

L'APPROCCIO NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA ALLA VALUTAZIONE DEL COMPORTAMENTO A FATICA DI COMPONENTI MECCANICI SOGGETTI A SOLLECITAZIONI DI TIPO RANDOM

Claudio Braccesi, Filippo Cianetti, Guido Lori and Dario Pioli

Department of Industrial Engineering, University of Perugia, Perugia (Italy)
E-mail: braccesi@unipg.it; cianfi@unipg.it; lori@caedii.unipg.it; pioli@caedii.unipg.it

SOMMARIO

Nell'ambito dell'analisi a fatica di componenti meccanici soggetti all'azione di forze perturbatrici di natura stocastica, negli ultimi anni si è assistito a un grande sviluppo delle metodologie che affiancano il progettista nella fase di simulazione numerica di tali condizioni di carico. Queste metodologie si avvalgono sempre più dell'interazione fra le tecniche di modellazione e simulazione agli elementi finiti (FEA) e multicorpo o multibody (MBS). L'evoluzione dei codici di calcolo ha reso possibile l'ottenimento di un eccellente livello di confidenza della simulazione con le reali condizioni operative del sistema e del componente. In tale scenario, in cui la costosa fase finale di verifica sperimentale vorrebbe venir circoscritta a poche prove significative, è evidente come la fase di valutazione virtuale assuma sempre più maggiore importanza, avanzando la richiesta di tecniche in cui risulti ottimizzato il compromesso fra la rapidità di ottenimento del risultato e il grado d'incertezza dello stesso. Fra queste l'approccio frequency-domain nel dominio della frequenza (in frequenza sia dal punto di vista della simulazione che del post-processamento dei risultati) presenta interessanti proprietà che ne suggeriscono l'utilizzo in supporto o in alternativa all'approccio classico time-domain nel dominio del tempo, soprattutto finalizzato all'individuazione delle zone critiche e alla scelta delle soluzioni costruttive. In tale memoria ci si pone l'obiettivo di mostrare come il metodo in frequenza sia un procedimento completo e lineare, in molti casi preferibile al metodo di riferimento, evidenziandone vantaggi e svantaggi rispetto allo stesso. In particolare si focalizzerà il confronto sul problema della stima di un danneggiamento attendibile a partire dalla rappresentazione più generale del tensore di tensione, esaminando, anche con contributi originali degli autori, la possibilità di ridurre lo stato multiassiale ad uno monoassiale equivalente e come ciò sia attuabile nei due domini. Verrà infine presentato lo sviluppo di un significativo caso test quale la classica procedura di delibera di una scocca di autovettura. Tale applicazione dimostrerà come l'utilizzo del metodo in frequenza porti a risultati più che soddisfacenti.

1. INTRODUZIONE

La valutazione virtuale del comportamento a fatica di componenti meccanici sollecitati in maniera random sta conseguendo negli ultimi anni risultati sempre più soddisfacenti. In particolar modo questo è vero nell'ottica della messa a punto di metodologie che garantiscano in ogni fase della progettazione una stima efficiente del danno nei vari punti del componente,

in conformità al corretto compromesso fra affidabilità e rapidità di ottenimento della stima stessa. Nelle prime fasi del “design” acquisisce notevole importanza il requisito di snellezza computazionale dell’algoritmo che, a partire dalla mole di dati ottenibili dalla simulazione virtuale su un modello agli elementi finiti (FEA) o multibody (MBS) del sistema e del componente [1], va a quantificare il danneggiamento in ogni punto del modello stesso [2-4]. Infatti, in tale contesto, la possibilità di variare numerosi parametri progettuali, unita spesso all’inevitabile scelta di un elevato numero di gradi di libertà del sistema, porta alla necessità di utilizzare l’algoritmo quasi senza soluzione di continuità, confidando in tempi di attesa accettabili per il conseguimento del risultato. Proprio in questa fase sembra poter fornire i migliori risultati l’applicazione dell’approccio in frequenza. L’analisi sul modello virtuale, ad esempio multicorpo, viene realizzata nel dominio della frequenza mediante la definizione di ingressi anch’essi espressi in questo dominio e la ricostruzione dello stato tensionale del componente viene svolta utilizzando le proprietà della sintesi modale [1]. L’output dell’analisi dinamica consisterà quindi in tal modo di matrici PSD (di dimensioni 6×6) delle componenti del tensore di tensione [3, 4], da cui deve essere ricavata la stima del danno sempre condotta in tale dominio o con metodi nativi del dominio della frequenza o tradotti in questo dal dominio del tempo. Tale approccio innovativo, alternativo rispetto a quello classico nel dominio del tempo, presenta notevoli vantaggi rispetto alla via tradizionale, derivanti essenzialmente dalle proprietà di sintesi intrinseche del dominio della frequenza. Va tuttavia riconosciuto come la procedura di valutazione della vita a fatica sia stata pensata e realizzata invece nel dominio del tempo e quindi la sua trasposizione nel dominio parallelo comporti in alcuni passaggi degli errori sistematici non totalmente eliminabili, tali quindi da abbassare il grado di confidenza del risultato. Obiettivo di tale lavoro è quello di mostrare, attraverso alcune riflessioni puramente teoriche, e con l’ausilio di un valido esempio applicativo, i pregi ed i difetti delle procedure nel dominio del tempo e in quello della frequenza, confrontandole nei punti chiave del percorso di valutazione e sottolineandone quindi le caratteristiche mostrate essenzialmente in termini di tempi di calcolo e di errore commesso. In particolare il confronto quantitativo sarà incentrato sul problema della stima del danno a partire dalla conoscenza dello stato tensionale, espresso in un caso da un tensore di tensione di dimensioni 3×3 di componenti variabili nel tempo (6 non coincidenti fra di loro) e nell’altro da una matrice di dimensioni 6×6 degli autospettri e mutui crosspettri delle stesse componenti. In tale ambito verranno mostrate le interessanti proprietà di una particolare rappresentazione monoassiale equivalente, evidenziando come essa sia in grado di individuare in tempi molto contenuti e in maniera corretta le zone critiche del componente, fornendo inoltre stime del danno confrontabili con quelle ottenibili con tempi computazionali improponibili attraverso i metodi multiassiali di riferimento. Le procedure descritte, applicate al processo di delibera di una scocca di autovettura, hanno inoltre evidenziato alcune problematiche di cui si parlerà diffusamente nell’ultimo paragrafo di questo lavoro, totalmente dedicato alla presentazione dei risultati.

2. LA RICOSTRUZIONE DELLO STATO TENSIONALE NELLA SIMULAZIONE MULTICORPO DI SISTEMI MECCANICI CON COMPONENTI FLESSIBILI

Grazie alle caratteristiche dei principali software per la modellazione e simulazione multicorpo o multibody è ormai consueto l’utilizzo di prototipi virtuali in cui vengono introdotti corpi caratterizzati da flessibilità distribuita utilizzando metodi di sintesi modale [5] e la possibilità di integrazione dei codici FEA con quelli MBS. Ciò permette ovviamente di simulare sempre più fedelmente il comportamento dinamico di strutture e componenti anche molto complessi, facendo intravedere sempre più la possibilità di circoscrivere il compito della verifica sperimentale [1]. La deformazione del componente strutturale flessibile viene

descritta dalla combinazione di una particolare famiglia di N modi $\tilde{\Phi}$. La potenzialità di tale approccio sta nella possibilità di poter simulare fedelmente sia le condizioni statiche che dinamiche del componente in termini di spostamenti e deformazioni/tensioni semplicemente considerando un modello modale del corpo flessibile con un numero N di gradi di libertà molto piccolo rispetto al numero di quelli fisici di partenza.

La simulazione nel dominio del tempo consente così di ottenere le storie delle coordinate generalizzate $q(t)$ associate ai modi $\tilde{\Phi}$ del corpo flessibile. La ricostruzione della deformazione $\delta(t)$ del generico punto del componente espressa in termini di spostamento può essere così ottenuta mediante una banale operazione di sovrapposizione modale:

$$\delta(t) = \sum_{i=1}^n \tilde{\Phi}_i q_i(t) \quad (1)$$

ed, analogamente, avendo a disposizione le forme modali espresse in termini di tensione $\tilde{\Phi}^\sigma$, è possibile ottenere per ogni punto del componente il tensore dello stato tensionale $\sigma_{ij}(t)$:

$$\sigma_{ij}(t) = \sum_{k=1}^n \tilde{\Phi}_k^\sigma q_k(t) \quad (2)$$

Nel dominio della frequenza, sotto le ipotesi di sistema tempo-invariante multiple-input multiple-output (MIMO) con comportamento lineare, è possibile tuttavia, con uno sforzo computazionale molto ridotto, dare una rappresentazione in frequenza dello stato tensionale di un componente [3, 4], a partire dalla definizione degli ingressi nella forma di matrice PSD. A partire dalla linearizzazione del sistema in forma state-space, con determinati ingressi e come uscite le coordinate generalizzate q del componente flessibile è possibile ottenere dalla matrice PSD degli ingressi G_x , con semplici passaggi, la matrice PSD S del tensore di tensione (in generale di dimensioni 6×6) dell' i -esimo elemento o nodo del modello:

$$S = \tilde{\Phi}^\sigma \cdot \left[H_q^* \cdot G_x \cdot H_q' \right] \cdot \tilde{\Phi}^{\sigma'} \quad (3)$$

Nella precedente relazione (3) con H_q viene indicata la matrice delle funzioni di risposta in frequenza ingresso uscita (quest'ultima espressa come affermato precedentemente in termini di coordinate generalizzate) ed ottenibile banalmente dal modello linearizzato del sistema, con $\tilde{\Phi}^\sigma$ sono rappresentate le forme modali dell' i -esimo elemento o nodo del modello espresse in termini di tensione (2), con l'apice $*$ si intende il coniugato complesso mentre con l'apice $'$ si indica la matrice trasposta. Il termine tra parentesi quadre rappresenta niente altro che la matrice PSD G_q delle coordinate generalizzate (matrice definita Hermitiana) definibile direttamente a partire dal modello linearizzato del sistema. Il calcolo della matrice PSD di tensione consiste quindi, una volta nota la matrice PSD degli ingressi, in un semplice prodotto matriciale che viene svolto in pochi istanti da qualsiasi calcolatore, anche quando il sistema ed il componente in esame presenta un elevato numero di gradi di libertà.

Avendo la possibilità di definire degli ingressi che rappresentano in maniera corretta la distribuzione stocastica del fenomeno, le tensioni in uscita avranno conseguentemente il corretto contenuto in frequenza congruente con la dinamica dell'intero sistema.

3. STIMA DEL DANNEGGIAMENTO A FATICA NEL DOMINIO DEL TEMPO E NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA

La conoscenza del tensore di tensione $s(t)$ in ogni elemento o nodo del modello o, in maniera equivalente, della matrice PSD delle componenti del tensore stesso $S(\omega)$ è il punto di partenza per gli algoritmi preposti, nei due diversi domini, alla valutazione del danno causato da una particolare condizione di carico sul componente meccanico. È necessario ricordare che tradizionalmente un metodo per la stima del danneggiamento viene pensato e definito nel dominio del tempo e solo successivamente tradotto nella sua corrispondente forma *frequency-domain*. E' altresì utile soffermarsi sul fatto che non sempre tale traduzione risulta immediata e spesso non definibile in forma chiusa arrivando a stabilire solo una relazione notevolmente approssimata. Tale situazione estrema si verifica ovviamente all'aumentare del grado di complessità dei presupposti teorici alla base del criterio di stima del danno. Tuttavia, è fondamentale sottolineare che, nei casi in cui la trasposizione in frequenza ha successo, l'applicazione computazionale del metodo ne beneficia notevolmente grazie alle ben note proprietà di sintesi del dominio della frequenza rispetto a quello temporale.

