



## Simulazione del fronte di plasticizzazione in un nuovo modello analitico del comportamento elasto-plastico di giunzioni saldate a punti

P. Fanelli, F. Vivio, V. Vullo

*Università di Roma "Tor Vergata", Dipartimento di Meccanica, via del Politecnico, 1 – 00133 Roma  
vivio@uniroma2.it*

---

**RIASSUNTO.** In questo lavoro viene presentata una procedura analitica per la valutazione del comportamento elasto-plastico di giunzioni saldate per punti in termini di rigidità. La procedura è basata su una nuova modellazione della regione di lamiera prossima alla saldatura, che viene risolta analiticamente con un approccio originale. La relativa soluzione in forma chiusa permette di descrivere l'evoluzione dello spostamento del nocciolo rigido quando questo venga sottoposto a carico ortogonale alla piastra, in presenza di deformazioni oltre lo snervamento. L'obiettivo è quello di ottenere un modello che possa essere utilizzato come base di sviluppo per un elemento finito punto di saldatura. Il vantaggio del nuovo modello di riferimento rispetto a quello precedentemente proposto dagli autori riguarda la possibilità di simulare l'effettivo raggio di plasticizzazione della zona prossima al punto di saldatura.

La procedura è generale e rappresenta un riferimento inedito, tra quelli esistenti nella letteratura scientifica inerenti a detto argomento.

**PAROLE CHIAVE.** Spot weld; Punto di saldatura; Piastra circolare; Flusso plastico; Plasticità.

---

### INTRODUZIONE

L'interesse per le strutture saldate mediante punti di saldatura ha visto un incremento crescente nel tempo, specialmente nelle sue applicazioni in campo automobilistico e ferroviario, dove dette strutture possono contenere anche migliaia di punti di saldatura. Queste giunzioni sono soggette a complessi carichi multi assiali in condizioni sia di esercizio che eccezionali, quali ad esempio quelle di crash.

Il campo tensionale nell'intorno del punto saldato è piuttosto complesso, principalmente a causa delle irregolarità geometriche e di molteplici effetti locali al bordo del punto stesso. Inoltre, la valutazione della rigidità locale del punto di saldatura e, più in generale, del suo comportamento strutturale, comporta, da un lato, la necessità di una modellazione accurata, con modelli agli elementi finiti, della regione prossima al punto, che è caratterizzata da tensioni e deformazioni locali elevate, associate a notevoli gradienti delle stesse e, dall'altro, l'utilizzo di un ridotto numero di gradi di libertà, in particolare nell'analisi di strutture di interesse ingegneristico con numerosi punti di saldatura.

La stima della vita a fatica di una struttura saldata a punti è stata investigata utilizzando vari approcci [1-6], spesso basati sull'utilizzo di complessi modelli FE della zona interessata dal punto. Generalmente, lo sforzo principale è stato indirizzato ad ottenere le tensioni nella giunzione con l'utilizzo sia di modelli agli elementi finiti sia di approcci teorici. Spesso la meccanica della frattura è stata adottata per valutare i fattori di intensificazione delle tensioni lungo la circonferenza del nocciolo di saldatura [1-6]. In questo campo, sono molti i lavori che hanno investigato il problema, utilizzando modelli agli elementi finiti in condizioni di elasticità lineare [1, 2] o generando soluzioni analitiche approssimate per l'analisi dei fattori di intensificazione [3, 4]. In altri casi è stato proposto l'uso di un parametro di

---



tensione convenzionale, che ha dimostrato la sua efficacia nel predire la vita a fatica dei punti di saldatura. In questo caso, modelli analitico-numeriche portano ad una buona stima delle forze scambiate tra il punto saldato ed il resto della struttura; questi carichi possono essere legati ad un parametro di tensione del punto saldato mediante un'approssimazione analitica [7] od un modello teorico di riferimento risolto analiticamente [8,9].

Le complicazioni dovute all'insorgere di deformazioni plastiche, legate a tali condizioni di carico, rendono il problema di difficile approccio teorico: la sua soluzione è così complessa da richiedere il ricorso non solo a metodi sperimentali, ma anche a procedure FEA. Molteplici tentativi sono stati fatti in questa direzione in passato, introducendo vari gradi di semplificazione della geometria, che sostituiscono il punto saldato con singoli elementi *beam* [10, 11]. Questo approccio, che rappresenta al momento l'unica via per affrontare la simulazione del comportamento complessivo di strutture multipunto, comporta notoriamente perdite di accuratezza, specie in relazione alla definizione della rigidezza locale e della ridistribuzione dello stato di deformazione.

Un differente approccio è stato invece proposto per l'analisi del comportamento di tali giunzioni in campo elasto-plastico [12, 13]; esso si basa su una procedura analitica, mediante la quale è possibile valutare il comportamento, in grandi spostamenti ed oltre il limite elastico del materiale, di una piastra circolare equivalente alla porzione di lamiera giuntata. In questo lavoro viene presentata una caratterizzazione più generale della procedura analitica già proposta in [13, 14], finalizzata alla valutazione del comportamento elasto-plastico di una giunzione saldata sollecitata con carico di sbottonamento ortogonale alla lamiera. Per la corretta valutazione del comportamento oltre il limite elastico, la procedura analizza una piastra equivalente a spessore linearmente variabile, avente un'inclusione rigida centrale incastrata al raggio interno della piastra. Dall'analisi di tale piastra è possibile estrarre in forma chiusa lo spostamento dell'inclusione rigida centrale in funzione del carico, in presenza di plasticità e grandi spostamenti. Tali risultati sono alla base dell'introduzione e dello sviluppo del modello *elemento punto di saldatura* presentato in [9] e sviluppabile anche in campo elasto-plastico.

