



## L'approccio variazionale alla frattura e ad altri fenomeni anelastici

Gianpietro Del Piero

Università di Ferrara, Dipartimento di Ingegneria, Via Saragat 1, 44100 Ferrara  
dlpgpt@unife.it

---

**RIASSUNTO.** L'approccio variazionale alla frattura, basato sulla minimizzazione energetica, è recentemente divenuto oggetto di un vasto interesse scientifico. Nella presente comunicazione, si illustrano brevemente i progressi conseguiti nel corso dell'ultimo decennio.

**ABSTRACT.** The variational approach to fracture, based on energy minimization, recently became the object of intense research. In this communication, the developments occurred during the last decade are briefly reviewed.

**KEYWORDS.** Fracture; Variational Methods; Inelasticity.

---

### INTRODUZIONE

Fino a tempi recenti, la comprensione della natura fisica della frattura e la messa a punto di tecniche efficaci di progettazione e di calcolo erano considerate tra i problemi irrisolti dell'Ingegneria Strutturale. La consapevolezza che le cause della rottura andassero ricercate alla scala atomica o molecolare contribuì a creare un certo scetticismo sulla possibilità di descrivere i fenomeni di frattura con i mezzi ordinari della Meccanica dei Continui. Ciò favorì lo svilupparsi di metodologie eterodosse e il ricorso a tecniche risolutive ad hoc, mal riconducibili al calcolo strutturale tradizionale. Solo con lo sviluppo dei modelli microstrutturali e multiscala, e con l'affermarsi dei metodi variazionali basati sulla minimizzazione energetica, si cominciò a nutrire fiducia sulla possibilità di risolvere i problemi di frattura con i metodi della meccanica tradizionale. Quanto segue è una breve rassegna dei tentativi fatti e dei progressi compiuti nell'ultimo decennio.

### BREVE RICHIAMO STORICO

Fin dagli inizi, due furono i temi fondamentali degli studi sulla frattura dei materiali: la scoperta della ragione della resistenza dei corpi solidi ad essere spezzati [12], e cioè della coesione che si oppone alla rottura dei corpi solidi, e dell'effetto di scala, e cioè del perché, a parità di materiale, i corpi di dimensioni maggiori sono più fragili. Di entrambi i temi si occuparono gli antichi Greci, in quel periodo di fioritura della scienza, durato circa un secolo e mezzo, che va dall'impresa di Alessandro alla conquista romana. In periodo rinascimentale, l'indagine scientifica sulla resistenza dei materiali fu ripresa col lavoro pionieristico di Leonardo. Successivamente, sia il problema delle cause della resistenza che quello dell'effetto di scala vennero chiaramente enunciati e, nei limiti delle conoscenze allora disponibili, approfonditi nei "Discorsi" di Galileo [12].

I secoli successivi videro il sorgere delle varie ipotesi sulle cause della frattura. Nella seconda metà del '700 la teoria di Coulomb, basata sui concetti di coesione e angolo di attrito, portò ad una modellazione del comportamento a rottura dei materiali, tuttora attuale per i materiali amorfi [7]. Ulteriori progressi furono ottenuti da Maxwell (1850), Tresca (1864), de Saint-Venant (1870), Beltrami (1885), Mohr (1900), von Mises (1913), Hencky (1924), e da molti altri, cfr. [3, 17].

---



L'origine della Meccanica della Frattura come disciplina specifica è comunemente fatta risalire alla memoria [13] di Griffith, pubblicata nel 1920. In essa è stabilita per la prima volta la differenza tra la resistenza effettiva di un materiale e la resistenza teorica, e cioè in assenza di difetti. Inoltre, in [13] è formulata una condizione di avanzamento della frattura in un solido inizialmente fratturato. Secondo Griffith, si ha l'avanzamento quando la diminuzione dell'energia elastica di deformazione è superiore all'energia di frattura spesa per l'avanzamento. Questo criterio di frattura è concettualmente simile ad un criterio di stabilità elastica, ed infatti gli sviluppi successivi porteranno a riconoscere la frattura come un modo speciale, particolarmente insidioso, di perdita della stabilità dell'equilibrio.

