



## Simulazione della propagazione di difetti a fatica in giunti incollati in condizioni di modo misto attraverso un modello modificato di zona coesiva

F.Moroni, A.Pirondi

Università degli Studi di Parma, Dipartimento di Ingegneria Industriale - v.le G.P. Usberti 181/A, 43100 Parma  
alessandro.pirondi@unipr.it; moroni@ied.unipr.it

---

**RIASSUNTO.** Il lavoro tratta l'estensione a condizioni di modo misto di un modello predittivo per la simulazione della crescita di difetti in giunzioni incollate, in precedenza sviluppato per modi semplici di sollecitazione (puro modo I e puro modo II) e l'implementazione dello stesso nel software commerciale ABAQUS, mediante l'utilizzo di subroutine. Il modello, che ha come base il modello di zona coesiva, prevede oltre al danneggiamento legato al valore dell'apertura delle interfacce come nel modello coesivo tradizionale (legame tensioni-apertura), anche una dipendenza del danneggiamento dal numero di cicli. In particolare questa dipendenza è data attraverso ad una legge di distribuzione spaziale del danno nella zona di processo di fatica (zona in cui avviene il danneggiamento dovuto al carico ciclico) e ad una alla legge evolutiva del difetto a fatica alla Paris che mette in relazione la velocità di avanzamento del difetto con lo stato di sollecitazione del giunto. In particolare è stato necessario implementare delle relazioni in grado di generare delle leggi coesive per il valore del rapporto di modo misto necessario, noti il rapporto di modo misto stesso e le leggi coesive in puro modo I e puro modo II. Una procedura simile è stata seguita per ottenere i parametri della legge di Paris in modo misto. Per verificare il corretto funzionamento si sono eseguite simulazioni in varie condizioni di modo misto e si sono confrontate con quelle teoriche ricavabili per via analitica, ottenendo ottimi risultati.

**PAROLE CHIAVE.** Simulazioni FEM; Fatica; Propagazione difetti; Giunti incollati; Modo misto.

---

### INTRODUZIONE

L'utilizzo di giunzioni incollate in strutture di tipo aeronautico, tipicamente progettate secondo metodologie fail safe e damage tolerant, rende necessario la definizione e l'utilizzo di metodologie di progettazione in grado di prevedere la propagazione di difetti a fatica. Le metodologie classiche coinvolgono concetti basati sulla meccanica della frattura e sulla cinetica di avanzamento del difetto a fatica, di cui un esempio caratteristico è la legge di Paris [1]. Questa mette in relazione la velocità di avanzamento dei difetti con lo stato di sollecitazione, valutato in termini di fattore di intensificazione degli sforzi, o in termini di tasso di rilascio di energia. Il calcolo di questi può essere svolto analiticamente per geometrie e carichi semplici, mentre è necessario il supporto di programmi ad elementi finiti qualora o le geometrie o le condizioni di carico siano complesse. In questo secondo caso è però necessario un aggiornamento continuo della lunghezza del difetto modificando via via la geometria, il che può risultare macchinoso in assenza di tecniche di debonding progressivo e/o remeshing. Allo stesso tempo per la previsione di propagazione di difetti in condizioni quasi statiche o di impatto, per le stesse tipologia di componenti meccanici, è ampiamente utilizzato il modello di zona coesiva. Il modello di zona coesiva è stato anche applicato in alcuni casi per la simulazione della propagazione di difetti a fatica [2-7]. Il concetto di base è quello di degradare gli elementi all'apice del difetto mediante la riduzione della rigidità degli stessi: questo può essere fatto legando, in un approccio "cycle-by-cycle", la rigidità al valore di tensione