In generale lo stato tensionale $s(t)$ assume la ben nota forma simmetrica con tutte le componenti non nulle; è tuttavia spesso accettata e adottata in letteratura la semplificazione di considerare tensori piani [6], in base all'evidenza sperimentale che la rottura a fatica avviene sulla superficie del pezzo considerato [7-8]. Sotto tale ipotesi la fase di ricostruzione dello stato tensionale porterà alla definizione di tre componenti distinte e quindi di una matrice ridotta $S(\omega)$ di dimensione 3×3 .

Nel panorama dei criteri multiassiali ad oggi presenti in letteratura, in questo lavoro si è deciso di selezionare quelli che mostrano maggiore propensione all'integrazione in un codice di calcolo iterativo, con l'obiettivo di evidenziare i differenti tempi di calcolo necessari all'ottenimento del risultato e nel contempo il grado di affidabilità dello stesso. Ciò che trasparirà evidente da tale selezione sarà la capacità del dominio della frequenza di abbattere i ragguardevoli tempi di calcolo propri dell'algoritmo nel dominio del tempo. Ciò risulterà tanto più evidente dall'applicazione di tali criteri ad un caso di interesse industriale, argomento dell'ultimo paragrafo di tale memoria.

Tralasciando alcune rappresentazioni monoassiali che, pur essendo a volte implementate nei codici LFC (dedicati alla valutazione del comportamento a fatica), mostrano evidenti problematiche teoriche che pongono dubbi sulla loro capacità di interpretare correttamente la fisica del fenomeno (tensione di *von Mises*, tensione principale massima, ...), di seguito viene effettuato un percorso fra i metodi multiassiali in cui va gradualmente crescendo l'accuratezza e la corretta individuazione delle variabili fondamentali alla base del processo di rottura per fatica

3.1 Il criterio del Rainflow multiassiale

La naturale estensione del conteggio rainflow ad uno stato di tensione multiassiale consiste nell'effettuare l'estrazione dei cicli di fatica con il classico algoritmo dei tre o quattro punti [9] su tutte le time histories derivanti dalla combinazione lineare delle componenti del vettore di tensione s , che nel caso biassiale assume la forma $s = (s_x, s_y, s_{xy})$. L'idea è quindi quella di trovare il danneggiamento massimo su tali combinazioni:

$$s_{mrf}(t) = c_1 s_x(t) + c_2 s_y(t) + c_3 s_{xy}(t) \quad (4)$$

con c_1, c_2, c_3 appartenenti alla sfera di espressione:

$$\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} = 1$$

Ovviamente nel caso più generale si hanno sei componenti di tensione e quindi la combinazione lineare va effettuata sull'ipersfera di dimensione 6. Il caso biassiale, oltre ad essere fisicamente più significativo, si presta anche ad una immediata visualizzazione della distribuzione dei danneggiamenti fra le diverse terne (c_1, c_2, c_3) , definita *sfera del danno* un esempio della quale è mostrato in figura 1. Ogni punto della sfera individua una combinazione mediante i coseni direttori della normale alla sfera nel punto considerato. Pur non avendo immediato significato fisico, il metodo del rainflow multiassiale viene utilizzato frequentemente per l'individuazione delle zone critiche del componente. Una formulazione in frequenza del metodo è facilmente deducibile da elementari relazioni che legano PSD e funzione di autocorrelazione dei processi random [10]. Dalla (4):

$$\phi_{mrf}(\omega) = \sum_{i,j} Q_{ij} S_{ij}(\omega) \quad (5)$$

In cui S_{ij} è il termine della matrice PSD delle componenti di tensione $\mathbf{S}(\omega)$, mentre Q_{ij} è il termine della matrice della combinazione lineare delle componenti Q , espressa da:

$$Q = \begin{pmatrix} c_1^2, c_1c_2, c_1c_3 \\ c_1c_2, c_2^2, c_2c_3 \\ c_1c_3, c_2c_3, c_3^2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

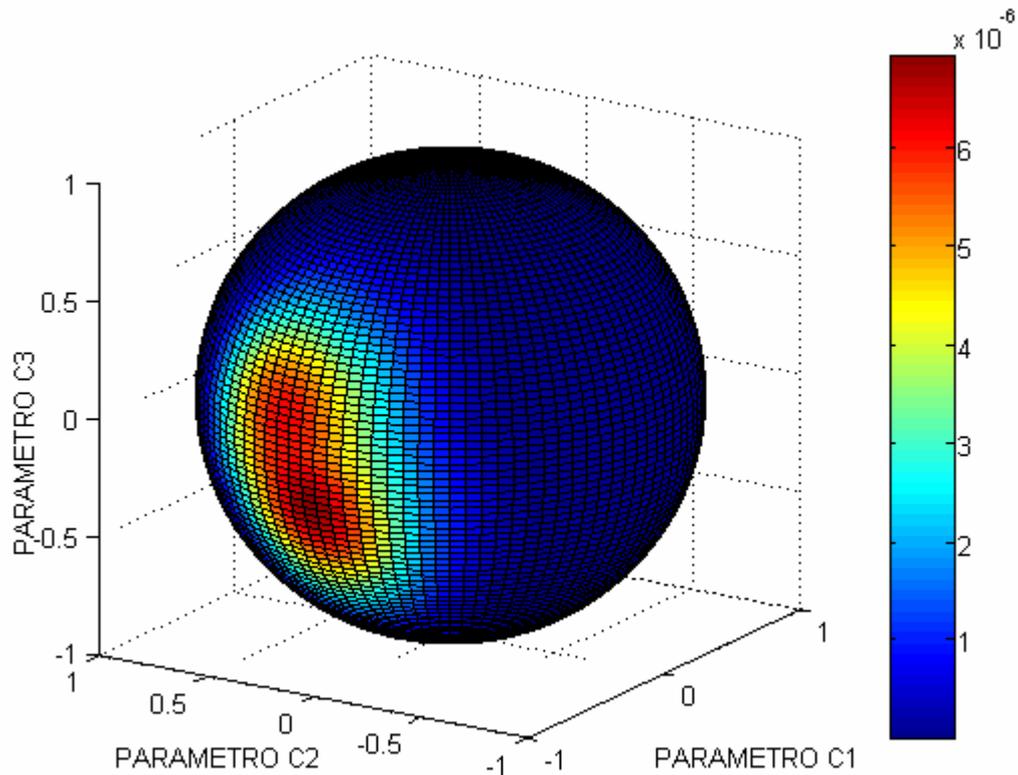


Figura 1 Rappresentazione del danno calcolato con rainflow multiassiale: sfera del danno

Anche la (5) viene computata per ogni combinazione (c_1, c_2, c_3) , ed il danno associato deve essere valutato ricostruendo la *pdf* dell'ampiezza dei cicli di fatica con un apposita formulazione scelta fra quelle presenti in letteratura [21]. In questo lavoro viene proposta ed utilizzata la formula di Dirlik [11]. A livello computazionale il rainflow multiassiale nel dominio del tempo è molto laborioso: i tempi di calcolo crescono col quadrato del grado di risoluzione scelto per monitorare tutte le possibili giaciture della sfera, ed esponenzialmente rispetto alla durata delle time histories del tensore di tensione. Ovviamente quest'ultima causa di complessità viene annullata utilizzando la forma frequency-domain che sostituisce il conteggio dei cicli con una rapida valutazione della formula di Dirlik.

3.2 Il criterio "critical plane": criterio di Mataka

I metodi del tipo "critical plane" si basano sull'individuazione di un particolare piano (giacitura) su cui vengono raggiunte condizioni estreme dello stato di tensione. Possono essere espressi dalla combinazione lineare fra una grandezza rappresentativa dello sforzo tangenziale e da una rappresentativa dello sforzo normale su tale piano [12].

Usati essenzialmente per valutare la resistenza o meno a vita infinita, secondo la rappresentazione di figura 2, possono essere utilizzati in senso generalizzato per la stima a vita definita, determinando il numero di ripetizioni N^* di sequenze di tensione identiche in conseguenza delle quali si raggiunge la rottura a fatica. Sempre con riferimento alla figura 2, infatti, l'andamento della grandezza caratteristica del fenomeno deve essere tale da non intersecare la retta che delimita il dominio di resistenza per N ripetizioni, e la condizione limite per cui si ha la tangenza fra la retta e il percorso, individua il numero di ripetizioni N^* che porta a rottura.

Dato un tensore di tensione rilevato al variare del tempo t , in un intervallo di durata T , il criterio di Mataka [13] viene espresso dalla (7):

$$\frac{C_a^* + \alpha(s_{nm}^* + s_{nm}^*)}{\beta} \leq 1 \quad (7)$$

La (7) sintetizza analiticamente quanto espresso in figura 2. La grandezza C_a^* è quella che secondo Mataka risulta decisiva nel fenomeno della fatica multiassiale. Essa viene definita come:

$$C_a^* = \max(C_a(n)) = \max_n \left(\max_t \|\tau_n(t) - \tau_{nm}(t)\| \right) \quad (8)$$

Nella (8) il massimo (per $0 < t < T$) fra parentesi a secondo membro della relazione rappresenta l'ampiezza della tensione tangenziale sul generico piano Δ . Massimizzando tale grandezza su tutte le giaciture si ottiene l'ampiezza massima della tensione tangenziale, che va ad individuare il piano critico. Tornando alla (7), le quantità s_{nm}^* e s_{na}^* possono a questo punto essere calcolate rispettivamente come valor medio e ampiezza della tensione normale agente durante l'intervallo di tempo T sul piano critico (fig.3). Infine α e β sono i parametri che traducono l'influenza del comportamento del materiale, cioè dei suoi limiti di resistenza nelle prove di flessione alterna e torsione alterna. Si ha infatti:

$$\alpha = \left(\frac{2t_{-1}(N)}{f_{-1}(N)} \right) - 1, \beta = t_{-1}(N) \quad (9)$$

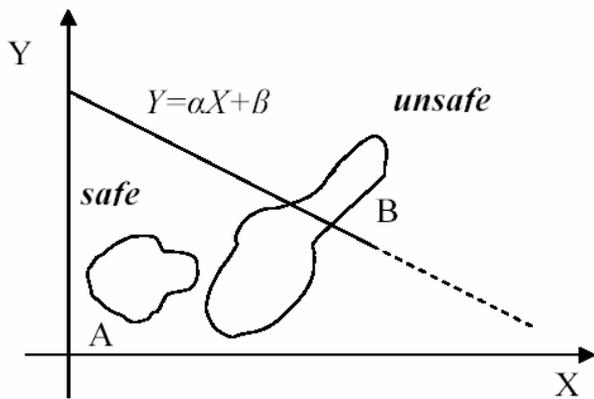


Figura 2 *Dominio di resistenza: percorso di carico in sicurezza (A) e non in sicurezza (B)*

La complessità computazionale del metodo di Matake nel dominio del tempo risiede nella ricerca del piano critico che, ancora una volta, richiede tempi di calcolo proibitivi all'aumentare del numero di piani considerati. La stessa definizione dell'ampiezza della tensione tangenziale τ_a , che si avvale del raggio del minimo cerchio circoscritto ψ al percorso della tensione tangenziale sul piano Δ , non è univoca e negli anni sono state sviluppate procedure atte a ridurne i tempi di valutazione. Tuttavia, i tempi di calcolo rimangono proibitivi, specialmente nel caso di

numerosi elementi da sottoporre ad analisi. Anche in questo caso la traduzione in frequenza, nella forma implementata da Preumont [6] e riportata in appendice, risolve notevolmente gli oneri computazionali, rendendo trascurabili i tempi necessari all'individuazione del piano critico.

I metodi "critical-plane" mostrano i migliori risultati se applicati a situazioni in cui la variabilità delle direzioni principali è limitata ad un intervallo angolare ristretto. Quando il range di variazione assume valori troppo estesi forniscono prestazioni migliori i metodi agli invarianti della tensione o "stress invariants".