Con lo scopo di tradurre la soluzione analitica in forma chiusa del modello teorico in un elemento punto di saldatura valido anche per simulare il comportamento della giunzione oltre il limite elastico, diviene necessario considerare l'effetto del vincolo sul raggio esterno del modello teorico di riferimento. In [14] viene indagato il comportamento della piastra circolare di riferimento, differentemente vincolata al raggio esterno, evidenziando l'influenza del vincolo sul comportamento della piastra medesima oltre il limite elastico. In particolare si evidenzia l'apporto in termini di cedevolezza che si verifica oltre il limite di snervamento del materiale. Detto apporto viene modellato come un sistema di due rigidezze in serie: una responsabile dell'effetto dei grandi spostamenti e l'altra dovuta all'insorgere del fenomeno di plasticizzazione. Da tale lavoro emerge che, nonostante i fronti di plasticizzazione siano sostanzialmente differenti in presenza di diverse configurazioni di sostegno, l'effetto aggiuntivo di cedevolezza sulla piastra dovuto al solo fenomeno di plasticizzazione risulta indipendente da tali condizioni di vincolo.

Quanto proposto in [13] prevede l'introduzione di un modello equivalente della piastra circolare reale di spessore  $h$ , in grado di cogliere il comportamento di quest'ultima in condizioni di carico eccedente il limite elastico e rimuovendo l'ipotesi di Kirchoff-Love di piccoli spostamenti. Tale modello si basa su alcune assunzioni di tipo geometrico, ampiamente giustificate nel suddetto lavoro. In particolare, analizzando il comportamento della piastra reale in condizioni di plasticizzazione avanzante, si evidenzia che il fronte di plasticizzazione nella sezione diametrale della medesima un andamento che può essere considerato, con buona approssimazione, lineare. In particolare, in detto lavoro si assume che il fronte lineare abbia pendenza tale da raggiungere il punto di spessore nullo in corrispondenza dell'asse di assialsimmetria (Fig.1). Tale osservazione, unita all'ipotesi di materiale a comportamento elastico-perfettamente plastico, porta gli autori del lavoro [13] ad introdurre un modello equivalente che non prevede la presenza del materiale plasticizzato in quanto, in tali condizioni, privo di rigidezza. Tale modello (Fig.1) presenta quindi due zone a spessore differente: la più esterna a spessore costante e pari a quello reale; la più interna a spessore linearmente variabile tra lo zero sull'asse di simmetria e il valore reale dello spessore al raggio di confine tra le due zone. Quest'ultimo raggio ricopre nel modello un ruolo determinante nella descrizione del comportamento plastico, in quanto rappresenta l'avanzamento della plasticizzazione in direzione radiale.

Tuttavia l'approssimazione introdotta a riguardo della linearità del fronte comporta, come conseguenza, una scissione tra il concetto di raggio di reale plasticizzazione e quello di confine tra le due zone del modello equivalente. Da un punto di vista energetico, infatti, le due configurazioni, per risultare equivalenti, devono ottemperare alla necessità di generare una distribuzione di materiale plasticizzato di pari area. La discrepanza tra le due forme, sia pure ridotta, determina un vertice di tale area, definito dal raggio di plasticizzazione, necessariamente differente.

Si deve inoltre osservare che, per la risoluzione del modello equivalente, nel lavoro [13] si fa uso della trattazione della piastra a spessore linearmente variabile proposta da Conway [15]. Quest'ultima prevede, affinché si pervenga ad una soluzione in forma chiusa, che lo spessore sia nullo in corrispondenza dell'asse di simmetria. Tale assunzione comporta

un'ulteriore, seppur piccola, differenza tra la distribuzione reale e quella equivalente; essa infatti implica, al raggio di incastro interno, uno spessore non nullo di materiale non plasticizzato e variabile secondo l'entità del carico applicato.

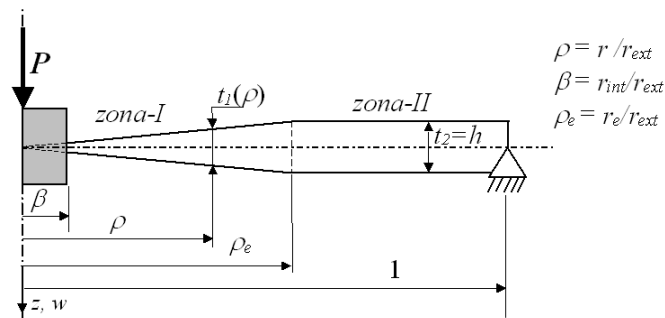


Figura 1: Sezione del primo modello teorico di riferimento [13].

Nel presente lavoro viene proposta un'analisi numerica del comportamento reale della piastra circolare sottile opportunamente vincolata e caricata secondo quanto descritto in [12, 13, 14], utilizzando metodologie FE in campo elasto-plastico e modelli molto raffinati, con la finalità di studiare, in dettaglio, l'evoluzione dell'andamento del fronte di plasticizzazione nella piastra. Al riguardo, viene quindi prospettata una variante del primo modello teorico di riferimento introdotto in [13] e rappresentato in Fig. 1, caratterizzata dall'introduzione di un nuovo modello analitico di piastra di spessore variabile con il raggio, con legge non lineare data dalla potenza di una funzione lineare [16].