---



raggiunto (come in [3]), oppure definendo una funzione che leghi la rigidità con il numero di cicli (come in [4]). Nel primo caso è necessario eseguire una analisi in cui vengono simulati tutti i cicli a cui è sottoposto il componente, il che può portare a tempi di calcolo molto elevati. Nel secondo caso invece è necessario tarare su prove a fatica ulteriori parametri oltre a quelli della zona coesiva, parametri che sono però validi solo nelle condizioni di carico in cui sono stati determinati. Molto più efficace sembra il metodo proposto da Turon et al. [2] in cui la degradazione per fatica della zona coesiva è legata direttamente alla velocità di propagazione del difetto mediante un modello di omogeneizzazione del danno (transizione micro-mesoscala). Questo modello presenta però dei limiti per quel che riguarda l'applicabilità: è infatti utilizzabile solo per geometrie in cui il tasso di rilascio di energia  $G$  sia esprimibile analiticamente, e contemporaneamente lo stesso sia indipendente dalla lunghezza del difetto. Gli autori in precedenza hanno quindi sviluppato per geometrie bidimensionali in presenza di uno stato di sollecitazione di puro modo I e puro modo II, un modello [8, 9] in grado di superare queste limitazioni attraverso il calcolo automatico del tasso di rilascio di energia. In questo lavoro il modello viene esteso a propagazione di difetti in modo misto fornendo ottimi risultati per la propagazione di difetti a vari livelli del rapporto di modo misto.

### ASPETTI TEORICI

Facendo riferimento a lavori già pubblicati [8, 9], di seguito vengono solamente ripresi i concetti principali del modello, focalizzando invece l'attenzione sull'estensione del modello stesso a condizioni di modo misto. Per un generico volume rappresentativo, la variazione del danno al variare del numero di cicli è espressa in funzione del tasso di rilascio di energia mediante l'equazione:

$$\frac{dD}{dN} = \frac{1}{A_{CZ}} C \Delta G^m \tag{1}$$

dove  $C$  ed  $m$  sono i parametri della legge di Paris caratteristici del materiale,  $A_{CZ}$  è la zona interessata dal danneggiamento,  $\Delta G$  è l'ampiezza del tasso di rilascio di energia applicata al giunto, e  $D$  è la variabile locale di danno che va a degradare la rigidità  $K$  rispetto al valore iniziale  $K_0$  secondo la relazione

$$K = (1 - D) K_0 \tag{2}$$

La legge coesiva invece è una legge di tipo triangolare come rappresentato in Fig. 1, e l'area sottesa al triangolo,  $\Gamma$ , è rappresentativa dell'energia di frattura.

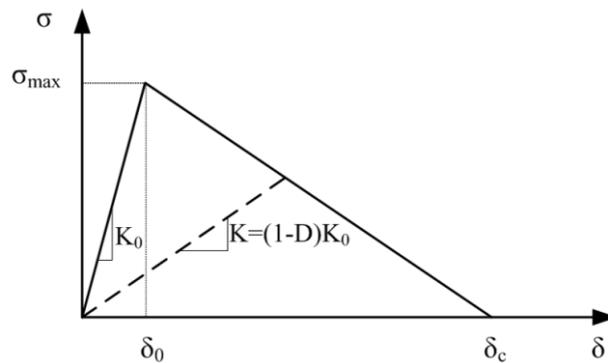


Figura 1: Rappresentazione schematica di una legge coesiva triangolare.

Entrando nel dettaglio della procedura di simulazione della propagazione a fatica, l'analisi viene divisa in incrementi, ed ad ogni incremento viene fatto corrispondere un certo numero di cicli secondo lo schema riportato in Fig. 2.

In particolare ad un generico incremento  $j$ , con un numero di cicli accumulato pari a  $N^j$ , e per un punto di integrazione  $i$ , caratterizzato da un danno  $D_i^j$ , viene definita una variazione di danno per ogni punto di integrazione  $\Delta D_i^j$ . Questo valore viene scelto secondo la relazione:

$$\begin{aligned} \Delta D_i^j &= \Delta D_{\max} & \text{if } 1 - D_i^j > \Delta D_{\max} \\ \Delta D_i^j &= 1 - D_i^j & \text{if } 1 - D_i^j < \Delta D_{\max} \end{aligned} \tag{3}$$