Praticamente contemporanei al lavoro di Griffith sono gli studi sulla concentrazione delle tensioni al vertice di angoli rientranti o di fori ellittici, condotti, nell'ambito della teoria dell'elasticità bidimensionale, da Kolosoff (1910), Inglis (1913), Timoshenko (1924), Muskhelishvili (1933) e altri, cfr. [17]. Questi studi portarono ad una condizione di avanzamento della frattura basata sul fattore di concentrazione degli sforzi, Irwin [14, 15]. Lo stesso Irwin dimostrò la sostanziale coincidenza della nuova condizione con la condizione energetica di Griffith.

Dalla fusione delle due teorie nacque l'insieme di regole di progettazione e di tecniche di calcolo noto col nome di meccanica della frattura lineare. Con essa si raggiunse una buona comprensione delle cause dell'avanzamento della frattura in un corpo già fratturato. Restavano però aperti due importanti problemi:

- ✓ la predizione dell'inizio della frattura in un solido inizialmente non fratturato,
- ✓ la determinazione dell'evoluzione della superficie fratturata al variare del carico.

Nella soluzione di questi due problemi, notevoli progressi sono stati realizzati grazie all'approccio variazionale di Francfort e Marigo, proposto nel lavoro [11] del 1998. Da allora questo approccio si è sviluppato in diverse direzioni, con importanti contributi di matematici, meccanici, e ingegneri. Un panorama abbastanza aggiornato dello stato dell'arte è dato in [5]. Qui di seguito verranno date alcune informazioni essenziali sulle principali linee di sviluppo.

## LA MINIMIZZAZIONE ENERGETICA

L'approccio variazionale alla frattura riprende l'approccio energetico di Griffith, riformulandolo da un punto di vista più generale. Si suppone assegnato un corpo elastico non fratturato  $\Omega$ , di cui è nota la densità superficiale  $\gamma$  dell'energia di frattura. Sono anche assegnati gli spostamenti  $\hat{u}(x)$  su una porzione  $\partial_1\Omega$  della frontiera di  $\Omega$ , e il carico  $\ell = (b, s)$ . Quest'ultimo è costituito da un campo di forze di volume  $b$  su  $\Omega$  e da un campo di forze di superficie  $s$  agente sulla porzione complementare della frontiera  $\partial_2\Omega = \partial\Omega \setminus \partial_1\Omega$ . L'energia totale del corpo è

$$E(u) = \int_{\Omega} w(\nabla u(x)) dx + \ell(u) + \gamma |S(u)|, \quad (1)$$

dove  $w$  è la densità volumica dell'energia di deformazione elastica, e  $\ell(u)$  è l'energia potenziale dei carichi

$$\ell(u) = - \int_{\Omega} b(x) \cdot u(x) dx - \int_{\partial_2\Omega} s(x) \cdot u(x) dx. \quad (2)$$

Inoltre,  $S(u)$  è la superficie della frattura, e  $\gamma |S(u)|$  è l'energia necessaria a produrre una frattura di area  $|S(u)|$ .

Secondo la formulazione data in [11], la configurazione di equilibrio sotto il carico  $\ell$  è quella che minimizza  $E(u)$  tra tutti i campi di spostamento  $u$  che rispettano il vincolo geometrico

$$u(x) = \hat{u}(x), \quad x \in \partial_1\Omega. \quad (3)$$

Ci si aspetta che le configurazioni di minimo di  $E$  siano non fratturate per piccoli valori di  $\ell$ , e fratturate per valori maggiori. Al crescere del carico vi è quindi un regime iniziale non fratturato, seguito da un regime fratturato. In quest'ultimo, le soluzioni del problema di minimo determinano l'evoluzione della frattura.

