} = \frac{\varphi + \arcsin\left(\frac{n-1}{n+1} \sin \varphi\right)}{2} \quad (85)$$

$$\tau_{zy} = \left[\frac{n(K_{3p}^e)^2}{\pi(n+1)} \tau_0^{n-1} \right]^{\frac{1}{n+1}} \left[\frac{\tilde{F}}{r} \right]^{\frac{1}{n+1}} \cos \bar{\varphi} \quad (86)$$

$$\tau_{zx} = - \left[\frac{n(K_{3p}^e)^2}{\pi(n+1)} \tau_0^{n-1} \right]^{\frac{1}{n+1}} \left[\frac{\tilde{F}}{r} \right]^{\frac{1}{n+1}} \sin \bar{\varphi}$$

$$\tau_{zy} = \frac{K_{3p}^p}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\tilde{F}}{r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \cos(\bar{\varphi}) \quad (87)$$

$$\tau_{zx} = - \frac{K_{3p}^p}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\tilde{F}}{r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \sin(\bar{\varphi})$$

$$K_{3\rho}^p = \sqrt{2\pi} \left[\frac{n}{\pi(n+1)} \tau_0^{n-1} (K_{3\rho}^e)^2 \right]^{\frac{1}{n+1}} \quad (88)$$

$$\tau_{zy} = \left[\frac{2n(\tau_{\max}^e)^2}{(n+1)} \tau_0^{n-1} \right]^{\frac{1}{n+1}} \left(\frac{\rho}{2r} \right)^{\frac{1}{n+1}} [\tilde{F}]^{\frac{1}{n+1}} \cos \bar{\varphi} \quad (89)$$

$$\tau_{zx} = - \left[\frac{2n(\tau_{\max}^e)^2}{(n+1)} \tau_0^{n-1} \right]^{\frac{1}{n+1}} \left(\frac{\rho}{2r} \right)^{\frac{1}{n+1}} [\tilde{F}]^{\frac{1}{n+1}} \sin \bar{\varphi}$$

$$\tau_{zy} \Big|_{\substack{\varphi=0 \\ r=\rho/2}} = \tau_{\max}^p = \left[\frac{2n(\tau_{\max}^e)^2}{(n+1)} \tau_0^{n-1} \right]^{\frac{1}{n+1}} \quad (90)$$

$$\tau_{zy} = \tau_{\max}^p \left(\frac{\rho}{2r} \right)^{\frac{1}{n+1}} [\tilde{F}]^{\frac{1}{n+1}} \cos \bar{\varphi} \quad (91)$$

$$\tau_{zx} = -\tau_{\max}^p \left(\frac{\rho}{2r} \right)^{\frac{1}{n+1}} [\tilde{F}]^{\frac{1}{n+1}} \sin \bar{\varphi}$$

$$K_{3\rho}^p = \tau_{\max}^p \sqrt{2\pi} \left(\frac{\rho}{2} \right)^{\frac{1}{n+1}} \quad (92)$$

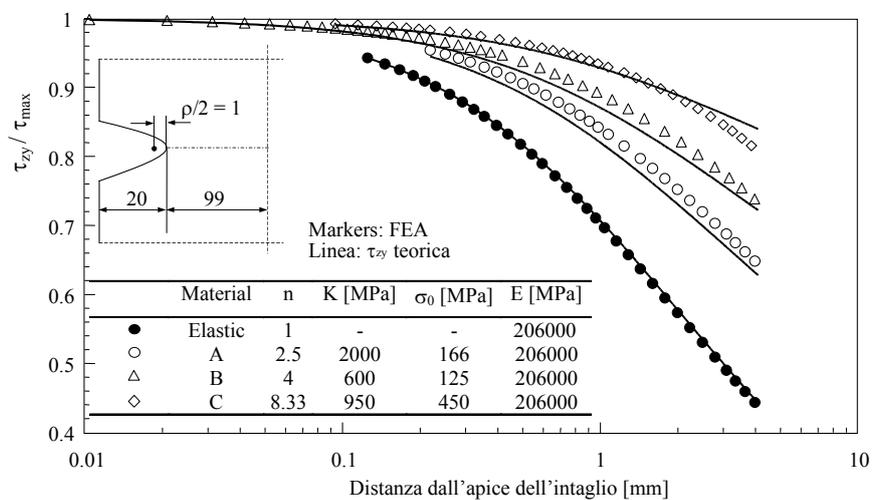


Figura 15: Componenti di tensione τ_{zy} lungo la bisettrice dell'intaglio per differenti materiali, normalizzate rispetto alla tensione massima sull'apice.