3.3 I metodi "stress invariants": criterio di Crossland

I metodi agli invarianti della tensione [12] hanno rispetto a quelli della classe precedente un evidente vantaggio in relazione ai tempi di calcolo. Infatti, non è necessario monitorare grandezze su tutti i piani allo scopo di valutare condizioni di massimo, ma le variabili

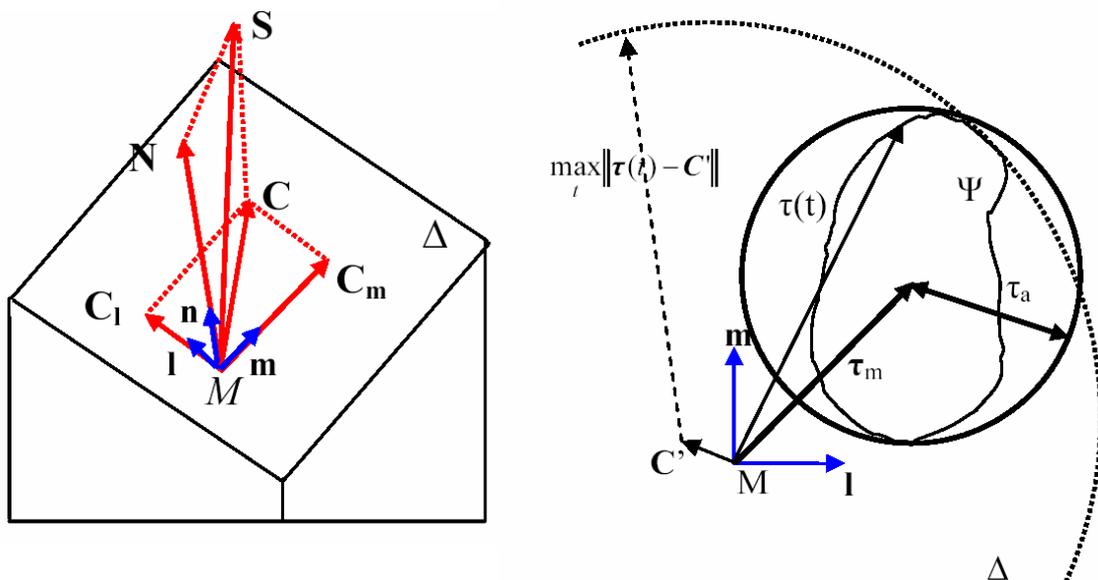


Figura 3 *Rappresentazione del piano di ampiezza massima della tensione tangenziale*

fondamentali del fenomeno sono deducibili nel riferimento di partenza in quanto funzione degli invarianti della tensione. La forma generale di un metodo “stress invariants” è analoga alla (7). Il criterio da noi utilizzato è quello di Crossland [14], che si esprime secondo la (10). In essa il termine $\sqrt{J_{2,a}}$ è l’ampiezza del secondo invariante del deviatore di tensione.

$$\frac{\sqrt{J_{2,a}} + \alpha \max p(t)}{\beta} \leq 1, t \in [0, t] \quad (10)$$

Nel caso comune in cui le componenti del tensore di tensione sono a media nulla, e nell’ipotesi già discussa di stato biassiale di tensione, si può scrivere:

$$\sqrt{J_{2,a}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \max |s_c(t)|, t \in [0, t] \quad (11)$$

con:

$$s_c^2(t) = s_x^2(t) + s_y^2(t) - s_x(t)s_y(t) + 3s_{xy}^2(t) \quad (12)$$

Quindi la prima grandezza caratteristica del metodo è il massimo valore assunto dalla tensione di *von Mises*. Per quanto riguarda invece $p(t)$, rappresenta la parte idrostatica del tensore di tensione:

$$p(t) = \frac{1}{3} (s_x(t) + s_y(t)) \leq 1 \quad (13)$$

I parametri α e β anche in questo caso sono combinazioni delle curve di flessione e torsione alterna:

$$\alpha = \left(\frac{t_{-1}(N) - f_{-1}(N) / \sqrt{3}}{f_{-1}(N) / 3} \right) - 1, \beta = t_{-1}(N) \quad (14)$$

La traduzione in frequenza del metodo, anche questa proposta da Preumont [10], è riportata in appendice. Tuttavia in tal caso non si hanno evidenti vantaggi computazionali dato che sia nel tempo che in frequenza ci si riconduce a trovare il massimo di due vettori temporali.

3.4 I metodi mesoscopici: criterio di Papadopoulos

I criteri mesoscopici nascono dall’opera di Dang Van [15], secondo cui la dimensione corretta per lo studio del fenomeno della fatica è la scala mesoscopica, quella relativa ad un volume elementare che contiene pochi grani del materiale. La grandezza fondamentale per l’approccio mesoscopico è la tensione tangenziale risolta T_a (τ_a in figura 4), cioè l’ampiezza della componente della tensione tangenziale secondo una fissata direzione, che è proporzionale alla deformazione plastica accumulata in tale direzione. Quando la deformazione, e quindi T_a , superano un determinato valore, le dislocazioni presenti si dispongono secondo piani di scorrimento preferenziali a formare micro fessure. La propagazione di tali micro fessure è favorita inoltre dall’entità della tensione normale agente sulle cricche.

Il criterio di Papadopoulos [16] è sintetizzato dalla relazione seguente:

$$\frac{\sqrt{\overline{T_a^2}} + \alpha \max p(t)}{\beta} \leq 1, t \in [0, t] \quad (15)$$

Ancora una volta $p(t)$ è la componente idrostatica del tensore di tensione che Papadopoulos mostrò essere uguale al valor medio dell'ampiezza della tensione normale agente su tutti i piani. $\overline{T_a^2}$ è invece il valore quadratico medio della tensione tangenziale risolta su tutte le direzioni di tutti i piani materiali passanti per il punto:

$$\sqrt{\overline{T_a^2}} = \sqrt{5} \sqrt{\frac{1}{8\pi^2} \int_{\gamma=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi} \int_{\chi=0}^{2\pi} (T_a(\gamma, \phi, \chi))^2 d\chi \sin \phi d\phi d\gamma} \quad (16)$$

I parametri relativi al materiale sono ancora esprimibili attraverso le curve di resistenza a flessione e a torsione alterna:

$$\alpha = \left(3 \frac{t_{-1}(N)}{f_{-1}} - \sqrt{3} \right) - 1, \beta = t_{-1}(N) \quad (17)$$

Il criterio di Papadopoulos è ad oggi uno dei metodi multiassiali di maggiore affidabilità. Sarà quindi il termine di riferimento per le stime di danneggiamento effettuate in seguito. Avendo tuttavia alcune caratteristiche tipiche di criteri "critical plane", quali la necessità di "spazzolare" tutte le direzioni di tutti i piani materiali per effettuare un'operazione di media quadratica, tale metodo mostra tempi computazionali improponibili per le prime fasi della progettazione, mentre fornisce stime di affidabilità massima, ed è quindi lo strumento ideale

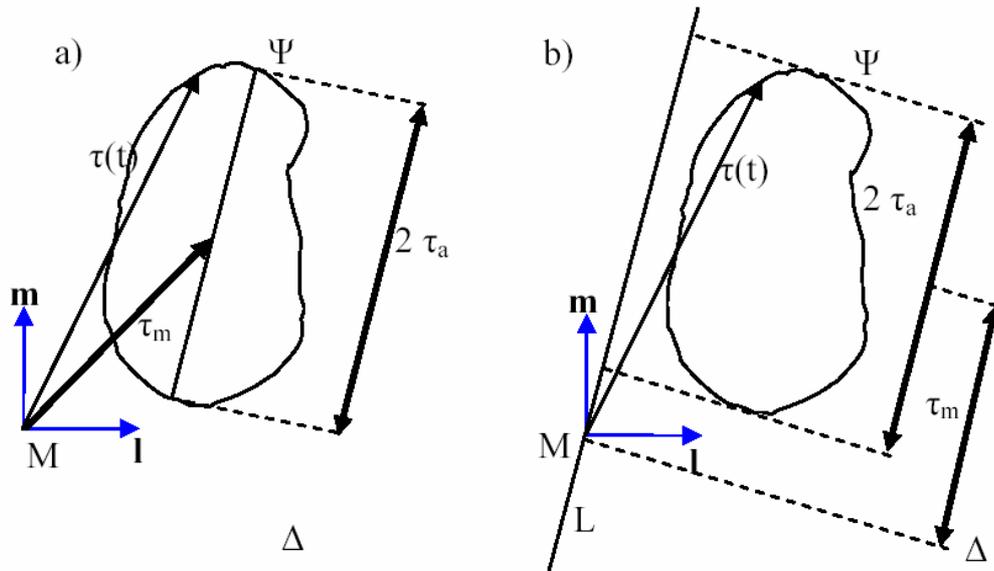


Figura 4 Valutazione della tensione tangenziale risolta τ_a sul piano Δ col metodo della corda (a) e metodo della massima lunghezza della proiezione su una linea L passante per l'origine (b)

per una valutazione finale, circoscritta a piccole zone “critiche”, preliminarmente o addirittura sostitutiva della fase di verifica sperimentale. Non esistendo una traduzione in frequenza comprovata del metodo, è oltretutto impossibile annullare gli oneri dovuti all’analisi delle direzioni di scorrimento mediante la valutazione di grandezze medie, conservando il grado di affidabilità proprio del dominio del tempo.

4. APPROCCI MULTIASSIALE E MONOASSIALE EQUIVALENTE

Nel caso particolare di stato di tensione monoassiale le difficoltà di valutazione e, soprattutto, i tempi di calcolo diminuiscono drasticamente. Il conteggio rainflow nel dominio del tempo su una singola componente ha affidabilità comprovata e gli unici limiti sono quelli legati alla durata dei segnali temporali da processare, che deve essere elevata per garantire una convergenza delle proprietà statistiche [20]. Anche il procedimento in frequenza, pur presentando le problematiche di traduzione dell’algoritmo di rainflow, ha a disposizione diverse formulazioni per la stima della *pdf* dell’ampiezza dei cicli di fatica [21] che si adattano anche alle caratteristiche del processo random associato. Da questo punto di vista appare risolto il problema di trasposizione del processo *narrow-band* per mezzo della formula di Bendat [17], mentre non mostra la stessa affidabilità la trattazione dei processi bimodali, un’altra classe di fenomeni molto frequenti nella esperienza, caratterizzati dalla presenza nel processo di tensione del contributo di solo due modi di vibrare della struttura. Tuttavia alcune relazioni, fra cui sicuramente la migliore è la formula di Dirlik [11], forniscono risultati contraddistinti da un buon grado di attendibilità. La figura 5 [20] a tale proposito mostra gli errori commessi da alcuni metodi in frequenza per la stima del danno a partire dalla conoscenza della PSD dell’unica componente di tensione. È evidente come la formula di Dirlik mostri errori percentuali sul danno contenuti per un’ampia classe di segnali bimodali, di entità sicuramente accettabile nella fase iniziale della progettazione. Purtroppo però lo stato monoassiale ha frequenza molto limitata nei casi reali. L’utilizzo della teoria monoassiale rimane quindi circoscritta a poche condizioni standard di interesse relativo.