Sempre per via numerica si analizzano infine alcune geometrie di giunzioni saldate di riferimento, onde valutare la distribuzione di tensioni e deformazioni plastiche onde caratterizzare lo stato e l'evoluzione del fronte di plasticizzazione al crescere del carico applicato.

## INDAGINI NUMERICHE

L'assunzione che il fronte di plasticizzazione presenti un andamento lineare è basata sull'idea che lo stato tensionale presente sia prevalentemente dovuto al contributo flessionale, con un andamento lineare delle tensioni radiali lungo lo spessore, in conformità con le ipotesi di Kirchhoff-Love. Le assunzioni fatte risultano valide in condizioni di piccoli spostamenti [13]; nello stesso lavoro viene prospettato un metodo che consente di rimuovere tale ipotesi.

La presenza di uno stato di tensione e di deformazioni dovuto al taglio, soprattutto in prossimità del nocciolo centrale, comporta una maggior complessità nell'analisi del campo tensionale rispetto a quanto si verifica per sollecitazione flessionale pura. Per una analisi più rigorosa dello stato di tensione e di deformazione presente nella giunzione soggetta a carichi che la sollecitano oltre il limite di snervamento, è stato allestito un modello numerico con un livello di affinamento della mesh molto elevato, onde ottenere risultati più significativi per una accurata valutazione del fronte di plasticizzazione e della sua evoluzione all'aumentare del carico applicato.

A tal fine, il modello numerico della piastra circolare è stato allestito mediante elementi solidi assialsimmetrici a 4 nodi e 2 gradi di libertà per nodo. Il vincolo di incastro al raggio interno è stato ottenuto lasciando libera la sola traslazione assiale, mentre l'appoggio al raggio esterno è stato modellato vincolando completamente il nodo nella mezzeria dello spessore. Il materiale utilizzato presenta un comportamento elastico-perfettamente plastico, con caratteristiche meccaniche tipiche di un comune acciaio per uso veicolistico (Tab. 1). In particolare si è considerato un modulo di Young di 200 GPa, modulo di Poisson pari a 0.3, e si è assunta una tensione di snervamento  $\sigma_0$  pari a 480 MPa,

Il carico assiale applicato sull'inclusione rigida centrale è stato distribuito sui nodi al raggio interno, mantenendo l'ipotesi di piccoli spostamenti. Per ottenere un'adeguata discretizzazione della sezione, si è definita una *mesh* che prevede 100 elementi sullo spessore e 500 elementi lungo il raggio, in direzione radiale.

Introducendo il criterio di snervamento di Von Mises, è stato possibile individuare, per diverse configurazioni geometriche della giunzione, tipiche delle strutture saldate di interesse ingegneristico, gli andamenti del fronte di plasticizzazione; esso è stato quindi identificato con una linea di demarcazione tra la zona di materiale plasticizzato e quella sollecitata al di sotto del limite elastico. La scelta del diametro del nocciolo è legata allo spessore della lamiera dalle note relazioni sperimentali presenti in letteratura. Inoltre si sono scelti bassi valori del rapporto  $\beta = r_{int}/r_{ext}$ , in modo da limitare l'effetto della deformabilità al taglio in prossimità del raggio interno.

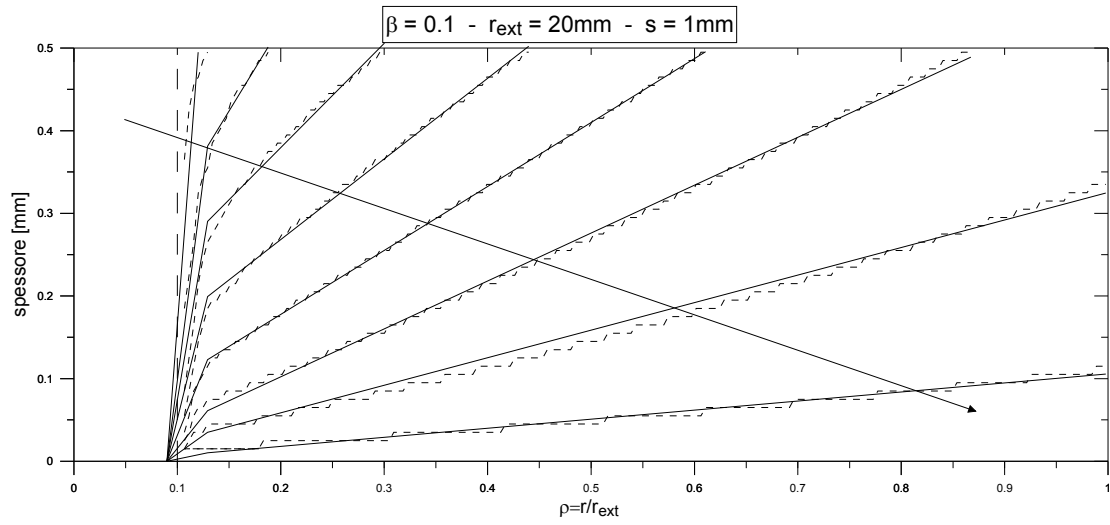


Figura 2: Andamento del fronte di plasticizzazione per diversi valori di carico.