cioè è il minimo tra un valore  $\Delta D_{\max}$  e l'incremento necessario per arrivare al danno unitario. A questo punto mediante l'Eq. (1), nota l'ampiezza del tasso di rilascio di energia applicato, viene calcolato, per ogni punto di integrazione preso in considerazione, il numero di cicli  $\Delta N_i^j$  necessari per accumulare un danno  $\Delta D_i^j$ . Il minimo tra i  $\Delta N_i^j$  appena calcolati rappresenta il numero di cicli a cui equivale quel determinato incremento. A questo punto viene aggiornato il numero di cicli e sempre mediante l'Eq. (1) il valore del danno per ogni punto di integrazione. Il valore di tasso di rilascio di energia invece calcolato utilizzano la definizione di integrale di contorno, definendo il percorso dello stesso attorno alla zona coesiva (Fig. 3).

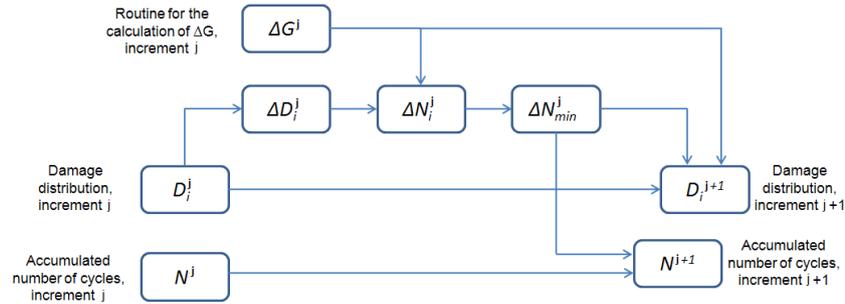


Figura 2: Diagramma di flusso procedura di simulazione della propagazione a fatica.

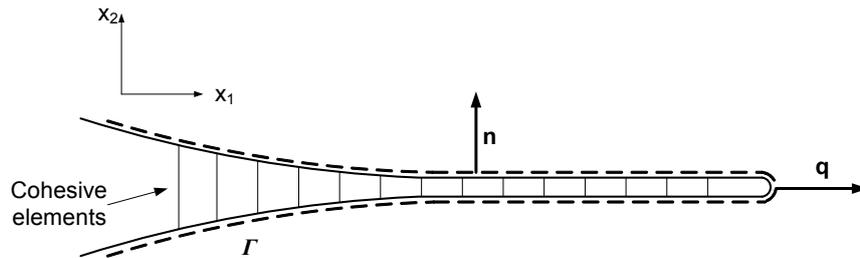


Figura 3: Rappresentazione del percorso dell'integrale J.

In particolare viene sviluppata l'equazione

$$J = \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot [H] \cdot \mathbf{q} d\Gamma \quad (4)$$

Dove  $\mathbf{n}$  è il vettore normale al percorso,  $\mathbf{q}$  è un vettore che giace lungo la direzione di propagazione del difetto, e  $[H]$  è definito come:

$$[H] = S[I] - [\sigma_{i,j}] \left[ \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x_{i,j}} \right] \quad (5)$$

dove  $S$  è la densità di energia di deformazione,  $[\sigma_{i,j}]$  è la matrice degli sforzi e  $u_i$  lo spostamento dei punti giacenti sul percorso. Se il difetto giace su di un piano ortogonale a  $x_2$ , e le linearità geometriche possono essere trascurate, l'integrale  $J$  può essere scritto come:

$$J = \int_{\Gamma} \left( -\sigma_{1,2} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \sigma_{2,2} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) d\Gamma \quad (6)$$

Dove la prima parte è rappresentativa del tasso di rilascio di energia in modo II, mentre il secondo è rappresentativo del tasso di rilascio di energia in modo I.

Sia il calcolo di  $J$  che la previsione di velocità di avanzamento del difetto, sono stati verificati funzionare in modo eccellente con sollecitazioni di semplice modo I e semplice modo II [8]. Per estenderlo al modo misto è necessario definire sia una legge coesiva che dei coefficienti della legge di Paris in modo misto.