Tuttavia, in questa sede, è nostro interesse evidenziare la possibilità di ricondurre la matrice PSD delle componenti del tensore ad un’unica funzione di densità spettrale di potenza, sostanzialmente equivalente dal punto di vista del contenuto danneggiante. In pratica viene generalizzata al dominio della frequenza la definizione di tensione equivalente di *von Mises*, [3-4, 21] risolvendo alcune problematiche che sorgono dal carattere quadratico della formulazione classica nel dominio del tempo. Sotto l’ipotesi di stato di tensione piano la tensione di *von Mises* s_c è definita da:

$$s_c^2(t) = s_x^2(t) + s_y^2(t) - s_x(t)s_y(t) + 3s_{xy}^2(t) \quad (18)$$

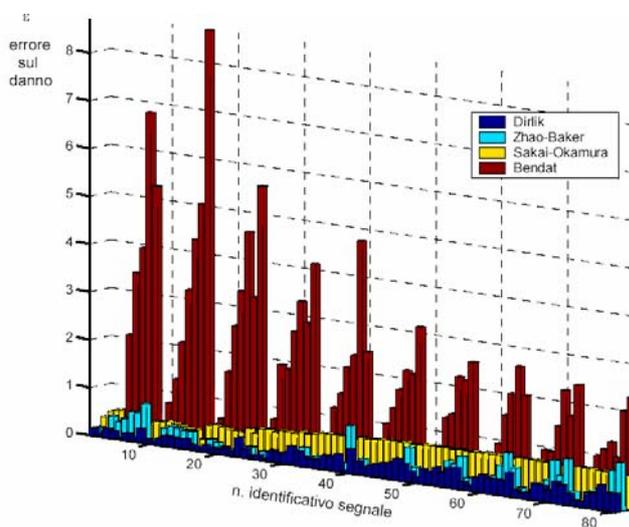


Figura 5 Confronto dell’errore di diversi metodi monoassiali in frequenza su differenti processi bimodali (tratta da [20])

Tale processo non può essere utilizzato per una stima in senso monoassiale classico del danno poiché non mantiene alcune importanti caratteristiche dei processi relativi alle componenti del tensore di tensione s . Infatti, se $s_x(t)$, $s_y(t)$, $s_{xy}(t)$ sono processi gaussiani a media nulla $s_c(t)$ non risulta un processo gaussiano a media nulla ed, inoltre, essendo definito sempre positivo viene perso il significato di ciclo alterno. Infine il contenuto in frequenza della (18) non è congruente con quello delle componenti del tensore di tensione. Tali lacune nella definizione in senso classico possono essere colmate assegnando alla (18) un significato in termini di valor medio e trasformando il processo aleatorio nel dominio della frequenza secondo la teoria di Preumont [10]. Si può scrivere infatti:

$$s_c^2 = s^t \cdot \mathbf{Q} \cdot s = Trace\{\mathbf{Q}[ss^t]\} \quad (19)$$

In cui la \mathbf{Q} viene definita nella forma:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

La (18) è un processo aleatorio con valore atteso fornito dalla relazione seguente:

$$E[s_c^2] = Trace\{\mathbf{Q}E[ss^t]\} \quad (21)$$

$$E[ss^t] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}(\omega) \cdot d\omega \quad (22)$$

Nella (21) il valore atteso a secondo membro è la matrice di covarianza del tensore di tensione, che può essere ottenuta integrando la matrice $\mathbf{S}(\omega)$ degli autospettri e crosspettri delle componenti del tensore di tensione. Per definizione si ha che:

$$E[s_c^2] = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) \cdot d\omega \quad (23)$$

Combinando la (21) e la (23) si ha che:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) \cdot d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} Trace\{\mathbf{Q}\mathbf{S}(\omega)\} \cdot d\omega \quad (24)$$

Dalla (24) può quindi essere definito un processo gaussiano a media nulla avente la PSD:

$$G(\omega) = Trace\{\mathbf{Q}\mathbf{S}(\omega)\} \quad (25)$$

Il processo scalare definito nella (25) viene definito da Preumont come tensione equivalente di *von Mises* (*Equivalent von Mises Stress*). Tale definizione risolve esattamente tutte le problematiche proprie della definizione in senso quadratico classica: il processo è infatti gaussiano a media nulla se lo sono i processi componenti, si riduce a una tensione alterna nel caso di stato monoassiale con componente alterna ed ha contenuto in frequenza coerente con

quello della tensione. Inoltre la sua varianza coincide con quella della *von Mises* classica. Le basi teoriche che supportano tale definizione e ne suggeriscono l'adozione derivano dall'estensione in campo dinamico del ruolo della tensione tangenziale del piano ottaedrale, che è noto essere la grandezza che regola il fenomeno di rottura statica per i materiali duttili [18,21,22]. Il problema di fornire un segno a tale tensione viene risolto in questo modo mantenendo da una lato lo stesso contenuto di frequenze del tensore, dall'altro le proprietà statistiche della tensione tangenziale ottaedrale istantanea.

5. TEST CASE

Le metodologie fin qui descritte per la ricostruzione dello stato tensionale e della valutazione della vita a fatica sono state applicate alla procedura di delibera virtuale per prova "pavé" di una scocca automobilistica di generica autovettura assimilabile al segmento delle utilitarie [23]. L'attività è stata condotta sviluppando un modello multicorpo del veicolo integrato con un banco prova virtuale sviluppato dal gruppo di ricerca dell'Università degli Studi di Perugia per conto della società E.L.A.S.I.S. S.C.p.A. [24] il tutto sviluppato nel codice MSC.Adams.Car. La scocca è stata modellata nel codice MSC.Nastran [1] ed introdotta in ambiente multicorpo utilizzando la procedura di sintesi modale di Craig & Bampton [1, 5].

5.1 Modellazione e simulazione numerica

Il modello FEA di scocca è caratterizzata da 150124 nodi e 900744 gradi di libertà. La traduzione modale in ambiente MBS riduce il numero di gradi di libertà (coordinate generalizzate) a 110.

Il modello multicorpo della vettura è caratterizzato dalla presenza del motore, di sistemi di sospensione di tipo commerciale e di pneumatici anch'essi di uso comune. Il banco prova virtuale permette di comandare il moto dei piattelli in maniera indipendente in spostamento/velocità/accelerazione sia nel dominio del tempo che della frequenza [24]. Il modello MBS del sistema Scocca/Vettura/Banco è illustrato in figura 6.

Per la scelta degli ingressi espressi in termini di spostamento ci si è riferiti alla teoria di

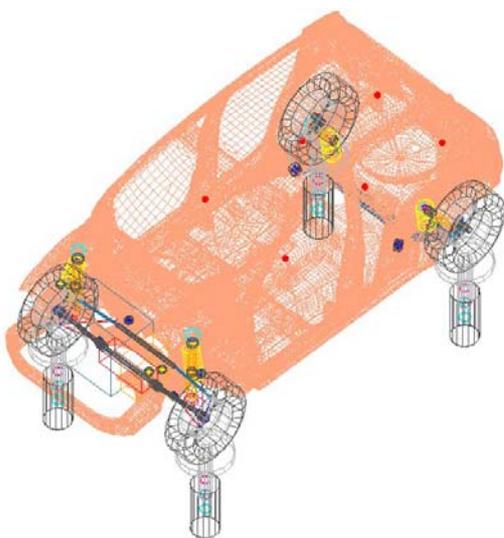


Figura 6 Modello MBS del sistema Vettura/Scocca/Banco

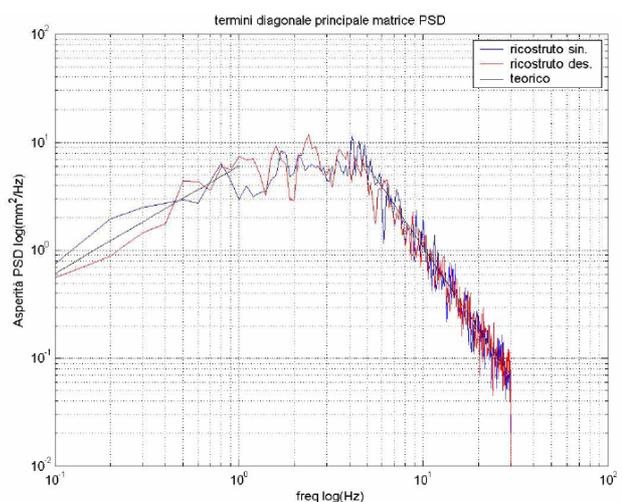


Figura 7 Funzione PSD dell'ingresso

Robson [25] assumendo una velocità di percorrenza v di 60 Km/h ed un grado di asperità superficiale medio alto descritto dal coefficiente caratteristico c considerato pari a $500 \cdot 10^{-8}$. Si è ipotizzata una completa scorrelazione tra gli ingressi del lato sinistro e destro. Tale scelta che ha portato alla definizione di una matrice PSD degli ingressi (di dimensioni 4×4) con i termini della diagonale principale uguali e riportati in figura 7 e con termini di cross-correlazione tali da rispettare il ritardo fra ruote anteriori e posteriori ovviamente funzione del passo della vettura. In figura 7, oltre alla PSD teorica di Robson (in nero), sono anche rappresentate le PSD valutate sui segnali da essa ricostruiti nel dominio del tempo (in blu e in rosso) ed applicati al lato sinistro e destro della vettura come input all'analisi transiente nel dominio del tempo. Al fine di garantire un livello elevato di coerenza tra ingresso ed uscita ed evitare così problematiche di *aliasing* [24] che spesso caratterizzano i risultati ottenibili da analisi di questo tipo (sollecitazioni aleatorie) è stato scelto un passo di integrazione pari a $5 \cdot 10^{-4}$ s.

Il tempo impiegato per eseguire un'analisi con ingressi definiti nel dominio del tempo, ricostruiti dalla matrice PSD di Robson e di durata pari a 60 s (durata tipicamente adottata in ambiente automobilistico per prove di tal genere) risulta di circa 6 ore.

Ai fini della stima del comportamento a fatica l'attenzione è stata focalizzata su alcune parti della scocca, zone, quali ad esempio i punti di attacco alle sospensioni anteriori (duomi) e posteriori, che l'esperienza insegna essere le più soggette all'innescò di cricche. In totale, sono stati selezionati circa 11000 elementi (fig.8) nella parte sinistra della scocca. Per tale insieme di elementi dalla procedura di sintesi modale è stata estratta la matrice modale delle forme di tensione $\tilde{\Phi}^{\sigma}$ utilizzando una serie di routine precedentemente sviluppate dagli autori [1, 5].

Il materiale considerato per la scocca è un acciaio con tensione di rottura a trazione S_{ut} pari a 450 MPa, tensione limite di flessione a fatica pari a 125 MPa e tensione limite di torsione a fatica pari a 72 MPa. Considerando come limite un numero di cicli N_e pari a $2 \cdot 10^6$ cicli. Si è fatta l'ipotesi di curve a pendenza costante prive di limite a vita indefinita

Prima di affrontare l'analisi delle simulazioni e dei risultati ottenuti è importante sottolineare come l'analisi transiente nel dominio del tempo richieda tempi di calcolo elevati (6 ore di calcolo per una simulazione di 60 secondi) per fornire comunque storie temporali delle

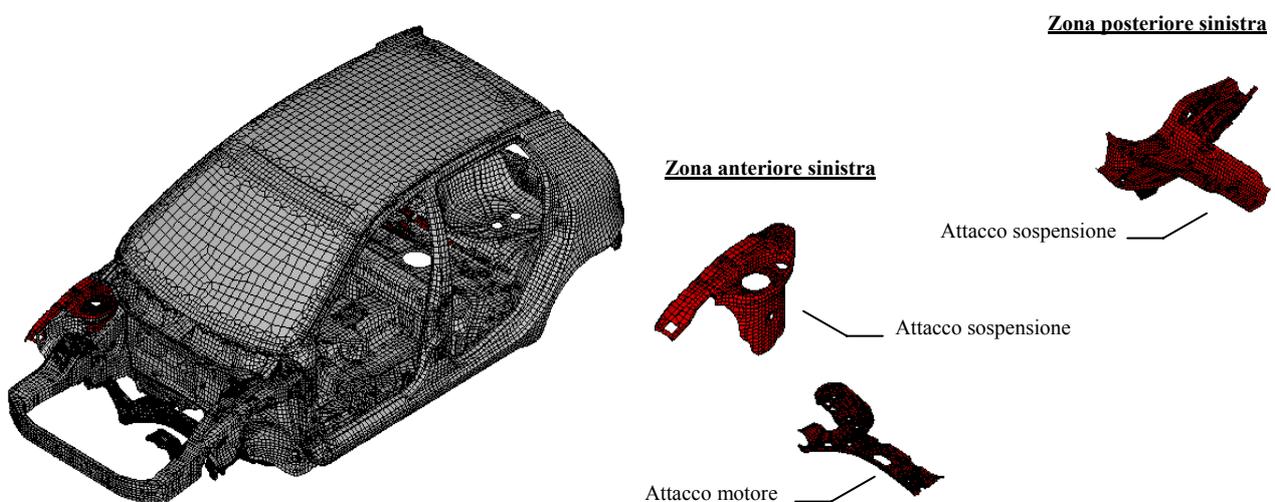


Figura 8 Rappresentazione del modello FEA della scocca (a sinistra) e della selezione di elementi considerata (a destra)

componenti del tensore non ancora stabilizzate dal punto di vista delle proprietà statistiche del relativo processo random. Gli autori in precedenti lavori [20] hanno mostrato in termini quantitativi l'incidenza della durata della storia temporale di un processo random di tensione monoassiale sulla convergenza del danno a fatica connesso al processo stesso, in termini di errore percentuale rispetto al valor medio stabilizzato. A tale proposito, osservando la figura 9, in cui in blu si ha la distribuzione cumulativa dei possibili danneggiamenti subiti da un elemento per unità di tempo per campioni di durata temporale di circa 60 s appartenenti allo stesso processo random, mentre in rosso la stessa funzione ma per campioni di durata pari a 6000 s, si può apprezzare come stimare il danno da una storia temporale estratta da un'unica analisi *time-domain* di 60 s per il processo in figura possa portare ad errori anche considerevoli.