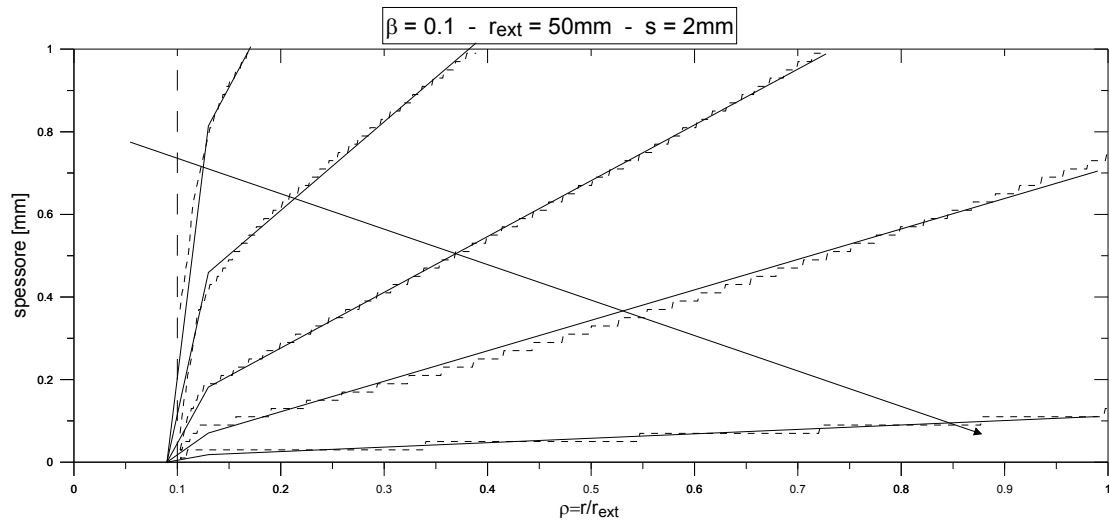


Figura 3: Andamento del fronte di plasticizzazione per diversi valori di carico.

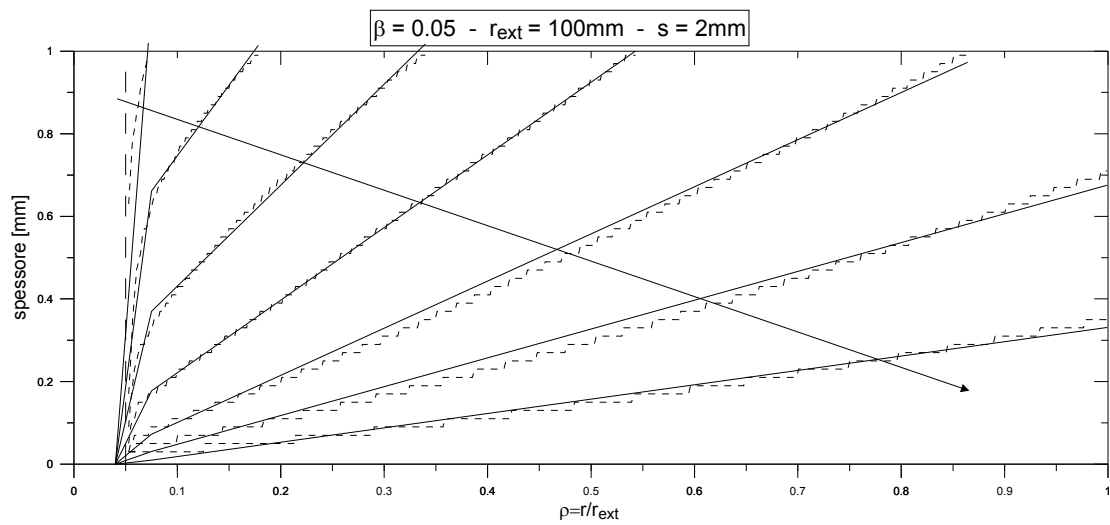


Figura 4: Andamento del fronte di plasticizzazione per diversi valori di carico.

Nelle Figg. 2, 3, 4 sono riportati gli andamenti del fronte di plasticizzazione al crescere del carico applicato. In esse per motivi di chiarezza, sono evidenziate solo le curve inerenti ad alcuni carichi, evitando l'addensarsi delle medesime per valori del carico prossimi a quello di completa plasticizzazione. In ascissa è riportato il raggio adimensionalizzato  $\rho = r/r_{ext}$ , mentre in ordinata si riporta l'emispessore della piastra. L'andamento del fronte di plasticizzazione presenta una forma ripetitiva nei vari casi studiati. Esclusa una porzione di sezione prossima al raggio interno, l'andamento è fortemente lineare, così come si è ipotizzato nei precedenti sviluppi. Tuttavia le rette non confluiscono in un unico punto, al contrario di quanto si verifica con il modello introdotto in [13]. Inoltre il fronte di plasticizzazione in prossimità del raggio interno è, con buona approssimazione, descrivibile mediante un ulteriore tratto rettilineo di diversa pendenza rispetto a quello successivo. Dall'analisi dei numerosi casi analizzati, emerge che, per le geometrie considerate, si riscontra la ripetitività di alcuni parametri. In particolare, il punto di transizione tra le due rette è ricorrente e posto ad una distanza dall'incastro pari a circa il 3% del raggio esterno. Inoltre, sempre con riferimento alla sezione diametrale della piastra, i tratti rettilinei prossimi all'asse convergono tutti in un punto all'interno del nocciolo rigido, localizzato ad una distanza dal raggio di incastro  $r_{int}$  pari a circa  $0.01 \cdot r_{ext}$ .