### Legge coesiva in modo misto

La legge coesiva è ricavata in termini di apertura equivalente ( $\delta_{eq}$ ) tensione equivalente ( $\sigma_{eq}$ ) in funzione delle leggi di puro modo I e puro modo II, e in funzione del rapporto di modo misto (Fig. 4). Innanzitutto è necessario definire il valore di apertura equivalente:

$$\delta_{eq} = \sqrt{\left(\frac{\delta_1 + |\delta_1|}{2}\right)^2 + (\delta_2)^2} \quad (7)$$

Questa definizione [2] permette di avere un valore di apertura equivalente definito come la somma vettoriale delle aperture dei due modi in caso di valori positivi di  $\delta_i$ , oppure definito come la sola componente in modo II qualora il modo I sia di compressione.

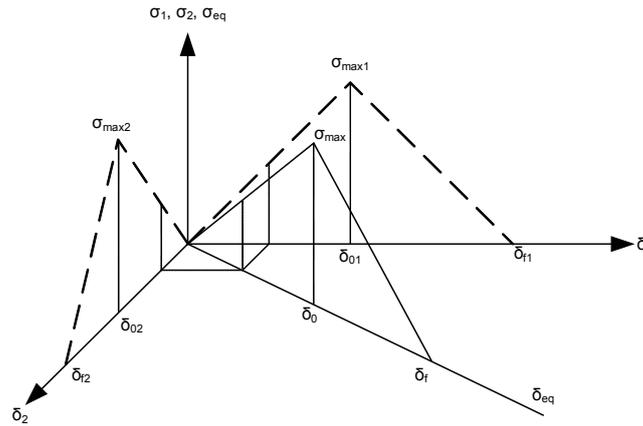


Figura 4: Rappresentazione della legge coesiva in modo misto.

Per potersi ricavare i parametri della legge coesiva in modo misto è necessario fare alcune considerazioni. In primis l'energia di deformazione in modo misto è pari alla somma dell'energia di deformazione in modo I e in modo II. Di conseguenza:

$$U_{eq} = U_1 + U_2 = 0.5 \cdot \delta_{eq}^2 \cdot K_{0eq} = 0.5 \cdot (\delta_1 + |\delta_1|)^2 \cdot K_{01} + 0.5 \cdot \delta_2^2 \cdot K_{02} \quad (8)$$

dove le  $K_{0i}$  rappresentano le rigidità iniziali del modo  $i$ -esimo, e quindi definite secondo la relazione

$$K_{0i} = \frac{\sigma_{max i}}{\delta_{0i}} \quad (9)$$

mentre la rigidità della curva in modo misto è definita come

$$K_{0eq} = \frac{\sigma_{max}}{\delta_0} \quad (10)$$

Il valore della rigidità equivalente è quindi ricavabile mediante la relazione

$$K_{0eq} = \frac{(\delta_1 + |\delta_1|)^2 \cdot K_{01} + \delta_2^2 \cdot K_{02}}{\delta_{eq}^2} \quad (11)$$

La condizione di inizio danneggiamento (vertice superiore del triangolo) è definita come l'istante in cui l'interazione quadratica dei rapporti tra tensioni nei due modi e rispettive tensioni massime raggiunge l'unità, quindi è definita mediante l'espressione:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{max 1}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{max 2}}\right)^2 = 1 \quad (12)$$

Riscrivendo in termini di aperture nelle due direzioni si può ricavare l'apertura equivalente di innesco del danno  $\delta_0$



$$\delta_0 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\delta_{01}}\right)^2 + \left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^2 \left(\frac{1}{\delta_{02}}\right)^2}} \cdot \frac{1}{\cos \left[ \arctan \left[ \frac{\delta_2}{\delta_1 + |\delta_1|} \right] \right]} \quad (13)$$

Noto il valore di apertura equivalente a cui si ha il picco della tensione, è possibile ricavarsi la tensione massima equivalente come

$$\sigma_{\max} = K_{0eq} \cdot \delta_0 \quad (14)$$

Per la completa definizione della legge coesiva in modo misto è necessario ricavare l'apertura equivalente critica  $\delta_c$ . Essendo l'area sottesa dal triangolo rappresentativa dell'energia a frattura, si sfrutta la relazione di Kenane e Benzeggagh [10], secondo la quale, l'energia di frattura in modo misto  $G_{TC}$  viene espressa in funzione delle tenacità a frattura in modo I ( $G_{IC}$ ) e in modo II ( $G_{IIC}$ ), del rapporto di modo misto  $MM$  e di un coefficiente caratteristico del materiale  $m_m$ .