$$K_t \cdot K_\gamma = K_t^2 \quad (95)$$

Tuttavia, tralasciando la traslazione del sistema di riferimento, e quindi assumendo $x_p = R_{pz}$, anziché

$x_p = \frac{2n}{n+1} R_{pz}$, si ottiene la (96)

$$\tau_{\max}^p \cdot \gamma_{\max}^p = \gamma_0 \tau_0 \left[\frac{x_p}{r_0} \right] = \frac{(\tau_{\max}^e)^2}{G} \quad (96)$$

in accordo con Neuber.

Legame con il criterio ESED di Molski e Glinka

In presenza di una condizione di *small scale yielding*, Molski e Glinka (1981) formalizzarono il criterio ESED per intagli raccordati in presenza di sollecitazione di trazione o flessione nella seguente forma (97).

$$W_e = W_p \quad (97)$$

Con l'obiettivo di estendere tale criterio anche a intagli con raggio di raccordo nullo, Lazzarin e Zambardi (2002) formularono l'ipotesi che in condizioni di deformazione piana la concentrazione di energia in un volume strutturale che abbracci l'apice dell'intaglio sia costante. Tale volume deve essere completamente immerso in una zona dove i campi di tensione possono essere descritti utilizzando un solo termine nello sviluppo asintotico delle tensioni. In condizioni di *small scale yielding*, tale ipotesi si traduce nella costanza del valore medio della densità di energia di deformazione

Nel caso di sollecitazioni antiplanari la densità di energia può essere determinata come la (98).

$$W = \int_0^\gamma \tau d\gamma \quad (98)$$

Fatte le opportune sostituzioni, l'energia all'apice dell'intaglio in condizioni plastiche risulta la (99).

$$W_p = \frac{4n^2}{(n+1)^2} \frac{(\tau_{\max}^e)^2}{2G} - \frac{n-1}{n+1} \frac{\tau_0^2}{2G} \quad (99)$$

Se $n=1$, l'equazione si semplifica in quella valida per il caso lineare elastico nella (100)

$$W_e = W_p (n=1) = \frac{(\tau_{\max}^e)^2}{2G} \quad (100)$$

e quindi (101).

$$\frac{W_p}{W_e} = \frac{4n^2}{(n+1)^2} - \frac{n-1}{n+1} \left(\frac{\tau_0}{\tau_{\max}^e} \right)^2 \quad (101)$$

E' chiaro quindi che la costanza dell'energia all'apice dell'intaglio non è verificata.

Consideriamo ora il caso di una cricca e valutiamo l'incremento nel volume strutturale di raggio R dell'energia plastica rispetto a quella lineare elastica attraverso la (102), quindi si ha la (103) nella quale vale la (104).

$$I_{3p} = \int_0^\pi \tilde{F} d\phi \quad (104)$$

Quando $n=1$ $I_{3p} = \pi$, e quindi si ha la (105).

$$\bar{W}_e = \frac{1}{2G} \frac{(K_{III}^e)^2}{\pi R} = \frac{1+\nu}{\pi E} \frac{(K_{III}^e)^2}{R} \quad (105)$$

In conclusione si ha la (106).

$$\frac{\bar{W}_p}{\bar{W}_e} = \frac{4n^2}{\pi(n+1)^2} I_{3p} \quad (106)$$

L'equazione (106) fornisce l'incremento nel volume strutturale di raggio R dell'energia plastica rispetto a

$$\begin{aligned} W_p &= \tau_0 \int_0^\gamma \left(\frac{\gamma}{\gamma_0} \right)^{\frac{1}{n}} d\gamma = \frac{n}{n+1} \frac{\tau^{n+1}}{G \tau_0^{n-1}} \\ &= \frac{n}{n+1} \frac{1}{G \tau_0^{n-1}} \left\{ \left[\frac{n(K_{III}^e)^2}{\pi(n+1)} \tau_0^{n-1} \right]^{\frac{1}{n+1}} \left[\frac{\tilde{F}}{r} \right]^{\frac{1}{n+1}} \right\}^{n+1} = \frac{n^2 \tilde{F}}{\pi G (n+1)^2} (K_{III}^e)^2 r^{-1} \end{aligned} \quad (102)$$

$$\bar{W}_p = \frac{E_p}{\pi R^2} = \frac{2n^2}{\pi^2 G (n+1)^2} \frac{(K_{III}^e)^2}{R} I_{3p} \quad (103)$$

quella lineare elastica. La Tab. 1 fornisce i valori di I_{3p} e \bar{W}_p / \bar{W}_e per alcuni valori dell'indice di incrudimento n.