Vi sono alcune difficoltà che complicano questo quadro. Una prima difficoltà è che, come suggerito dall'esperienza quotidiana, per la maggior parte dei materiali la frattura ha carattere permanente: anche se, nel corso della deformazione del corpo, si ristabilisce il contatto tra le due parti della frattura, l'originario regime non fratturato non viene ricostituito. In termini matematici, ciò porta a introdurre una condizione supplementare: dato un programma di carico  $t \mapsto \ell_t$  e detta  $t \mapsto u_t$  la corrispondente famiglia dei minimi energetici, deve essere

$$t > t^* \Rightarrow S(u_{t^*}) \subseteq S(u_t). \quad (4)$$



Questa condizione di irreversibilità della frattura fa sì che il dominio di definizione di  $E$  all'istante  $t$  non dipenda solo dal dato (carico applicato e vincolo geometrico) in  $t$ , ma anche dalle soluzioni del problema di minimo in tutti i  $t^* < t$ . Si passa così da una famiglia di minimi di  $E$  indipendenti l'uno dall'altro, ad un più complesso problema di evoluzione. Il problema è stato affrontato e risolto numericamente da Bourdin, Francfort e Marigo [4], ricorrendo al funzionale regolarizzato di Ambrosio e Tortorelli [1]

$$E_\varepsilon(u, s) = \int_{\Omega} (s^2(x) + k_\varepsilon) w(\nabla u(x)) dx + \frac{\gamma}{2} \int_{\Omega} (\varepsilon |\nabla s(x)|^2 + \frac{1}{\varepsilon} (1 - s(x))^2) dx, \quad (5)$$

inizialmente destinato alla risoluzione del problema della segmentazione di immagine [16]. In (5)  $\varepsilon$  è un numero positivo,  $k_\varepsilon$  è una costante positiva che tende a zero con  $\varepsilon$ , e  $u$  e  $s$  sono funzioni appartenenti, rispettivamente, agli spazi di Sobolev  $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  e  $W^{1,p}(\Omega, [0,1])$ , con  $p > 1$ . La regolarità assunta per  $u$  esclude la presenza di fratture, ma il campo scalare  $s$  con valori in  $[0,1]$  dà una rappresentazione regolarizzata della frattura, nel senso che  $s = 1$  denota l'assenza di frattura, e  $s = 0$  denota la frattura totale.

Poiché i funzionali regolarizzati  $E_\varepsilon$  sono definiti su spazi di Sobolev, i loro minimi possono essere approssimati numericamente usando il metodo degli elementi finiti. Inoltre, la teoria della  $\Gamma$ -convergenza [8] assicura che, per  $\varepsilon \rightarrow 0$ , la successione dei minimi degli  $E_\varepsilon$  converge, in un senso opportuno, al minimo di  $E$ . Diventa così possibile approssimare la soluzione del problema della frattura utilizzando le tecniche del calcolo strutturale tradizionale.