Sarebbe quindi necessario utilizzare input di durata maggiore o mediare i risultati ottenuti con diversi campioni del processo in input, per avere un risultato con maggiore confidenza statistica. Sotto le ipotesi di linearità del sistema, l'approccio in frequenza garantisce invece un risultato più consistente nella forma di matrice PSD di tensione stabilizzata $\mathcal{S}(\omega)$ derivante da un semplice relazione matriciale che lega la matrice PSD degli ingressi con quella delle funzioni di risposta in frequenza del sistema e con la matrice delle forme modali di tensione. Il confronto fra i tempi di calcolo riportati in questo lavoro acquisisce maggior significato alla luce di tale valutazione.

Essendo di fatto eccessivamente oneroso sviluppare al calcolatore analisi di adeguata lunghezza o in alternativa una serie significativa di analisi di lunghezza inferiore, la fase successiva del presente studio, dedicata al confronto fra i metodi di valutazione precedentemente descritti in presenza di stati di tensione multiassiali, ha seguito la strada di ricostruire i risultati temporali a partire da quelli in frequenza.

Il processo random multidimensionale rappresentativo dello stato tensionale è quindi costituito dalla matrice di funzioni in frequenza $\mathcal{S}(\omega)$ di dimensioni 6×6 ottenibile dalla analisi in frequenza del sistema.

Il confronto è stato quindi effettuato fra la valutazione del comportamento a fatica svolta nel dominio della frequenza a partire direttamente dalla suddetta matrice ed utilizzando le traduzioni in frequenza dei metodi, note in letteratura, e la valutazione svolta nel dominio del tempo utilizzando le classiche definizioni dei metodi multiassiali a partire da tensori di tensione temporali ricostruiti con un algoritmo opportuno [10] a partire dalla stessa $\mathcal{S}(\omega)$.

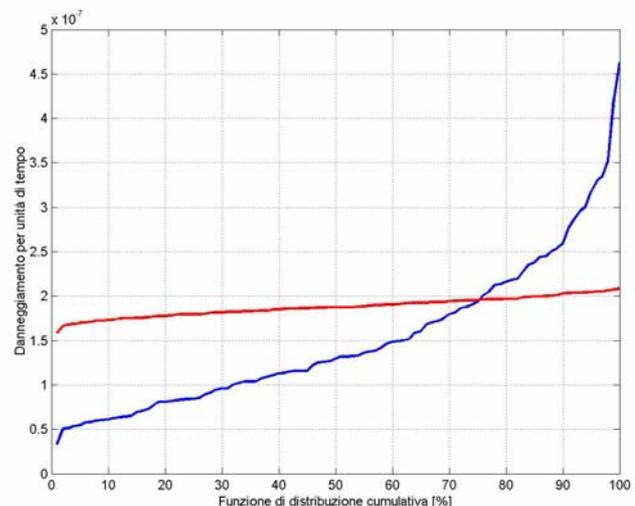


Figura 9 Esempio di convergenza del danno a fatica espressa in termini di distribuzione cumulativa per due diverse durate temporali dei campioni del processo (in blu 60 s, in rosso 6000 s)

5.2 I metodi multiassiali utilizzati

Al sottoinsieme di elementi di figura 8 sono stati applicati tutti i criteri multiassiali presentati nei paragrafi 3 e 4. E' stato ricostruito per ogni elemento un tensore temporale della durata di 500 s con un tempo di campionamento pari a $5 \cdot 10^{-3}$ s. Di seguito, per ognuno dei criteri, viene

brevemente esposta la procedura che ha portato ad effettuare la stima della vita a fatica.

5.2.1 Rainflow multiassiale. La stima è stata effettuata nel dominio del tempo e della frequenza ed è stata applicata la procedura descritta nel paragrafo 3.1 per 21^2 giaciture (combinazioni lineari). È stato quindi rilevato il danneggiamento per unità di tempo come massimo di quelli ottenuti applicando il conteggio rainflow e la regola di Miner su tutte le combinazioni lineari effettuate. L'operazione ha richiesto all'incirca 200 s di analisi per ogni elemento, ed è stata per questo limitata ad un sottocampione significativo di 300 elementi richiedendo una durata totale di circa 16 ore. Anche nel dominio della frequenza, in cui il conteggio rainflow è stato sostituito dall'utilizzo della formula di Dirlik [11], l'analisi è stata limitata al sottocampione, con un tempo di calcolo per elemento di 40 s (tempo totale pari a circa 4 ore).

5.2.2 Criterio di Matake. La stima è stata effettuata nel dominio del tempo e della frequenza, utilizzando la procedura descritta nel paragrafo 3.2. Anche tali analisi sono state limitate al sottocampione di 300 ed hanno richiesto per elemento all'incirca 80 s nel dominio del tempo e 20 s nel dominio della frequenza, considerando 21^2 giaciture, con un tempo totale di analisi di circa 7 ore nel tempo e di meno di 2 ore in frequenza.

5.2.3 Criterio di Crossland. In questo caso la stima è stata eseguita secondo la procedura di paragrafo 3.3. In tal caso è stato tuttavia possibile processare tutti gli elementi di figura 8 con tempi di calcolo per elemento pari a circa 1.6 secondi nel dominio del tempo e 0.4 s nel dominio della frequenza, per un tempo totale di analisi pari rispettivamente a circa 5 ore e a circa 1 ora.

5.2.4 Criterio di Papadopoulos. Trattandosi del criterio di riferimento, la stima effettuata con il criterio di Papadopoulos è stata effettuata cercando di ottenere la massima confidenza possibile del risultato. È stato quindi utilizzato un numero di giaciture pari a 41^2 per la valutazione del valor quadratico medio della tensione tangenziale risolta ed è stato utilizzato inoltre un processo di valutazione della vita più raffinato abbinato al conteggio rainflow [10]. Infatti il danno è stato cumulato associando un danneggiamento ad ogni ciclo elementare individuato attraverso un conteggio rainflow sulla tensione normale e sommando i danneggiamenti di ogni ciclo valutati secondo la procedura descritta in 3.4. Ovviamente l'efficacia della stima va in questo modo a discapito dell'efficienza computazionale, richiedendo circa 220 s per ogni elemento. È stato quindi possibile analizzare solo il sottocampione di 300 elementi con un tempo totale di analisi di circa 18 ore.

5.2.5 Tensione equivalente di von Mises. Tale criterio opera un'unica valutazione del danneggiamento per mezzo della formula di Dirlik applicata alla $G(\omega)$ dell'equazione (25). Il tempo di analisi per ogni elemento è all'incirca di 0.1 s ed è quindi richiesto un tempo totale di calcolo di circa 1300 s pari a poco più di 20 min. Tale metodo risulta quindi nettamente il più rapido fra quelli analizzati.

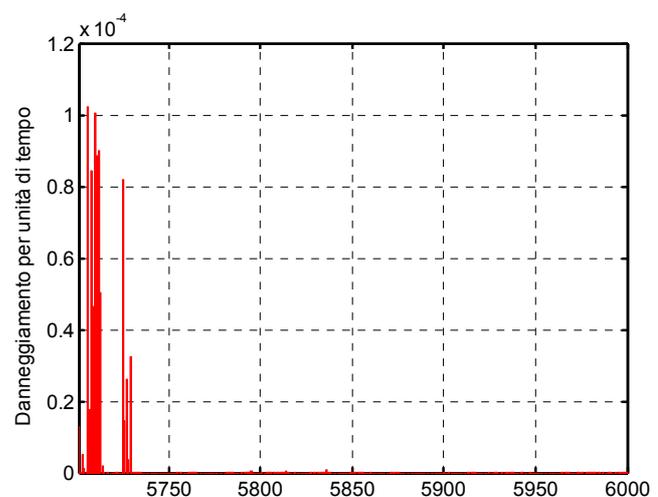


Figura 10 Danno valutato col metodo di Papadopoulos

5.3 Presentazione dei risultati

In figura 10 sono illustrati i risultati ottenuti utilizzando il metodo di Papadopoulos nel dominio del tempo che, come affermato in precedenza, rappresenterà il metodo di riferimento. In tale figura viene rappresentato il danneggiamento per unità di tempo per il sottocampione di 300 elementi (dal no. 5701 al no. 6000) contenente la zona maggiormente sollecitata e danneggiata della scocca. Come si può apprezzare solo i primi 50 elementi hanno un contenuto danneggiante significativo.

Nelle figure 11 e 12 vengono rappresentati i risultati ottenuti da tutti i metodi applicati nel dominio del tempo. Da queste si nota come il comportamento in termini di zone danneggiate ed entità del danneggiamento, espresso nell'unità di tempo, venga colto molto bene da tutti i metodi. Al fine di consentire un più facile confronto fra i metodi gli elementi sono rappresentati in forma matriciale senza riconducibilità immediata alla effettiva collocazione sulla scocca. Si può osservare come oltre all'individuazione della zona maggiormente danneggiata anche i valori numerici stimati per il danno nell'unità di tempo siano confrontabili con il metodo di riferimento. Infatti si va da un valore di danneggiamento massimo di $1.15 \cdot 10^{-4}$ stimato dal metodo di Mataka a un $8.4 \cdot 10^{-5}$ stimato dal metodo di rainflow multiassiale, mentre Papadopoulos fornisce un valore massimo di circa $1 \cdot 10^{-4}$.

L'ottima capacità dei metodi selezionati di indirizzare il progettista in maniera qualitativa verso le zone di maggiore propensione alla rottura a fatica, ma anche con un buon riferimento quantitativo, è ancora più evidente dalla figura 12, in cui sono raccolti i valori di danneggiamento ottenuti sugli elementi del sottocampione maggiormente sollecitati (dal no.5701 al no.5750).