e (109).

$$J_{3,p} = 3^{-\frac{n+1}{2}} B_J(2\alpha, n) \frac{(K_{3,p})^{n+1}}{K^n} R^{\frac{n+m}{m-1}} \quad (109)$$

4 FATTORI PLASTICI DI INTENSIFICAZIONE DELLE TENSIONI PER INTAGLI A SPIGOLO VIVO SOGGETTI A TAGLIO ANTIPLANARE

Utilizzando in maniera opportuna le proprietà della trasformazione odografica, Lazzarin e Zappalorto (*in corso di revisione*) sono stati in grado di determinare la relazione (107) tra NSIF di modo III plastici ed elastici, valida per materiali che presentano un curva tensioni deformazioni conforme a quella rappresentata in Fig. 13.

Nella relazione (107) $K_{3,e}$ rappresenta l'NSIF determinato con un'analisi lineare elastica, ω è un parametro che dipende dall'angolo di apertura, mentre m dipende sia dall'angolo di apertura che dall'indice di incrudimento. L'equazione (107) è stata verificata con una serie di analisi agli elementi finiti, mostrando un ottimo accordo in regime di *small scale yielding* (un esempio è riportato in Fig. 16).

Il *frame* analitico sviluppato da Lazzarin e Zappalorto ha permesso inoltre di determinare delle espressioni in forma chiusa per la densità di energia di deformazione nel volume di controllo e per il J-integral di Rice in funzione dei fattori plastici di intensificazione delle tensioni (108):

$$\bar{W}_p = 3^{-\frac{n+1}{2}} B_w(n, 2\alpha) \frac{(K_{3,p})^{n+1}}{K^n} R^{\frac{n+1}{m-1}} \quad (108)$$

Anche per queste relazioni, l'accordo con i risultati di alcune analisi agli elementi finiti si è dimostrato molto soddisfacente (Fig. 17 e 18).

4 CONCLUSIONI

Sono state sviluppate delle equazioni in forma chiusa per descrivere le distribuzioni di tensione generate da intagli di varia forma in alberi intagliati soggetti a torsione, sia in regime lineare elastico sia elastoplastico. Le soluzioni lineari elastiche sono state ottenute utilizzando un approccio basato sull'uso combinato del metodo dei potenziali complessi e di un sistema di coordinate curvilinee. I risultati analitici ottenuti per le componenti di tensione appaiono in soddisfacente accordo con i risultati numerici per un ampio *range* di forme d'intaglio (dalla cricca all'intaglio circolare), in relazione a corpi assialsimmetrici infiniti e finiti.

Le soluzioni elastoplastiche sono state ottenute invece utilizzando la trasformazione odografica introdotta da Hult e McClintock e risolvendo il problema di Neumann. Le tensioni sono state espresse dapprima in funzione della massima tensione plastica di taglio presente sull'apice dell'intaglio, poi in funzione di un NSIF plastico generalizzato, valido per un intaglio raccordato,

$$K_{3,p} = \sqrt{2\pi} \left[-\frac{m}{\lambda_3(1-m)} \left(\frac{K_{3,e}}{\sqrt{2\pi}} \right)^{\frac{1}{1-\lambda_3}} \frac{1}{\tau_0^{m+\omega}} \right]^{\frac{1}{1-m}} \quad (107)$$

n	I_{3p}	$\frac{\bar{W}_p}{\bar{W}_e}$
1	3.14159	1
2.5	2.09436	1.36052
4	1.7726	1.44445
8.33	1.44376	1.46531
10	1.38556	1.45797
12	1.33475	1.44806

Tabella 1: Valori di I_{3p} e \bar{W}_p / \bar{W}_e ottenuti con un'integrazione numerica dell'equazione (104).