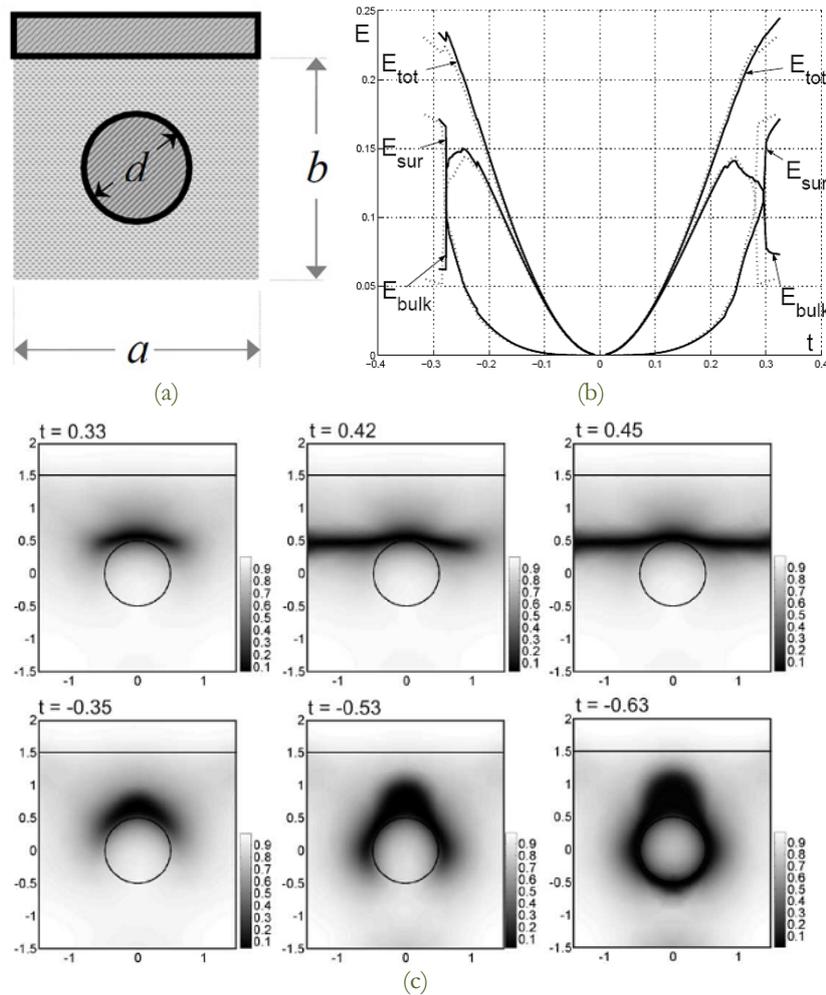


Figura 1: L'esempio considerato in [4] e in [9] (a), e le curve energia-spostamento secondo [4] (tratteggiate), e secondo [9] (a tratto pieno) (b). In (c) è mostrata l'evoluzione della frattura secondo [9], in tensione (in alto) e in compressione (in basso).



In Fig. 1a è mostrato uno dei problemi risolti in [4]. Un foglio rettangolare è fissato ad un supporto circolare rigido, e il lato superiore è soggetto ad un secondo supporto rigido, che imprime uno spostamento verticale crescente  $\hat{u}_t(x) = t - 1$ , a partire dalla configurazione iniziale  $t = 1$ . Si ha trazione per  $t > 1$  e compressione per  $t < 1$ . Non sono presenti forze di volume, né forze di superficie sulla porzione libera della frontiera. Mentre in [4] si assume l'energia  $w$  quadratica tipica dell'elasticità lineare, in [9] si assume l'energia del materiale elastico non lineare di Blatz-Ko

$$w(F) = \frac{1}{2} \alpha (|F|^2 - 2) + \varphi(\det F), \quad (6)$$

dove  $\alpha > 0$  è una costante del materiale,  $F(x) = I + \nabla u(x)$  è il gradiente di deformazione, e  $\varphi$  è una funzione convessa del determinante di  $F$ . In Fig. 1b le energie elastiche  $E_{bulk}$ , di frattura  $E_{sur}$ , e totali  $E_{tot}$  calcolate in [4] e in [9] sono riportate in funzione di  $t$ . Si vede che, mentre nella soluzione [4] l'energia è simmetrica rispetto a  $t = 1$ , nella soluzione [9] l'energia in compressione è, a parità di  $|t|$ , sistematicamente superiore a quella in trazione.

Infine, la Fig. 1c mostra l'evoluzione della frattura secondo la soluzione [9]. Le zone più scure sono quelle in cui il parametro di frattura  $s$  è prossimo allo zero. Esse quindi costituiscono una rappresentazione regolarizzata della superficie di frattura. Nel caso della trazione, la frattura ha origine nel punto più alto del supporto circolare e si propaga orizzontalmente, raggiungendo i lati verticali del rettangolo per due valori di  $t$  leggermente diversi. I due valori corrispondono alle brusche variazioni di energia nelle curve di Fig. 1b. In compressione, la frattura si propaga seguendo la circonferenza del supporto, fino alla completa separazione.