L'emergente evidenza di una correlazione tra le caratteristiche geometriche della piastra ed i punti caratteristici del fronte di plasticizzazione ha posto le basi per proporre un nuovo modello analitico atto alla risoluzione del problema della piastra circolare caricata oltre lo snervamento.

### NUOVO MODELLO TEORICO DI RIFERIMENTO E RELATIVI RISULTATI

L'approccio descritto in [13] prevede, per la risoluzione del modello teorico di riferimento riportato in Fig. 1, l'introduzione di un'ulteriore condizione al contorno, da aggiungere a quelle desumibili dalle condizioni di vincolo, di equilibrio e di congruenza; essa si desume dal legame tra il carico applicato ed il raggio equivalente di transizione tra la zona di piastra a spessore variabile e la zona di piastra a spessore costante, secondo le ipotesi già descritte. Il legame tra il carico applicato ed il raggio equivalente  $\rho_e = r_e/r_{ext}$  è definibile mediante una legge parametrica che considera la variazione di tutte le grandezze geometriche della giunzione e delle caratteristiche tensili del materiale (rapporto  $\beta$ , raggio esterno e spessore della piastra, tensione di snervamento, modulo di Young) e che si può desumere, numericamente, come descritto in [12, 13, 14].

Per evitare di effettuare tale analisi numerica preliminare finalizzata alla definizione del suddetto legame, si introduce qui un nuovo modello teorico di riferimento, che risulta più complesso, ma risolvibile completamente in forma chiusa. Il modello consta di tre tratti differenti di piastra, di cui due a spessore variabile ed uno a spessore costante (Fig. 5). I raggi che ne delimitano i contorni sono tutti noti, a meno del raggio di plasticizzazione, che è variabile con il carico: la ricerca del legame tra il carico applicato ed il raggio di plasticizzazione  $\rho_p$  è definibile mediante l'impiego del criterio di snervamento di Von Mises.

La zona-I della piastra (Fig. 5) presenta uno spessore  $t(\rho)$  variabile linearmente con il raggio, con un andamento che causa l'annullamento dello spessore al raggio  $\rho_t$ . Questo primo tratto di piastra è definito nell'intervallo tra  $\beta$  e  $\rho_t$ ; quest'ultimo raggio adimensionale identifica la transizione tra la prima e la seconda zona di plasticizzazione.

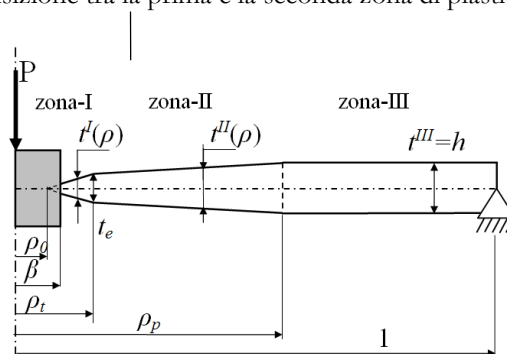


Figura 5: Sezione del secondo modello teorico di riferimento.

La zona-II della piastra (Fig. 5) è definita tra il raggio di transizione  $\rho_t$  e quello di plasticizzazione  $\rho_p$ . La pendenza del profilo in tale zona dipende dallo spessore  $t_e$  al raggio  $\rho_t$ , variabile, e dallo spessore  $t^{III} = h$ , della piastra reale, che è noto.



Per la risoluzione analitica del modello si fa uso dell'approccio proposto in [16] per piastre inflesse aventi spessore variabile secondo una potenza di una funzione lineare a 2 parametri,  $n$  e  $k$  data dalla relazione:

$$t(\rho) = t_0(1 - n\rho)^k \quad (1)$$

ove  $t_0$  è lo spessore del profilo di piastra in corrispondenza dell'asse.

L'equazione differenziale risolutiva della piastra suddetta soggetta a carico concentrato  $P$  in corrispondenza dell'asse è la seguente [16]:

$$\frac{d^2\varphi}{d\rho^2} + \left( \frac{1}{\rho} - \frac{3kn}{1-n\rho} \right) \frac{d\varphi}{d\rho} - \left[ \frac{1}{\rho^2} + \frac{3vkn}{\rho(1-n\rho)} \right] \varphi = - \frac{Pr_e}{2\pi D_0 \rho (1-n\rho)^{3k}} \quad (2)$$

ove  $\varphi = dw/dz$  è la rotazione alla normale alla superficie media della piastra ( $w$  è lo spostamento nella direzione dell'asse ortogonale  $z$ ),  $D_0 = Et_0^3 / 12(1-\nu^2)$  è la rigidezza flessionale di riferimento, cioè quello della piastra con spessore  $t_0$ .

La soluzione di detta equazione non omogenea è data dalla somma della soluzione dell'equazione differenziale omogenea associata, rappresentata dal primo membro della (2), e da un integrale particolare dell'equazione completa.