$$G_{TC} = G_{IC} + (G_{IIC} - G_{IC}) \cdot MM^{m_m} \quad (15)$$

dove a sua volta il rapporto di modo misto è il rapporto tra il tasso di rilascio di energia applicato in modo II e quello totale (rapporto di modo misto globale), cioè  $MM = G_{II}/G_T$ . Sfruttando l'analogia tra tenacità a frattura e area sottesa alla legge coesiva, il valore di  $\delta_c$  è quindi ricavabile come:

$$\delta_c = \frac{\delta_{\max 1} \sigma_{\max 1} + (\delta_{\max 2} \sigma_{\max 2} - \delta_{\max 1} \sigma_{\max 1}) \cdot MM^{m_m}}{\sigma_{\max}} \quad (16)$$

#### *Velocità di propagazione in modo misto*

Per fornire una velocità di propagazione attendibile in modo misto, si è fatta l'ipotesi che i parametri della legge di Paris fossero dipendenti dal rapporto di modo misto. Si è quindi implementato quanto suggerito nel lavoro di Kenane e Benzeggagh [11]. In particolare noti i parametri delle leggi di Paris in modo I puro ( $B_I, d_I$ ), e i parametri della legge di Paris in modo II puro ( $B_{II}, d_{II}$ ), i parametri della legge di Paris in modo misto

$$\frac{da}{dN} = B(\Delta G)^d \quad (17)$$

possono essere ricavati mediante le relazioni:

$$d = d_I + (d_{II} - d_I) \cdot (MM)^{md} \quad (18)$$

$$\ln B = \ln B_I + (\ln B_{II} - \ln B_I) \cdot (MM)^{mB} \quad (19)$$

Dove  $md$  e  $mB$  sono due parametri caratteristici del materiale. Per quel che riguarda la determinazione del limite di fatica  $\Delta G_{th}$ , si utilizza la relazione mostrata in precedenza per il calcolo della tenacità ma frattura critica in modo misto, adattata ai parametri della soglia di conseguenza:

$$\Delta G_{th} = \Delta G_{Ith} + (\Delta G_{IIth} - \Delta G_{Ith}) \cdot MM^{m_m} \quad (20)$$

Avendo come obiettivo quello di estendere la procedura anche a situazioni tridimensionali, in cui il calcolo delle componenti dell'integrale di contorno  $J$  può risultare difficoltoso, si è scelto di svincolare la procedura da tali componenti. Per questo motivo si sono valutati i parametri  $d$  e  $B$  utilizzando un rapporto di modo misto locale,  $MM_U$ . Tale rapporto di modo misto è stato calcolato per ogni punto di integrazione come il rapporto tra l'energia di deformazione in modo II e quella totale secondo la relazione

$$MM_U = \frac{U_2}{U_1 + U_2} \quad (21)$$

I valori di  $d$  e  $B$  sono quindi calcolati per ogni punto di integrazione utilizzando la relazione

$$d = d_I + (d_{II} - d_I) \cdot (MM_U)^{md} \quad (23)$$

$$\ln B = \ln B_I + (\ln B_{II} - \ln B_I) \cdot (MM_U)^{mB} \quad (22)$$



e di conseguenza per ogni punto di integrazione si avranno differenti valori di  $da/dN$  calcolati con l'Eq. 17. Questo permette di simulare anche situazioni complesse in cui nello strato di adesivo si presentino condizioni di modo misto variabili lungo lo strato di adesivo stesso.