L'introduzione dell'energia (6) ha permesso di diversificare le risposte a tensione e a compressione, che nella soluzione [4] coincidevano. Con opportune scelte della funzione  $\varphi$  è così possibile descrivere il comportamento a rottura dei materiali con differente resistenza a trazione e a compressione, quali le pietre e il calcestruzzo.

## MINIMI LOCALI E BARRIERE ENERGETICHE

Si supponga che su una porzione di  $\partial_2 \Omega$  siano applicate forze superficiali  $s$  di trazione. Se si separa questa porzione dal resto del corpo con una superficie di frattura  $\mathcal{S}$  e se alla porzione separata si imprime una traslazione  $u$  di entità arbitraria nella direzione di  $s$ , l'energia dei carichi  $\ell(u)$  assume valori negativi arbitrariamente grandi, a fronte di un'energia di frattura  $\gamma |\mathcal{S}|$  indipendente da  $u$ . In questo caso l'estremo inferiore di  $E$  è  $-\infty$ , e quindi non vi è un punto di minimo. Non sarebbe dunque possibile l'equilibrio: il solido si frantumerebbe per valori di  $s$  comunque piccoli. L'apparente absurdità fisica di questa conclusione si spiega con la possibilità che lo spostamento  $u$  sopra descritto sia inaccessibile dalla configurazione iniziale di carico nullo. Per rendere precisa questa idea è necessario definire una distanza tra configurazioni, e riferirsi a cammini continui, relativamente alla distanza prescelta, nello spazio delle configurazioni. Nella scelta della misura di distanza, si dovrà tenere conto della presenza delle discontinuità di  $u$ . Una misura di distanza appropriata è quella associata alla metrica della variazione totale

$$\|u\| = \int_{\Omega} |\nabla u(x)| dx + \int_{\mathcal{S}(u)} |[u](x)| dA, \quad (7)$$

dove  $[u](x)$  è la discontinuità di  $u$  nel punto  $x$  della superficie di frattura. Si dimostra che esiste una barriera energetica che impedisce di raggiungere una configurazione fratturata con un cammino continuo che parta da una configurazione non fratturata. L'esistenza di una tale barriera è discussa in [10], par. 4.1, limitatamente al caso monodimensionale, ed è dimostrata in [6] nel caso tridimensionale. Questo risultato porta all'impossibilità di descrivere la transizione dal regime non fratturato a quello fratturato con la minimizzazione del funzionale (1).

Ci si può chiedere come mai una tale transizione sia invece stata ottenuta nelle soluzioni numeriche descritte al paragrafo precedente. Si risponde osservando che quei risultati sono stati ottenuti minimizzando il funzionale regolarizzato (5), che presenta barriere energetiche più facilmente superabili, e non il funzionale (1). Inoltre, il procedimento numerico basato sulla discretizzazione di (5) può consentire il superamento di barriere energetiche non troppo alte. Si arriva così alla conclusione che la transizione data dalle simulazioni sia di origine numerica e non fisica.

Ma, dato che è possibile fratturare un oggetto non fratturato, l'inaccessibilità delle configurazioni fratturate è contraddetta dall'esperienza. Ciò suggerisce che la barriera energetica sia in realtà la conseguenza di un difetto di modellazione, dovuto alla eccessiva semplicità del modello. Nel prossimo paragrafo si descrive una forma di regolarizzazione che, anziché sull'approssimazione numerica, agisce direttamente sul funzionale. Come si vedrà, con questa regolarizzazione si ottiene un sorprendente progresso nella descrizione della risposta fisica.