La soluzione dell'equazione omogenea associata, che è una equazione differenziale ipergeometrica, è esprimibile mediante combinazione lineare di due funzioni ipergeometriche, tra loro indipendenti [16], per il tramite di due costanti di integrazione, da determinarsi mediante l'imposizione delle condizioni al contorno; una terza costante di integrazione, sempre da determinarsi in base alle condizioni al contorno, risulta dalla integrazione successiva relativa alla determinazione dello spostamento.

Per le zone I e II del modello teorico di riferimento di Fig. 5, ove si è assunto un andamento lineare dello spessore,  $k$  è uguale a 1, mentre  $n$  è variabile. Le leggi di variazione dello spessore per dette due zone diventano, quindi, rispettivamente:

$$t^I(\rho) = t_1(1 - n_1\rho) \quad (3)$$

$$t^{II}(\rho) = t_2(1 - n_2\rho) \quad (4)$$

ove  $t_1$  e  $t_2$  sono, rispettivamente, gli spessori dei due profili di piastra in corrispondenza dell'asse; detti spessori possono essere reali o virtuali, nel senso che, sull'asse, si possono intersecare le rette che delimitano il profilo od i loro prolungamenti;  $n_1$  ed  $n_2$  sono i valori che il parametro  $n$  della (1) assume nei due tratti di piastra.

Oltre alle nove predette costanti di integrazione (tre per ogni tratto), per la soluzione del problema sono da determinare altre 6 incognite: i due parametri  $n_1$  e  $n_2$ , i due spessori  $t_1$  e  $t_2$ , lo spessore al raggio di transizione  $t_e$  ed il raggio di plasticizzazione  $\rho_p$ . Tutte le incognite sono funzioni del carico applicato  $P$ .

Le condizioni al contorno da imporre per la definizione delle nove costanti di integrazione sono:

$$\begin{aligned} \varphi^I(\rho_{int}) &= 0 & \varphi^I(\rho_t) &= \varphi^{II}(\rho_t) & \eta^I(\rho_t) &= \eta^{II}(\rho_t) \\ M_r^I(\rho_t) &= M_r^{II}(\rho_t) & \varphi^{II}(\rho_p) &= \varphi^{III}(\rho_p) & \eta^{II}(\rho_p) &= \eta^{III}(\rho_p) \\ M_r^{II}(\rho_p) &= M_r^{III}(\rho_p) & M_r^{III}(\rho_{ext}) &= 0 & \eta^{III}(\rho_{ext}) &= 0 \end{aligned} \quad (5a)$$

Alla luce di quanto si è già detto in relazione alla localizzazione dei raggi  $\rho_0$  e  $\rho_t$ , le ulteriori condizioni al contorno per la determinazione delle altre incognite sono le seguenti:

$$\begin{aligned} t^I(\rho_t) &= t_1(1 - n_1\rho_t) = t_e & t^{II}(\rho_p) &= t_2(1 - n_2\rho_p) = h \\ t_1 n_1 &= - \frac{t_e}{\rho_t - \rho_0} & t_2 n_2 &= - \frac{t_3 - t_e}{\rho_p - \rho_t} \\ \sigma^{\max}(\rho_t) &= \sigma_{SN} & \sigma^{\max}(\rho_p) &= \sigma_{SN}; \end{aligned} \quad (5b)$$

le prime quattro di dette relazioni sono di natura geometrica, mentre le ultime due sono inerenti alla condizione di snervamento ai raggi di transizione  $\rho_t$  e  $\rho_p$ .

Seppur risolvibile analiticamente, il complesso modello di cui sopra può essere semplificato secondo lo schema rappresentato in Fig. 6. In detto modello, la porzione assialsimmetrica di piastra plasticizzata (zona-I\*) viene simulata da una porzione di piastra a spessore variabile linearmente secondo la legge:

$$t'(\rho) = t_p(1 - n_p \rho) \quad \text{con } \beta \leq \rho \leq \rho_p \quad (6)$$

ove  $t_p$  è lo spessore sull'asse della piastra ed  $n_p$  è il parametro della legge di variazione dello spessore (1), ove, attesa la linearità del profilo di piastra,  $k$  è sempre assunto unitario; il parametro  $n_p$  definisce la forma del profilo lineare della piastra per  $\beta \leq \rho \leq \rho_p$  ed influenza, quindi, la rigidità complessiva del modello equivalente di Fig. 6, la quale deve uguagliare quella del modello reale della giunzione.

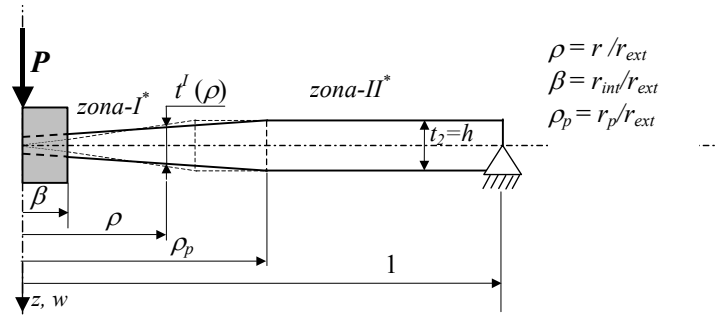


Figura 6: Sezione del nuovo modello teorico di riferimento.

Il vantaggio del modello equivalente di Fig. 6 rispetto a quello presentato in [13] è principalmente legato alla possibilità di mantenere l'effettivo valore del raggio di plasticizzazione  $\rho_p$  come transizione dalla porzione di piastra a spessore variabile a quello a spessore costante  $t_2$ , che risulta quindi coincidente con quello reale della lamiera giuntata. L'equazione differenziale risolutiva della piastra a spessore variabile soggetta a carico concentrato  $P$  in corrispondenza dell'asse è sempre la (2).