## IMPOSTAZIONE DELLE VERIFICHE

Al fine di verificare il corretto funzionamento del modello è stato inizialmente necessario valutare la corrispondenza tra il tasso di rilascio di energia calcolato attraverso la subroutine e quello ricavato mediante Virtual Crack Closure Technique (VCCT). Inoltre va verificata anche la correttezza del calcolo delle velocità di propagazione rispetto a quelle calcolate per via analitica. Il tutto per differenti rapporti di modo misto. A tal scopo si è deciso di utilizzare come modello un giunto incollato con una geometria ENF modificata come mostrato in Fig. 5.

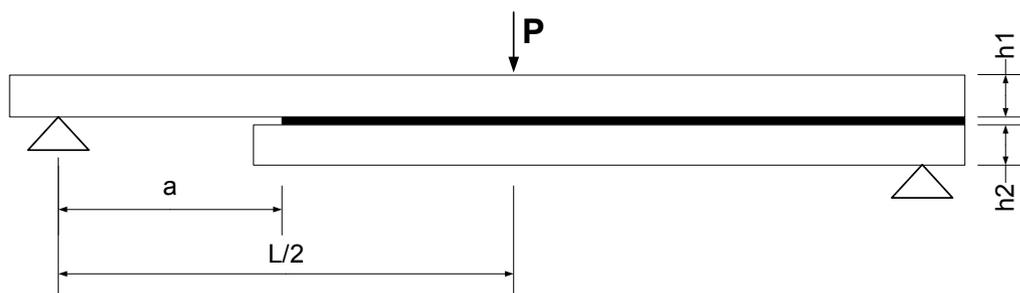


Figura 5: Geometria del giunto oggetto della simulazione.

Dove semilarghezza  $L/2$  è pari a 50mm, e il rapporto di modo misto è funzione del rapporto tra gli spessori degli aderenti  $h_1$  e  $h_2$ . Il carico per unità di larghezza del giunto applicato è pari a  $P$ .

Come parametri del materiale si sono utilizzati parametri di letteratura [2], e sono riportati in Tab. 1 per il semplice modo I e semplice modo II.

Per quel che riguarda i parametri inerenti al modo misto, in assenza di dati accurati si sono assunti parametri utilizzati in letteratura [10, 11], e riportati in Tab. 2.

Parametro	Modo I	Modo II
$\Gamma$ [N/mm]	0.266	1.002
$\sigma_{max}$ [MPa]	30	30
$\delta_0$ [mm]	0.003	0.003
$\delta_C$ [mm]	0.0173	0.066
$B$	0.0616	4.23
$d$	5.4	4.5
$\Delta G_{th}$ [N/mm]	0.06	0.1

Tabella 1: Parametri della legge coesiva e della legge di Paris per modi puri di sollecitazione [2].

Parametro	Modo I
$m_m$	2.6
$m_d$	1.85
$m_B$	0.35

Tabella 2: Parametri modo misto [10, 11].

## RISULTATI

Per prima cosa si confrontano gli andamenti del tasso di rilascio di energia e le sue componenti ricavati con la procedura illustrata e ricavati mediante VCCT al variare della lunghezza del difetto per due differenti combinazioni di spessori. In particolare Fig. 6 mostra il confronto per aderenti di uguale spessore, mentre Fig. 7 mostra il

confronto nel caso di aderendo inferiore con spessore doppio rispetto all'aderendo superiore. In entrambi i casi la rappresentazione dei dati è molto buona.

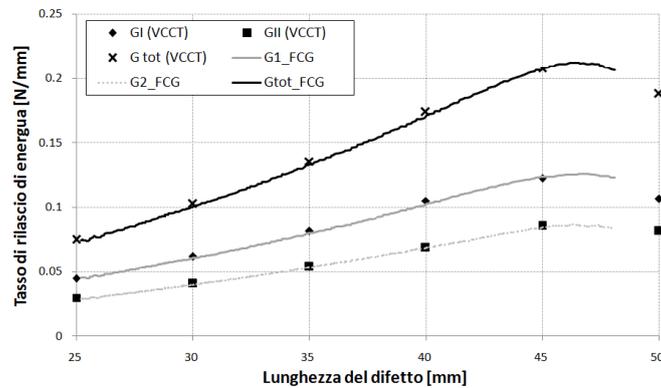


Figura 6: Andamento del tasso di rilascio di energia e delle sue componenti al variare della lunghezza del difetto, spessori degli aderendi  $h_1=h_2=5\text{mm}$  e carico applicato di  $25\text{N/mm}$ .