## LA REGOLARIZZAZIONE DI BARENBLATT

**A** G. I. Barenblatt è dovuta l'ipotesi che l'energia di frattura dipenda con continuità dall'apertura  $[u]$  della frattura [2]. La Fig. 2a, riferita al caso monodimensionale, mostra in che senso questa ipotesi si può considerare una regolarizzazione di quella di Griffith: mentre l'energia di Griffith è discontinua, poiché vale zero in  $[u] = 0$  e  $\gamma$  per tutte le  $[u] > 0$ , l'energia di Barenblatt passa con continuità da 0 a  $\gamma$  al crescere di  $[u]$ . Con questa ipotesi, l'espressione (1) dell'energia totale è sostituita da

$$E(u) = \int_{\Omega} w(\nabla u(x)) dx + \ell(u) + \int_{S(u)} \theta([u](x)) dA, \quad (8)$$

dove  $\theta$  è la densità superficiale dell'energia di frattura. Riportiamo alcune proprietà dei minimi di questa energia, dimostrate in [10] per il caso monodimensionale. In dimensione uno, il corpo  $\Omega$  diventa una barra rettilinea di lunghezza  $l$ , e la superficie di frattura  $S(u)$  è sostituita da un insieme finito o numerabile di punti di discontinuità  $x_i$ . Si suppone che non vi siano carichi applicati, e che alle estremità della barra siano assegnati gli spostamenti

$$u(0) = 0, \quad u(l) = \beta l. \quad (9)$$

Con queste ipotesi l'energia totale si riduce a

$$E(u) = \int_0^l w(u'(x)) dx + \sum_i \theta([u](x_i)). \quad (10)$$

Si dimostrano in [10] le condizioni di stazionarietà

$$w'(u'(x)) = \theta'([u](x_i)) = \sigma, \quad \sigma \leq \sigma_c \doteq \theta'(0), \quad (11)$$

dove  $\sigma$  è la forza assiale indotta dall'allungamento  $\beta l$ . Queste condizioni caratterizzano le configurazioni di equilibrio della barra. La prima condizione dice che la forza  $w'(u'(x))$  trasmessa attraverso i punti  $x$  della zona non fratturata coincide con la forza  $\theta'([u](x_i))$  trasmessa attraverso i punti  $x_i$  della zona fratturata, e la seconda dice che la forza non può superare il limite  $\sigma_c$ , dato dal valore della derivata di  $\theta$  nell'origine. La  $\theta'([u](x_i))$  è la forza coesiva trasmessa attraverso il punto  $x_i$ ; come si vede dalla Fig. 2b, questa forza diminuisce al crescere di  $[u]$ .

Le curve di risposta forza-allungamento determinate in [10] sono riportate nella Fig. 3a. In esse si individua un tratto iniziale ascendente, corrispondente al regime non fratturato. Esso termina quando  $\beta$  raggiunge il valore critico  $\beta_c$ , a cui corrisponde il valore limite  $\sigma_c = \theta'(0)$  di  $\sigma$ .

Per  $\beta > \beta_c$  si ha il regime fratturato. Esso può essere di due diversi tipi, a seconda della lunghezza  $l$  della barra. Per  $l$  sufficientemente piccolo la transizione avviene con regolarità, mentre per barre più lunghe la transizione comporta una brusca riduzione della forza, indicata con una freccia in Fig. 3a. A seconda della forma della funzione  $\theta$ , nella transizione si può arrivare al completo azzeramento della forza. Entrambi i tipi di regime fratturato sono caratterizzati da una curva di risposta a pendenza negativa, e cioè da una diminuzione della forza al crescere di  $\beta$ .

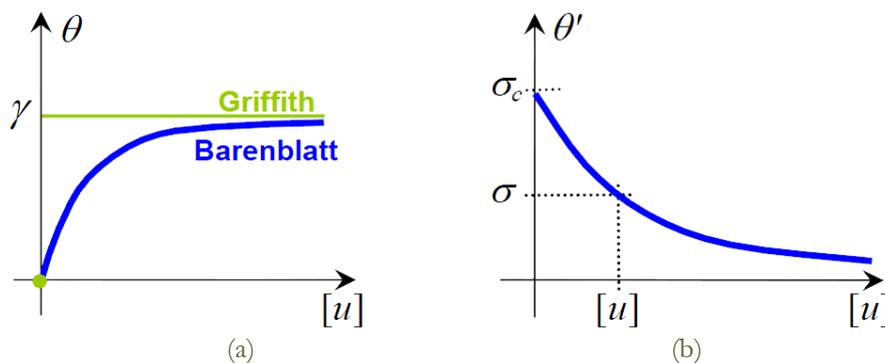


Figura 2: Confronto tra le energie di Griffith e di Barenblatt (a), e andamento delle forze trasmesse attraverso la superficie di discontinuità secondo Barenblatt (b).