Per la risoluzione analitica del modello di Fig. 6 devono essere definite sei costanti di integrazione (tre per ogni tratto) e, in analogia a quanto esposto in precedenza, 3 incognite di natura geometrica: il parametro  $n_p$  lo spessore  $t_p$  ed il raggio di plasticizzazione  $\rho_p$ . Tutte le incognite sono funzioni del carico applicato  $P$ .

Le condizioni al contorno da imporre per la definizione delle sei costanti di integrazione sono:

$$\begin{aligned} \varphi'(\rho_{\text{int}}) &= 0 & \varphi'(\rho_p) &= \varphi''(\rho_p) & \eta'(\rho_p) &= \eta''(\rho_p) \\ M_r'(\rho_p) &= M_r''(\rho_p) & M_r''(\rho_{\text{ext}}) &= 0 & \eta''(\rho_{\text{ext}}) &= 0 \end{aligned} \quad (7a)$$

Le ulteriori condizioni al contorno per la determinazione delle altre incognite (geometriche) sono le seguenti:

$$t'(\rho_p) = t_p(1 - n_p \rho_p) = h \quad \sigma^{\text{max}}(\rho_p) = \sigma_{SN} \quad (7b)$$

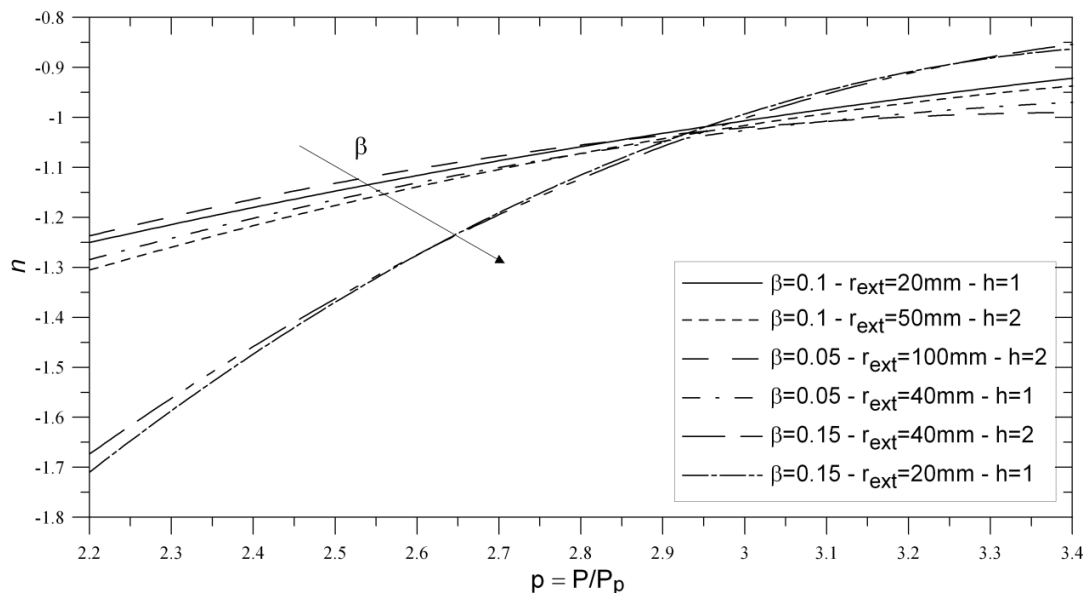


Figura 7: Legame tra il parametro  $n$  ed il carico  $p = P/P_p$  adimensionalizzato.



L'ultima condizione, che è quella che lega il valore del parametro incognito  $n_p$  al carico  $P$ , può essere ricavata considerando l'equivalenza tra il modello di Fig. 6 ed il modello reale di riferimento, imponendo la costanza dell'energia di deformazione tra i due modelli che, di fatto, si traduce nella conservazione della rigidità globale dei due modelli di giunzione.

La relazione che lega il parametro  $n_p$  al carico applicato, per il nuovo modello di Fig. 6, può essere ottenuta in maniera analoga a quanto già descritto in [13] per la ricerca della relazione parametrica che lega il raggio equivalente  $\rho_e$  al carico  $P$  per il modello di Fig. 1. La relazione, che può essere definita in maniera parametrica, ovvero considerando la variabilità del rapporto  $\beta$ , dello spessore  $b$  e del raggio esterno  $r_{est}$  del modello reale di riferimento, diventa la decima condizione che può essere utilizzata per risolvere, analiticamente, il modello equivalente della piastra di Fig. 6.

In Fig. 7 è riportato l'andamento del parametro  $n$  con il carico  $p$  adimensionalizzato rispetto il carico di primo snervamento  $P_p$ , per differenti configurazioni geometriche. È evidente che è il solo rapporto  $\beta$  ad influenzare la legge di variabilità di  $n$  con il carico.

I risultati ottenuti utilizzando la procedura proposta sono confrontati, in termini di rigidità complessiva della giunzione, con quelli derivanti da soluzioni FE della piastra reale svolti con analisi in regime elasto-plastico. Nella Tab. 1, inerente a numerose configurazioni geometriche esemplificative, è evidente la bontà dei risultati ottenuti con la soluzione analitica proposta.