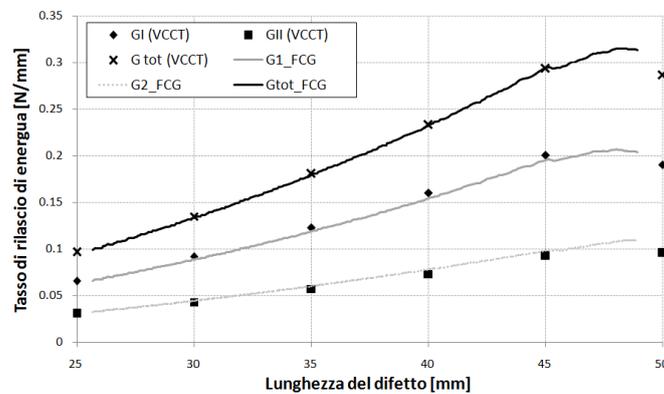


Figura 7: Andamento del tasso di rilascio di energia e delle sue componenti al variare della lunghezza del difetto, spessori degli aderendi  $h_1=2.5$   $h_2=5\text{mm}$  e carico applicato di  $10\text{N/mm}$ .

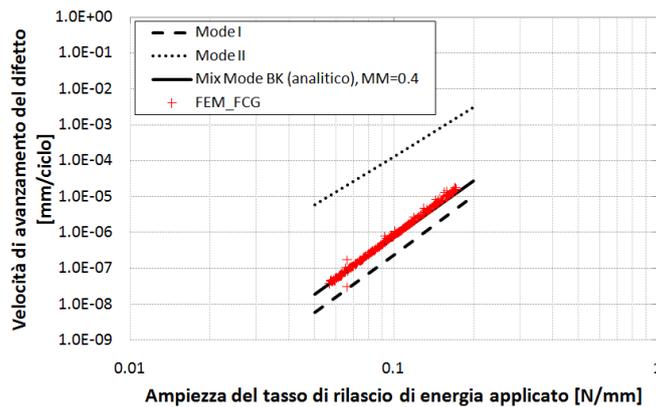


Figura 8: Velocità di propagazione di difetti con spessori degli aderendi  $h_1=h_2=5\text{mm}$  e carico applicato di  $10\text{N/mm}$  (rapporto di modo misto globale 0.4).

Anche per la propagazione di difetti a fatica si sono fatte prove variando il rapporto tra gli spessori in modo da verificare la correttezza delle simulazioni. In particolare si sono verificati il caso di uguali spessori (Fig. 8) che produce un rapporto di modo misto globale pari a 0.4, il caso di aderendo inferiore con spessore doppio rispetto all'aderendo superiore (Fig. 9) che produce un rapporto di modo misto globale pari a 0.33, ed un caso in cui lo spessore dell'aderendo inferiore è  $1/5$  rispetto allo spessore dell'aderendo superiore (Fig. 10) che produce un rapporto di modo misto globale pari a 0.67.

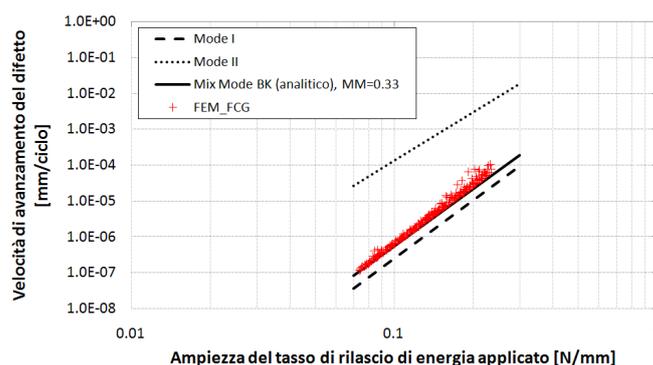


Figura 9: Velocità di propagazione di difetti con spessori degli aderendi  $h_1=2.5\text{mm}$   $h_2=5\text{mm}$  e carico applicato di  $10\text{ N/mm}$  (rapporto di modo misto globale 0.33).