Nei due tipi di regime fratturato si riconoscono le caratteristiche della *rottura duttile* e della *rottura fragile*. Si osservi che il tipo di regime non è determinato dalle caratteristiche  $w, \theta$  del materiale, ma da  $l$ , e cioè dalla dimensione della struttura. Precisamente, sono le strutture di dimensione maggiore quelle si comportano in maniera fragile. Si è così ritrovato l' *effetto di scala*. In conclusione, la regolarizzazione di Barenblatt prevede due proprietà importanti della frattura, la distinzione tra rottura duttile e fragile e l'effetto di scala, che la teoria di Griffith non è in grado di cogliere.

Ma l'ipotesi di Barenblatt presenta un altro vantaggio importante: con opportune scelte della funzione  $\theta$ , è possibile la modellazione di altri fenomeni anelastici mediante la minimizzazione dello stesso funzionale (8). In Fig. 3b, oltre a quelli di Griffith e di Barenblatt, sono mostrati altri due tipi di energia coesiva: l'*energia bimodale*, caratterizzata dalla presenza di un tratto convesso compreso fra due tratti concavi, e l'*energia convessa-concava*, in cui la convessità è presente in un intervallo destro dell'origine. Per questi due tipi di energia si hanno le curve di risposta mostrate in Fig. 4, cfr. [10] per maggiori dettagli. Nel caso dell'energia bimodale la curva di risposta presenta un andamento oscillatorio, con i rami ascendenti caratterizzati da valori crescenti del numero  $N$  di punti di discontinuità. Si osservi che la pendenza di questi rami decresce al crescere di  $N$ . Con un'opportuna taratura dei parametri, con questo tipo di risposta può essere riprodotto il comportamento di una barra soggetta a danneggiamento.

Nel caso dell'energia convessa-concava, il minimo energetico è raggiunto al limite per  $N$  infinito. Come spiegato in [10], questo tipo di risposta può essere interpretato come la creazione di una microstruttura. La curva di risposta  $N = \infty$  è orizzontale, e l'intero meccanismo riproduce una deformazione di tipo plastico.

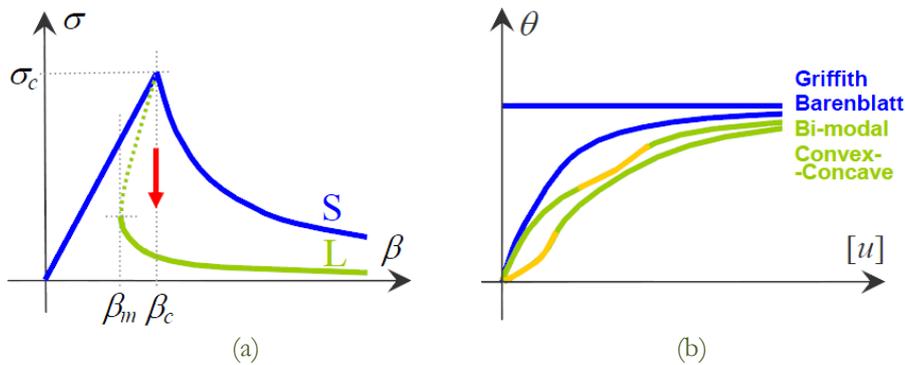


Figura 3: Curve di risposta forza-allungamento per l'energia coesiva di Barenblatt, per barre lunghe (L) e corte (S) (a). La freccia indica la caduta di tensione all'atto della rottura fragile. In (b) sono mostrati alcuni tipi di energia coesiva.