Ciò dimostra come nelle prime fasi della progettazione l'utilizzo di un metodo snello dal punto di vista computazionale non inficia le finalità di tale fase. Ad esempio il metodo di

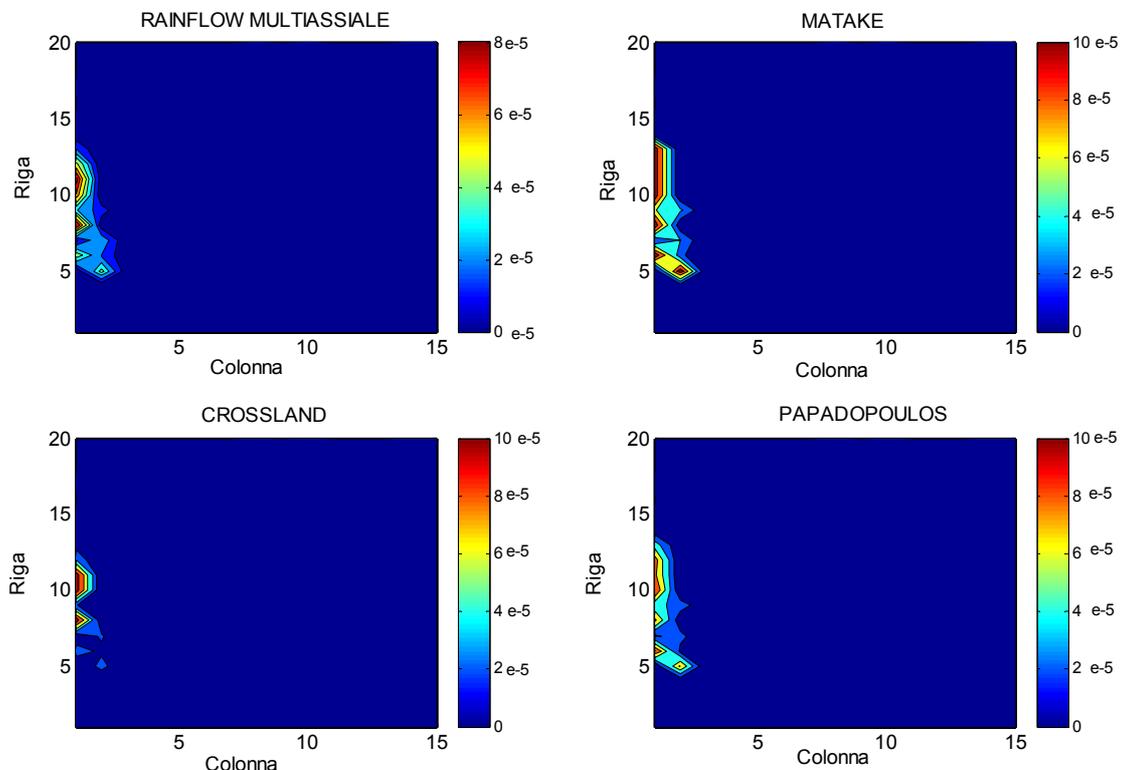


Figura 11 Confronto fra i metodi multiassiali nel dominio del tempo sugli elementi del sottocampione considerato (no.5701-no.6000)

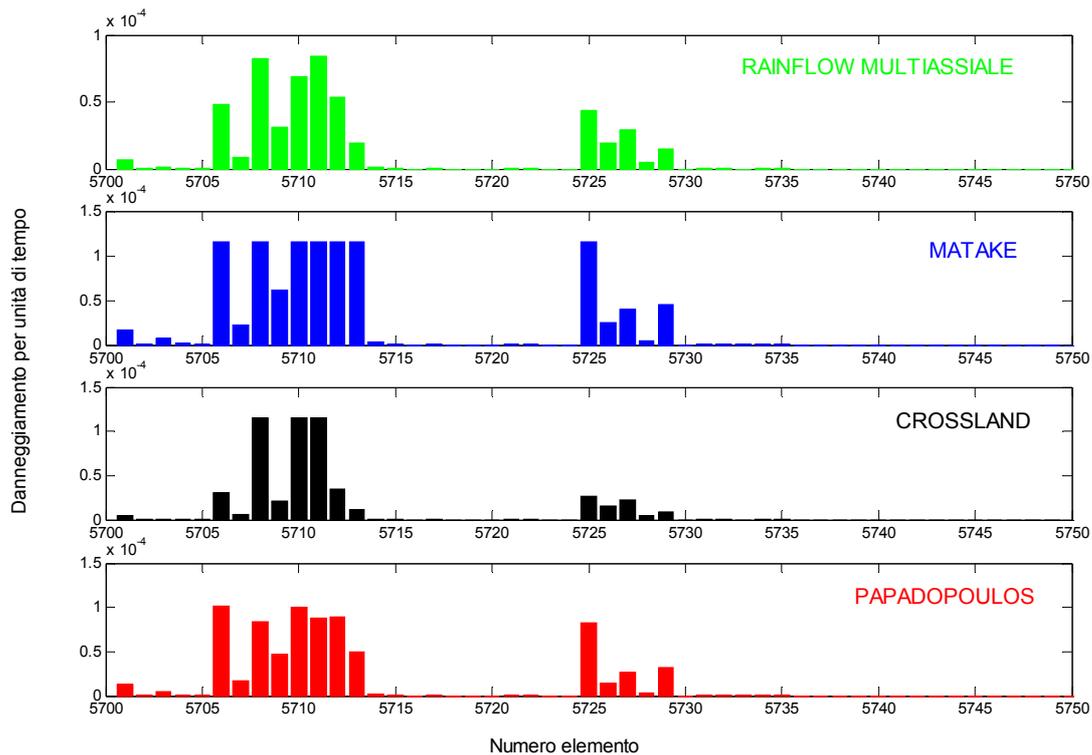


Figura 12 Confronto fra i metodi multiassiali nel dominio del tempo su alcuni elementi del sottocampione considerato (no.5701 - no.5750)

Crossland, che fra i metodi nel dominio del tempo è nettamente quello più rapido, confrontato con quello di riferimento non porta ad errori sensibili, anzi, le sue stime mostrano che le matrici PSD analizzate sono rappresentative di processi che le grandezze del metodo agli invarianti della tensione riescono a descrivere in maniera compiuta.

La traduzione del metodo di Crossland in frequenza allo stesso modo conduce a stime del danno che sono perfettamente in accordo con quanto valutato nel dominio del tempo. Infatti, osservando la figura 13, in cui in maniera analoga alla figura 11 il danneggiamento nell'unità di tempo di tutti gli 11000 elementi di figura 8 è rappresentato in forma matriciale, si nota come la distribuzione del danno sia praticamente identica.

Stesso tipo di confronto viene fatto in figura 14, nella quale vengono mappati i valori stimati per mezzo del processo monoassiale della tensione equivalente di *von Mises*. Come descritto in precedenza tale metodo è caratterizzato dalle migliori prestazioni computazionali; si nota come nel confronto con il metodo di Crossland (fig.13), seppur nell'ambito di andamenti anche percettibilmente differenti, le condizioni di massimo vengono colte oltre che in posizione anche quantitativamente. In questa condizione il metodo monoassiale equivalente mostra sostanzialmente un comportamento conservativo rispetto ai classici criteri multiassiali, essendo caratterizzato da una soglia di sensibilità più bassa in relazione alle variabili dello stato tensionale.

In figura 15, è presentato il confronto diretto fra il metodo di riferimento (Papadopoulos) e il metodo della *von Mises* equivalente sui 50 elementi contenenti l'elemento maggiormente danneggiato. Nell'ambito delle considerazioni fatte a proposito delle approssimazioni legate al problema della convergenza della stima nel dominio del tempo, può essere compreso come sia del tutto accettabile un fattore di incertezza pari a 5 ottenuto tra i due suddetti metodi (fig. 15) in questa fase della progettazione.

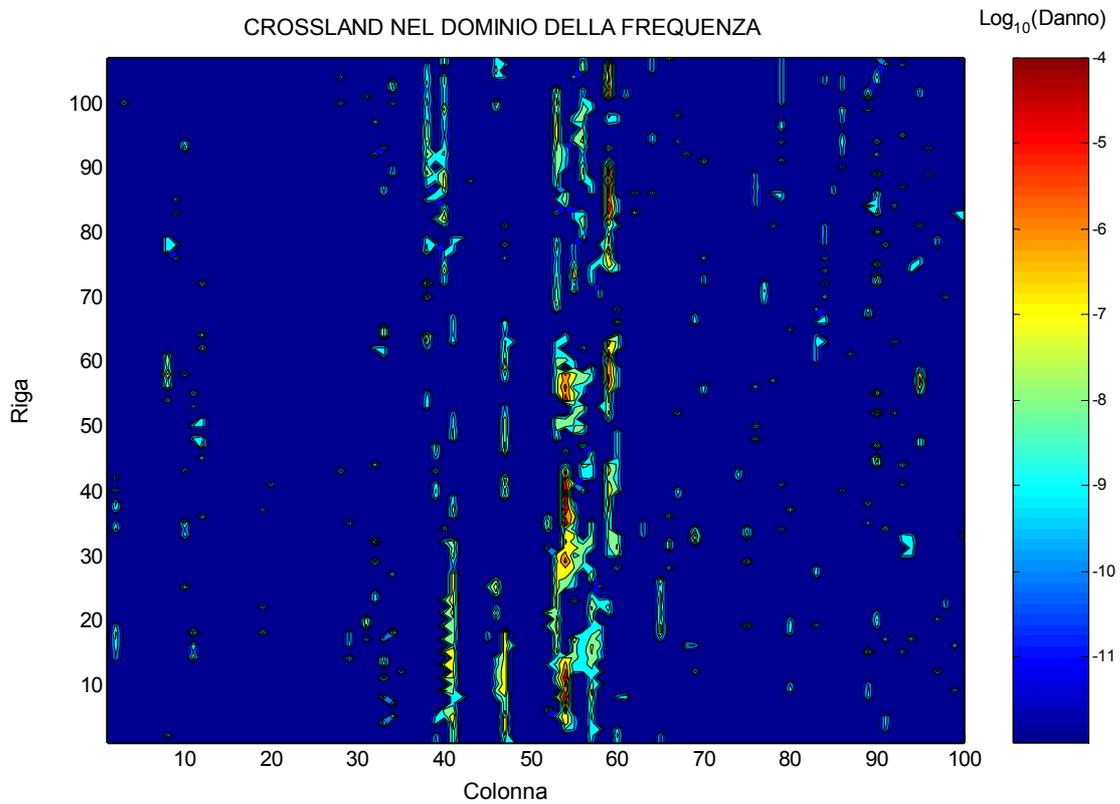
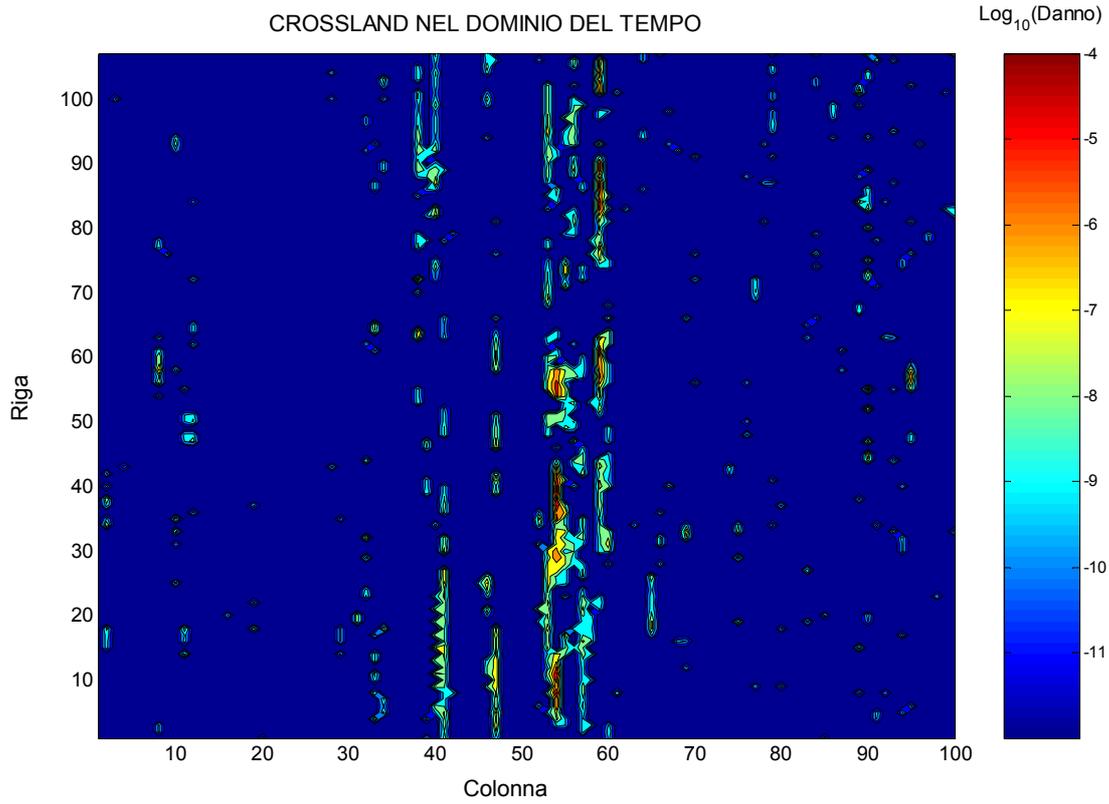