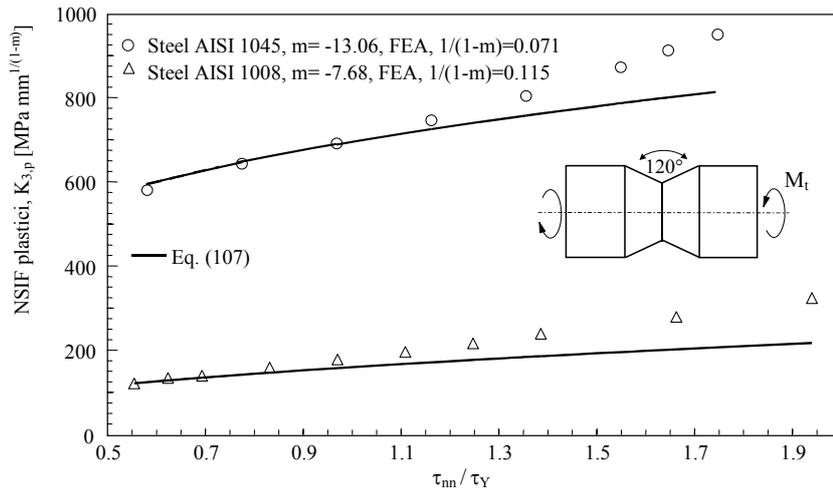


Figura 16: NSIF plastici in accordo con la teoria in confronto con i risultati di analisi agli elementi finiti. Intaglio a spigolo vivo ($2\alpha=120^\circ$).

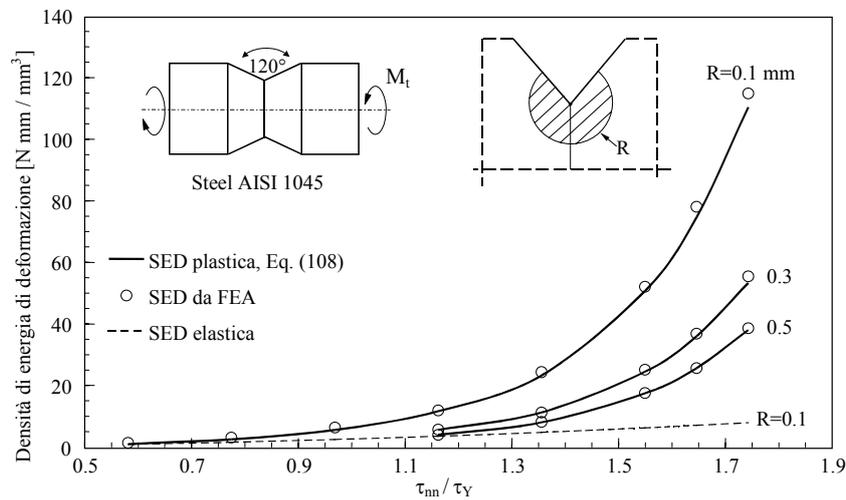


Figura 17: Densità di energia di deformazione in accordo con l'equazione (108) e confronto con i risultati di alcune analisi agli elementi finiti; intaglio a spigolo vivo ($2\alpha=120^\circ$); acciaio AISI 1045.

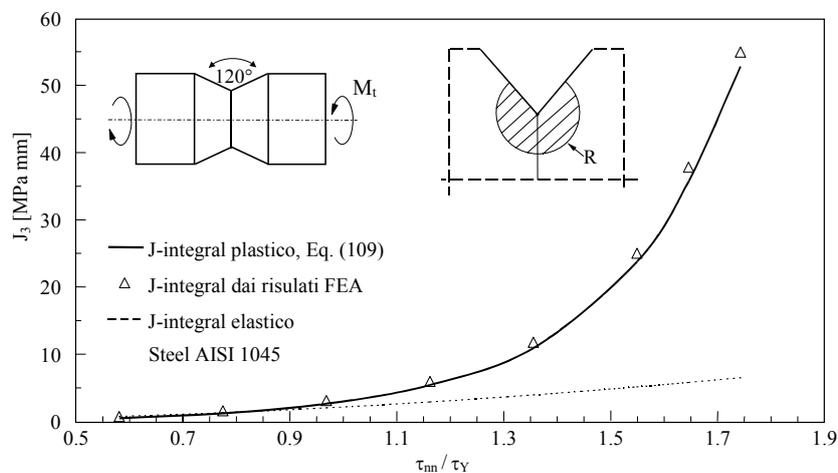


Figura 18: J-integral in accordo con l'equazione (109) e confronto con i risultati di alcune analisi agli elementi finiti; intaglio a spigolo vivo ($2\alpha=120^\circ$); acciaio AISI 1045.

evidenziando analiticamente il legame esistente tra questi due parametri.