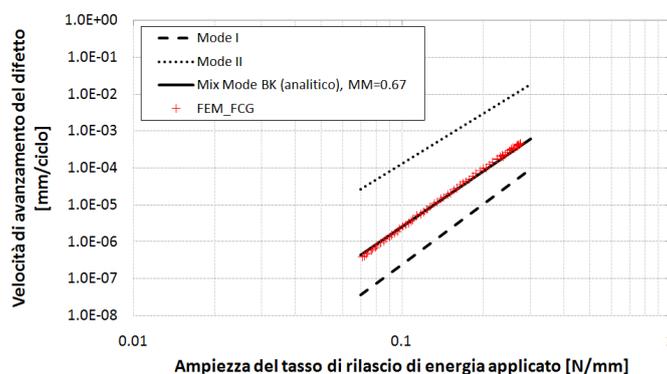


Figura 10: Velocità di propagazione di difetti con spessori degli aderendi  $h_1=5\text{mm}$ ,  $h_2=1\text{mm}$  e carico applicato di  $35\text{N/mm}$  (rapporto di modo misto globale 0.67).

Si può notare come in tutti e tre i casi la simulazione dia una modestissima sovrastima della velocità di propagazione ai valori più elevati di sollecitazione (parzialmente spiegabile dal fatto che all'aumentare della lunghezza del difetto il modo misto tenda leggermente al modo II), anche se la rappresentazione dei dati analitici rimane in ogni caso molto buona.

## CONCLUSIONI

Partendo da un framework di base per la simulazione di propagazione di difetti a fatica in modo I o modo II puri, il cui il corretto funzionamento era già stato verificato in precedenti esperienze, in questo lavoro ci si è occupati dell'ampliamento dello stesso per permettere simulazioni di propagazione in condizioni di modo misto. È quindi stato necessario definire delle relazioni sia per quel che riguarda la legge coesiva, sia per quel che riguarda la legge di Paris che permettessero di ricavare le rispettive leggi di modo misto partendo da quelle in puro modo I e puro modo II. Per verificare il corretto funzionamento della procedura la stessa è stata testata utilizzando una geometria ENF modificata in cui la variazione del rapporto tra lo spessore degli aderendi permette di variare la condizione di modo misto dell'adesivo. Per i rapporti di modo misto analizzati la procedura ha fornito ottimi risultati, aprendo la strada per l'ultimo passo dello sviluppo che consiste nell'implementazione della procedura stessa per geometrie tridimensionali.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] P. Paris, F. Erdogan, J. Basic Eng, 85 (1961) 528.
- [2] A. Turon, J. Costa, P. P. Camanho, C. G. Davila, Composites, 38 (2007) 2270.
- [3] K. L. Roe, T. Siegmund, Eng. Fract. Mech., 70 (2003) 209.
- [4] S. Maiti, P. H. Geubelle, Eng. Fract. Mech., 72(5) (2005) 691.
- [5] A. Abdul-Baqi, P.J.G. Schreurs, M.G.D. Geers, Int. J. of Solids and Structures, 42 (2005) 927.



- [6] J. J. Munoz, U. Galvanetto, P. Robinson, *Int. J. Fatigue*, 28 (2006) 1136.
- [7] M. Erinc, P.J.G. Schreurs, M.G.D. Geers, *Int. J. of Solids and Structures*, 44 (2007) 5680.
- [8] A. Pirondi, F. Moroni, In: *ACE-X 2009*, Roma (2009).
- [9] A. Pirondi, F. Moroni, In: *Workshop IGF - Progettazione a fatica di giunzioni saldate (...e non)*, Forni di Sopra (UD) (2009).
- [10] M. L. Benzeggagh, M. Kenane, *Compos. Sci. Technol.*, 56 (1996) 100.
- [11] M. Kenane, M. L. Benzeggagh, *Compos. Sci. Technol.*, 57 (1997) 597.