Figura 13 *Mappa del danneggiamento degli 11000 elementi considerati ottenuta con Crossland nel dominio della frequenza e del tempo*

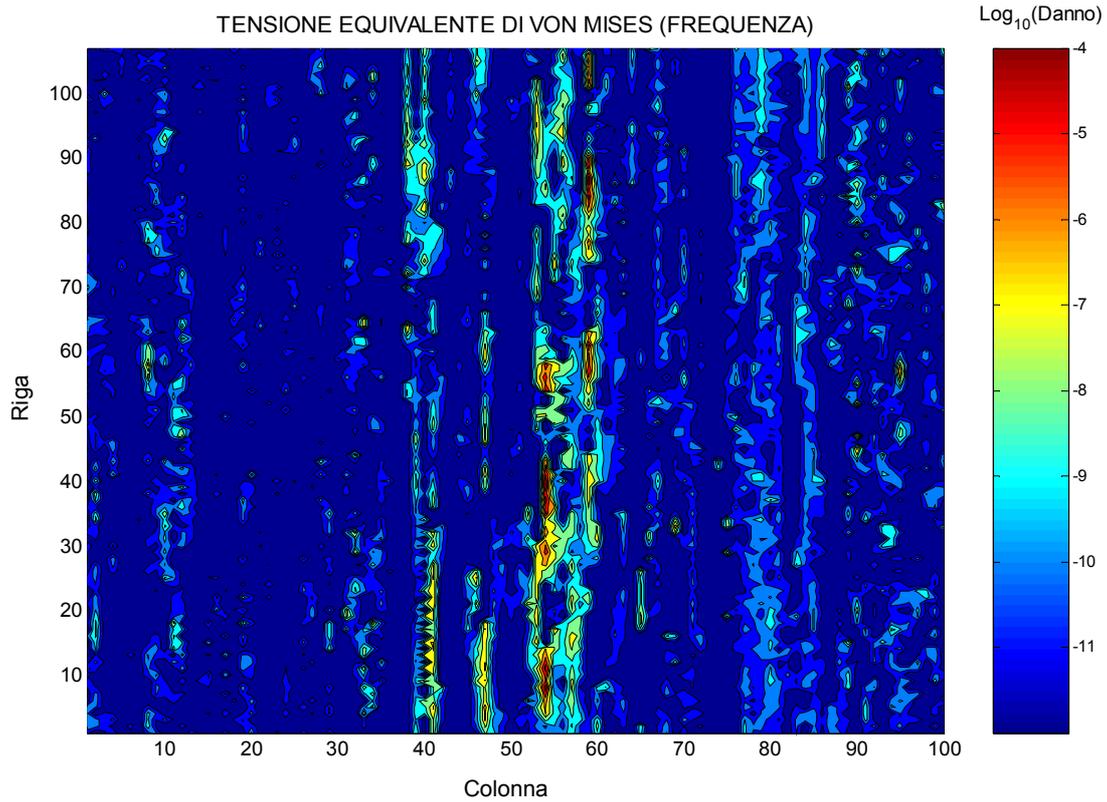


Figura 14 *Mappa del danneggiamento degli 11000 elementi considerati ottenuta con il metodo della tensione equivalente di von Mises*

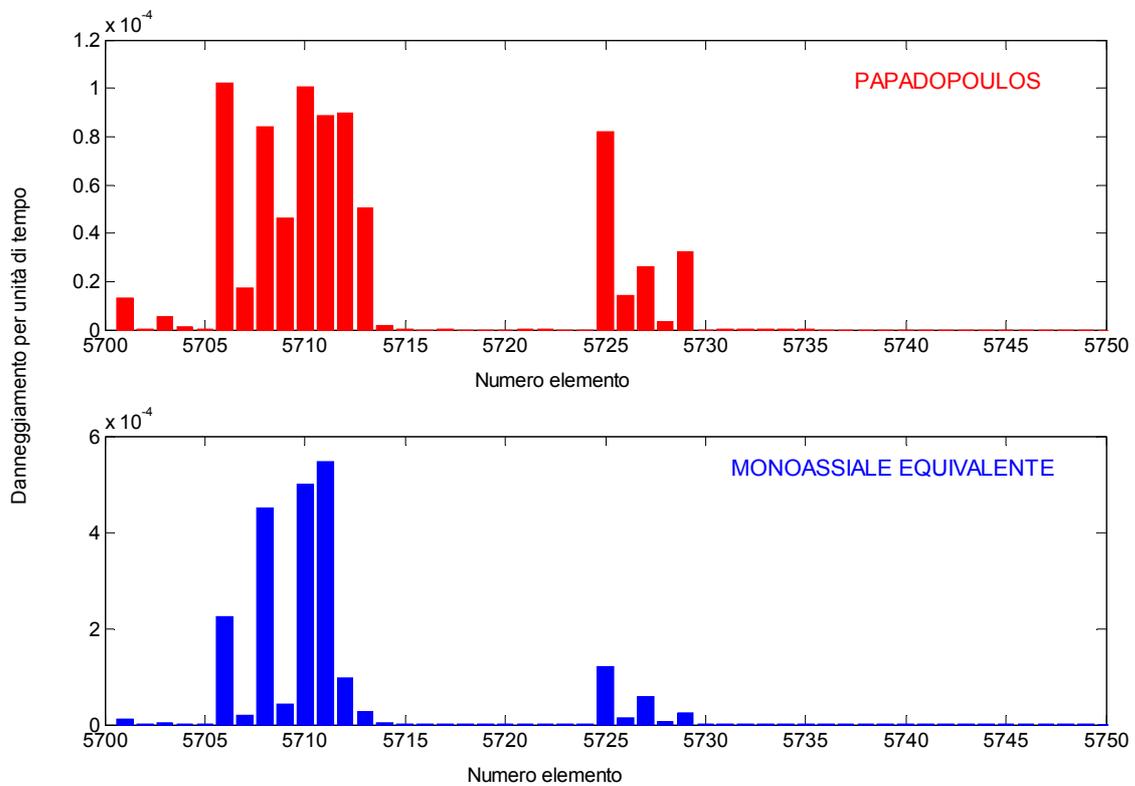


Figura 15 *Confronto in termini di danneggiamento fra il metodo di Papadopoulos e della tensione monoassiale equivalente di von Mises*

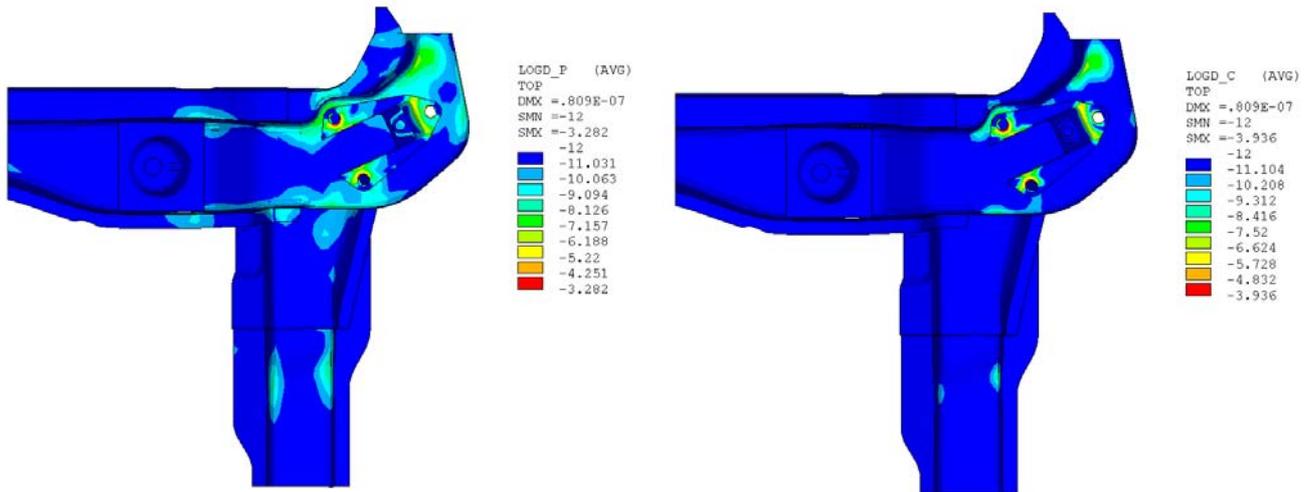


Figura 16 Confronto in termini di danneggiamento nell'unità di tempo rappresentato in scala logaritmica fra il metodo della tensione monoassiale equivalente di von Mises in frequenza (a sinistra) ed il metodo di Crossland in frequenza (a destra). La rappresentazione riguarda la zona posteriore sinistra con vista dal basso dell'insieme di elementi considerati per le analisi (fig.8).

In figura 16, infine, quanto rappresentato finora in forma matriciale, viene riportato sulla vera geometria del componente per mezzo di una visualizzazione del danneggiamento sul modello FEA confrontando i risultati ottenuti in termini di danneggiamento con i metodi di Crossland e von Mises equivalente utilizzati in frequenza sugli elementi della zona posteriore della scocca (fig.8). In tale zona sono contenuti i 300 elementi del sottocampione

CONCLUSIONI

L'obiettivo del presente lavoro era quello di mostrare come l'approccio in frequenza per la stima della vita a fatica fosse competitivo sotto tutti i punti di vista rispetto all'approccio classico *time-domain* nella fase di simulazione virtuale delle condizioni operative di un componente meccanico caratterizzato dall'ipotesi di essere lineare e soggetto all'azione di azioni esterne di tipo random stazionarie e gaussiane. A tale proposito, dopo un cenno ai presupposti teorici delle diverse metodologie a disposizione del progettista per l'analisi virtuale del componente scocca, è stato presentato un esempio applicativo che, pur contraddistinto da problematiche considerevoli, ha messo in luce i grandi vantaggi computazionali dell'approccio in frequenza. Sia nella fase di ricostruzione dello stato tensionale, sia in quella del post-processing utilizzando i metodi multiassiali, la procedura diretta in frequenza ha mostrato tempi di calcolo compatibili con tale step del design, in cui è importante avere strumenti flessibili e veloci nel verificare le continue modifiche dei parametri progettuali.