$b$ [mm]	$\beta$	$r_{est}$ [mm]	P [N]	$p$	$\rho_p$	$w_{FEM}$ [mm]	$w_{teorico}$ [mm]	differenza [%]
1	0.1	20	500	2.259	0.3025	0.532	0.525	1.37
			600	2.711	0.4405	0.725	0.720	0.61
			700	3.163	0.6145	1.023	1.017	0.54
			800	3.615	0.8695	1.578	1.571	0.40
2	0.1	50	2250	2.542	0.3890	2.017	2.009	0.39
			2400	2.711	0.4435	2.271	2.262	0.38
			2700	3.050	0.5665	2.922	2.911	0.35
			3000	3.389	0.7255	3.904	3.891	0.31
2	0.05	100	1750	2.522	0.2543	6.242	6.234	0.12
			2000	2.882	0.3398	7.645	7.634	0.13
			2250	3.242	0.4316	9.476	9.465	0.11
			2500	3.603	0.5424	11.987	11.974	0.10
1	0.05	40	400	2.306	0.2068	1.772	1.768	0.20
			500	2.882	0.3398	2.446	2.441	0.18
			600	3.459	0.4949	3.481	3.474	0.18
			700	4.035	0.7106	5.325	5.317	0.14
2	0.15	40	2000	1.887	0.2761	0.904	0.898	0.65
			2500	2.359	0.4263	1.316	1.308	0.60
			3000	2.831	0.6274	1.949	1.939	0.51
			3500	3.302	0.9533	3.255	3.243	0.36
1	0.15	20	600	2.265	0.3923	0.610	0.606	0.60
			700	2.642	0.5396	0.827	0.822	0.54
			800	3.019	0.7323	1.165	1.159	0.47
			900	3.397	0.9950	1.899	1.854	2.32

Tabella 1: Confronto tra i risultati FE del modello reale e i risultati della soluzione analitica secondo l'approccio proposto, per sei differenti configurazioni geometriche della giunzione.





## CONCLUSIONI

**N**el presente lavoro si introduce una procedura analitica per la valutazione del comportamento elasto-plastico di piastre circolari con un'inclusione rigida centrale. La soluzione in forma chiusa dell'originale modello teorico di riferimento permette di descrivere lo spostamento del nocciolo rigido nel caso in cui esso sia sottoposto ad un carico ortogonale, considerando la presenza di un materiale dal comportamento elastico-perfettamente plastico. L'obiettivo è quello di ottenere un modello attendibile della zona del punto di saldatura che possa essere utilizzato come base per lo sviluppo dell'elemento punto di saldatura nelle analisi FE di strutture multi punto quando siano presenti deformazioni oltre lo snervamento.

Il nuovo modello teorico di riferimento, che è alla base del procedimento proposto, differisce da quello precedentemente definito dagli autori per la possibilità di simulare, in maniera più accurata, l'avanzamento del fronte di plasticizzazione con il carico applicato sulla giunzione.

La validità delle ipotesi introdotte è confermata da numerosi esempi relativi a configurazioni geometriche riconducibili a quelle di reali giunzioni saldate a punto.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] S. D. Sheppard, In: Mitchell, M. R. and Landgraf, R. W. (Eds.), *Advances in Fatigue Lifetime Predictive Techniques*, ASTM STP 1211. American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1 (1993) 169.
- [2] D.-A. Wang, S.-H. Lin, J. Pan, *Int. J. of Fatigue*, 27(2005) 581.
- [3] S. Zhang, *Int. J. of Fracture*, 112 (2001), 247.
- [4] P.-C. Lin, D.-A. Wang, J. Pan, *Int. J. of Solids and Structures*, 44 (2007) 1013.
- [5] D. Radaj, C. M. Sonsino, W. Fricke, *Fatigue assessment of welded joints by local approaches*, Woodhead Publishing, Cambridge, 2<sup>nd</sup> edn (2006).
- [6] B. Atzori, P. Lazzarin, E. Staccò, *Rivista Italiana della saldatura*, 4 (1987) 317.
- [7] A. Rupp, V. Grubisic, D. Radaj, *Sonderdruck aus Materialprüfung*, 32(6) (1990) 1.
- [8] P. Salvini, F. Vivio, V. Vullo, *Int. J. of Fatigue*, 22 (2000) 645.
- [9] F. Vivio, G. Ferrari, P. Salvini, V. Vullo, *Int. J. of Computer Applications in Technology*, 15 (4-5) (2002) 218.
- [10] B. Langrand, J. Fabis, A. Deudon, J. M. Mortier, *Mécanique & Industries*, 4 (2003) 273.
- [11] Y. Xiang, Q. Wang, Z. Fan, H. Fang, *Finite Elements in Analysis and Design*, 42 (2006) 846.
- [12] F. Vivio, P. Fanelli, In: XXXVII Convegno AIAS (2008).
- [13] F. Vivio, P. Fanelli, *Int. J. of Solids and Structures*, 46 (2009) 572.
- [14] P. Fanelli, F. Vivio, In: XXXVIII Convegno AIAS (2009).
- [15] H.D. Conway, *J. of Applied Mechanics*, 15 (1948) 1.
- [16] F. Vivio, V. Vullo, "Closed form solutions of bending circular plate having non-linear variable thickness." under review on *J. of the Mechanics and Physics of Solids*, (2009).