E' stata inoltre formalizzata un'espressione in forma chiusa, valida nel campo dello *small scale yielding*, fra la massima tensione sull'apice dell'intaglio valutata in campo plastico ed il corrispondente valore ottenuto per mezzo di un'analisi lineare elastica.

Infine, per mezzo del *frame* analitico sviluppato, sono state ridiscusse due regole molto diffuse in letteratura, la regola di Neuber e il criterio ESED di Molski e Glinka, evidenziandone analiticamente limiti e campo di applicabilità.

6 BIBLIOGRAFIA

- GP Cherepanov J Appl Math Mech. 26 (1962) 1040-1057.
- M. Creager P.C. Paris Int. J. Fract. Mech. 3 (1967) 247-252.
- M.L. Dunn W. Suwito S. Cunningham Eng. Fract. Mech. 57 (1997) 417-430.
- L. N. G. Filon Philosophical transactions of the Royal Society of London A 193 (1900) 309-352.
- A. R. Forsyth Dover Publications (1996).
- M. Hamada H. Kitagawa Bull. Japan Soc. Mech. Eng. 11 (1968) 605-611.
- N. Hasebe Y. Kutanda Eng. Fract. Mech. 10 (1978) M 215-221.
- J.A.H. Hult, F.A. McClintock, 9th Int Cong Appl Mech, Brussels, 8 (1956).
- J.W. Hutchinson J. Mech Phys Solids 16 (1968a) 13-31.
- J.W. Hutchinson J. Mech Phys Solids 16 (1968b) 337-347.
- J.W. Hutchinson Non linear fracture mechanics Department of Solid Mechanics Technical University of Denmark (1979).
- Z.B. Kuang X.P. Xu, Int J Fract 35 (1987) 39-53.
- G.R. Irwin Sagamore Research Conference Proceedings Vol. 4, Syracuse University Research Institute Syracuse NY, (1961) 63-78.
- P. Lazzarin R. Zambardi Fatigue Fract Engng Mater Struct 25 (2002) 917-928.
- P. Lazzarin C.M. Sonsino R. Zambardi Fract Engn Mater Struct 27 (2004) 127-141.
- P. Lazzarin R. Zambardi P. Livieri Int J Fract 107 (2001) 361-377.
- P. Lazzarin M. Zappalorto J.R. Yates Int. J. Engineering Science 45 (2-8) 308-328.
- P. Lazzarin M. Zappalorto Plastic notch stress intensity factors for pointed V-notches under antiplane shear loading submitted for publication.
- K. Molski G. Glinka Mater Sci Engng 50 (1981) 93-100.
- H. Neuber Theory of notch stresses Springer-Verlag Berlin (1958).
- H. Neuber J Appl Mech 28 (1961) 544-550.
- J. Qian N. Hasebe Eng. Fract. Mech. 56 (1997) 729-34.
- J.R. Rice J Appl Mech 34 (1967) 287-298.
- J.R. Rice G.F. Rosengren J. Mech Phys Solids 16 (1968) 1-12.
- A. Seweryn K. Molski Eng. Fract. Mech. 55 (1996) 529-556.
- S.M. Sharma N. Aravas J Mech Phys Solids 39 (1991) 1043-1072.
- S.P. Timoshenko J.N. Goodier Theory of elasticity 3rd Edition McGraw-Hill New York (1970).
- J.D. Unger Analytical fracture mechanics Dover publication (2001).
- G. Valiron The geometric theory of ordinary differential equations and algebraic functions Math Science Pr. (1984).
- M. Zappalorto P. Lazzarin J. Yates Int J Solids Struct in press (2008) DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2008.04.020
- M. Zappalorto P. Lazzarin Int. J. Fract. 148 (2007) 139-154.