In questo ambito la minimizzazione dei tempi di calcolo può essere raggiunta per mezzo dell'integrazione, in un approccio diretto in frequenza, dell'algoritmo di stima del danneggiamento con il processo della tensione equivalente di von Mises. Infatti alla proprietà di snellezza computazionale l'algoritmo aggiunge una buona capacità di individuare le zone critiche e di cogliere l'ordine di grandezza della stime del danno valutato con i metodi classici di riferimento. Utilizzato quindi per effettuare una scelta ottimale delle variabili di progetto e per una selezione delle zone in cui effettuare una valutazione più raffinata, ed inoltre integrato

con strumenti atti a realizzare correttamente tale fase successiva, il metodo diretto in frequenza appare essere una via interessante per l'abbattimento dei tempi di messa a punto della soluzione costruttiva finale, consentendo di circoscrivere sempre di più alla sola fase finale il ruolo della verifica sperimentale sul prototipo fisico.

Bibliografia

- [1] Braccesi C., Cianetti F. (2005), "A procedure for the virtual evaluation of the stress state of mechanical systems and components for automotive industry: development and experimental validation", *Journal of Automobile Engineering*, Vol. 219, pp. 633-643;
- [2] Braccesi C., Cianetti F., Manara G. (2003), "Problematiche di progettazione a fatica di giostre: sviluppo di una procedura di valutazione del danneggiamento in ambiente di simulazione multicorpo", *Atti del XXXII Convegno Nazionale AIAS*, Salerno, Settembre 2003;
- [3] Braccesi C., Cianetti F., Landi L. (2005), "Random loads fatigue. The use of spectral methods within multibody simulation". *Accettato per la presentazione al 20th Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise (VIB), ASME 2005 IDETC/CIE*, Long Beach (CA) 24-28 settembre 2005;
- [4] Braccesi C., Cianetti F. (2003), "Comportamento a fatica di componenti meccanici soggetti a sollecitazioni random: sviluppo di un metodo di valutazione di PSD di tensione in ambiente di simulazione multicorpo", *Atti del XXXII Convegno Nazionale AIAS*, Salerno, Settembre 2003;
- [5] Braccesi C., Cianetti F. (2004), "Development of selection methodologies and procedures of the modal set for the generation of flexible body models for multibody simulation". *Journal of Multi-Body Dynamics*, Vol. 218, no.1, pp. 19-30;
- [6] Pitoiset X., Preumont A., (2000), "Spectral methods for multiaxial random fatigue analysis of metallic structures", *International Journal of Fatigue*, Vol. 22, pp. 541-550;
- [7] Findley W.N., "Fatigue of metals under combinations of stresses", *Transactions of ASME*, vol.79, 1957;
- [8] McDiarmid D.L., "A general criterion of fatigue failure under multiaxial stress", *Second International Conference on Pressure Vessels Technology*, ASME, San Antonio, 1973;
- [9] Dressler K., Speckert M., "Counting method in fatigue analysis", *Tecmath GmbH, Kaiserslautern*, 1995;
- [10] Pitoiset X., "Méthodes spectrales pour une analyse en fatigue des structures métallique sous chargements aléatoires multiaxiaux", *PhD Thesis Département des constructions mécaniques et de robotique*, 2001;
- [11] Dirlik T., "Application of computers in fatigue analysis", *PhD thesis, University of Warwick*, 1985;
- [12] You Bong.Ryul, Lee Soo-Bok, 1996, "A critical review on multiaxial fatigue assessments of metals", *International Journal of Fatigue*, Vol. 18, pp. 235-244;
- [13] Matake K., 1977, "An explanation of fatigue limit under combines stresses", *Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers*, 20 (141);
- [14] Crossland B., 1956, "Effects of large hydrostatics pressures on the torsional fatigue strength of an alloy steel", *International Conference on Fatigue for Metals*;
- [15] Dang Van K., "Macro-micro approach in high-cycle multiaxial fatigue", *Advances in multiaxial fatigue*, ASTM STP1191, ASTM, Philadelphia, 1993, pp.120-130.
- [16] Papadopoulos I.V., Davoli P., Gorla C., Filippini M., Bernasconi A., 1997, "A comparative study of multiaxial high-cycle fatigue criteria for metals", *International Journal of Fatigue*, Vol. 19, pp. 219-235;
- [17] Bendat J.S., "Probability functions for random responses", *Nasa Report on contract NASA-5-4590*, 1964;

- [18] Shigley J. E., Minshke C.R., “Mechanical Engineering Design”, McGraw-Hill International Edition, 1996.
- [19] Braccesi C., Cianetti F., Lori G., Pioli D. (2004), “Sviluppo di una metodologia alternativa per la valutazione del comportamento a fatica di componenti meccanici soggetti a sollecitazioni di tipo random”, Atti del XXXIII Convegno Nazionale AIAS e del XIV Convegno ADM, Bari, Settembre 2004;
- [20] Braccesi C., Cianetti F., Lori G., Pioli D. (2005), “Fatigue behaviour analysis of mechanical components subject to random bimodal stress process: frequency domain approach”, International Journal of Fatigue, Vol. 27, pp. 335-345;
- [21] Braccesi C., Cianetti F., Lori G., Pioli D. (2004), “Applicabilità della rappresentazione monoassiale equivalente alla valutazione del danneggiamento a fatica di componenti meccanici in stati di sollecitazione multiassiali”, Atti del XXXIII Convegno Nazionale AIAS e del XIV Convegno ADM, Bari, Settembre 2004;
- [22] Pioli D., “Studio e sviluppo di metodi per la valutazione del comportamento a fatica di sistemi meccanici”, Tesi di Dottorato di Ricerca in Ingegneria Industriale, XVII ciclo, Perugia, 2005;
- [23] Cernicchi A., (2005) “Sviluppo di metodi di valutazione del comportamento a fatica di scocche di autovetture soggette a carichi aleatori”, Tesi di Laurea in Ingegneria Meccanica, Università degli Studi di Perugia, marzo 2005;
- [24] Braccesi C., Cianetti F., Landi L. (2005), “A methodology for active control of multibody test-rig for virtual simulation of vehicles through acceleration inputs”, *Accettato per la presentazione al Fifth International Conference on Multibody Systems, Nonlinear Dynamics and Control, ASME 2005 IDETC/CIE, Long Beach (CA) 24-28 settembre 2005;*
- [25] Robson J.D., (2005), “Road surface description and vehicle response”, International Journal of Fatigue of Vehicle Design, vol 1, no. 1, pp.25-35, 1979.

Appendice

a. Traduzione in frequenza del criterio di Mataké

Nella traduzione in frequenza [10] la (7) viene sostituita dalla relazione seguente (1a):

$$\frac{\sigma_1^* F(N_1^*) + \alpha \sigma_n^* F(N_2^*)}{\beta} \leq 1 \quad (1a)$$

In essa le grandezze con l'asterisco devono essere valutate sul piano critico. Quest'ultimo può essere trovato nel seguente modo. Il raggio del minimo cerchio circoscritto nel dominio temporale può essere definito da:

$$C_a = R = \max \sqrt{\tau_u^2(t) + \tau_v^2(t)}, \quad 0 \leq t \leq T \quad (2a)$$

In cui u e v sono i versori del piano di normale n . L'obiettivo è di esprimere il valore atteso di R per mezzo delle proprietà statistiche del vettore $\tau_n(t) = (\tau_u(t), \tau_v(t))$. Si denota con $\mu(r)$ il numero di attraversamenti del cerchio di raggio r da parte del vettore $\tau_n(t)$. Denotando con $N_u^\theta(r)$ e $N_v^\theta(r)$ rispettivamente i passaggi in verso positivo delle componenti lungo u e v sulla stessa circonferenza, quantità che ovviamente variano al variare di θ , si ipotizza che:

$$\mu(r) \approx \max |N_u^\theta(r)|, \quad 0 \leq t \leq T \quad (3a)$$

Le componenti di $\tau_u(t)$ e $\tau_v(t)$ nel riferimento u, v generico valgono:

$$\begin{pmatrix} \tau_u^\theta(t) \\ \tau_v^\theta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_u(t) \\ \tau_v(t) \end{pmatrix} \quad (4a)$$

Per trovare la direzione θ per cui si ha $N_u^\theta(r)$ massimo, è sufficiente valutare la direzione per cui la varianza σ_u della componente $\tau_u(t)$ è massima. Dato il vettore $\tau_n(t)$ espresso in frequenza:

$$\phi_\tau(\omega) = \begin{pmatrix} \phi_{uu}(\omega) & \phi_{uv}(\omega) \\ \phi_{vu}(\omega) & \phi_{vv}(\omega) \end{pmatrix} \quad (5a)$$

La matrice di covarianza Σ relativa al processo vettoriale $\tau_n(t)$ si può valutare come:

$$\Sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_\tau(\omega) d\omega = \begin{pmatrix} \sigma_u^2 & \rho_{uv}\sigma_u\sigma_v \\ \rho_{uv}\sigma_u\sigma_v & \sigma_v^2 \end{pmatrix} \quad (6a)$$

La direzione cercata di massima varianza va cercata con un'operazione di diagonalizzazione della matrice di covarianza:

$$\Sigma_\theta = Q_\theta \phi_r(\omega) Q_\theta^T = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2) \quad (7a)$$

Supponendo che $\sigma_1 > \sigma_2$, σ_1 è allora la varianza massima di $\tau_u(t)$ su tutte le direzioni θ . In questo particolare riferimento la matrice PSD della tensione tangenziale diventa:

$$\phi_r^\theta(\omega) = Q_\theta \phi_r(\omega) Q_\theta^T \quad (8a)$$

Il valore $N_u^\theta(r)$ può quindi essere stimato dal primo termine della diagonale di $\Phi_r^\theta(\omega)$, che chiameremo $\Phi_u^\theta(\omega)$. Avendo calcolato la PSD $\Phi_u^\theta(\omega)$, processo gaussiano a media nulla, è ora possibile con un risultato classico della teoria delle vibrazioni aleatorie calcolare il valore atteso $E[R]$. Infatti si ha:

$$E[R] = E[C_a] = E[\max(\tau_u^\theta(t))] = \sigma_1 F(N_1) \quad (9a)$$

Dove $F(N)$ è una funzione dovuta a Davenport [10] e espressa da:

$$F(N) = \sqrt{2 \ln(N) + 0.5772} / \sqrt{2 \ln(N)} \quad (10a)$$

N_1 è il numero di cicli medio del processo gaussiano $\tau_u(t)$ nella durata T , quindi:

$$N_1 = \nu_0^+ T \quad (11a)$$

In cui la frequenza centrale valutata dalla formula di Rice [10]:

$$\nu_0^+ = N_u^\theta(0) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} \quad (12a)$$

Dove m_2 e m_0 sono i momenti spettrali di ordine due e zero del processo $\tau_u(t)$.

Valutando quindi il piano critico massimizzando il valore della (9a) è possibile valutare la prima parte del primo membro della (1a). Per il secondo è sufficiente considerare che le grandezze da calcolare

sono le analoghe a quelle già analizzate, espresse questa volta per il processo gaussiano della tensione normale sul piano critico.

b. Traduzione in frequenza del criterio di Crossland

La (10) in tale traduzione [10] viene sostituita dalla seguente:

$$\frac{\sigma_c F(2N_1) / \sqrt{3} + \alpha \sigma_p F(N_2)}{\beta} \leq 1 \quad (13b)$$

In essa la funzione $F(N)$ ha la stessa definizione vista per la traduzione in frequenza del metodo di Mataka. Le grandezze σ_c e σ_p sono invece facilmente calcolabili come deviazioni standard del processo della tensione di *von Mises* espresso in frequenza dalla:

$$\phi_c(\omega) = \phi_{s_x s_x}(\omega) + \phi_{s_y s_y}(\omega) - \text{Re}(\phi_{s_x s_y}(\omega) + 3\phi_{s_{xy} s_{xy}}(\omega)) \quad (14b)$$

e da quello della tensione idrostatica fornito dalla:

$$\phi_p(\omega) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \phi_s(\omega) \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}^t \quad (15b)$$

Tuttavia, in tal caso, non si hanno evidenti vantaggi computazionali dato che sia nel tempo che in frequenza ci si riconduce a trovare il massimo di due vettori temporali.