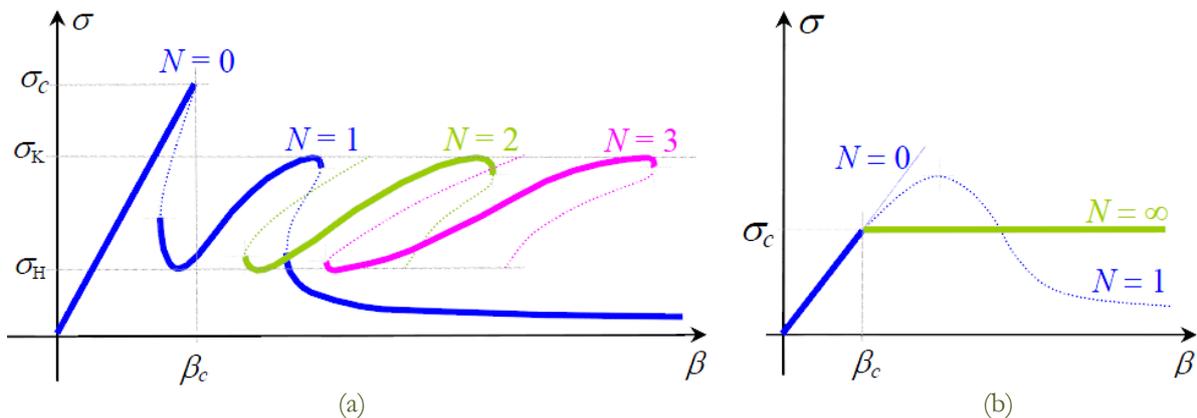


Figura 4: Curve di risposta forza-allungamento per l'energia bimodale (a) e convessa-concava (b).

## IL MODELLO DISSIPATIVO

Al fronte dei numerosi aspetti positivi, il modello di Barenblatt presenta un serio difetto: l'inadeguatezza alla descrizione dei fenomeni di scarico. In Fig. 5 sono mostrate le direzioni di carico e scarico previste nel caso della rottura fragile. Alla brusca riduzione della forza in fase di carico per  $\beta = \beta_c$ , corrisponde un altrettanto brusco



aumento in fase di scarico, nel punto  $\beta = \beta_m$  in cui la curva  $N=1$  ha tangente verticale. Questo salto della forza allo scarico non è confermato dagli esperimenti. Inoltre, desta perplessità il passaggio dalla curva  $N=1$  alla curva  $N=0$ , che contraddice l'ipotesi di irreversibilità della frattura.

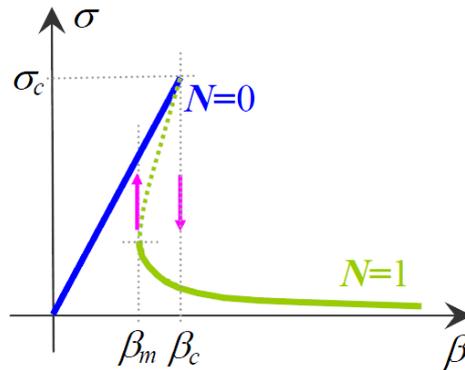


Figura 5: La legge di scarico prevista dal modello di Barenblatt.

Questa risposta inadeguata può essere attribuita al fatto che l'energia di Griffith, e poi quella di Barenblatt, sono solitamente considerate come energie elastiche di deformazione, e quindi totalmente reversibili. In [10] è invece esaminata l'ipotesi opposta, che le due energie siano totalmente dissipative. Una notevole conseguenza della nuova ipotesi è che essa introduce un gran numero di nuove configurazioni di equilibrio. Mentre nel modello elastico le sole configurazioni di equilibrio sono quelle situate sulle curve di risposta, nel modello dissipativo diventano configurazioni di equilibrio tutte quelle situate al di sotto delle curve di risposta. Esse corrispondono alle aree in grigio nelle Fig. 6a e 6b.

Nelle stesse figure, le frecce mostrano le direzioni dell'evoluzione in fase di carico ( $\beta$  crescente) e in fase di scarico ( $\beta$  decrescente). Esse sono determinate risolvendo un problema di minimo incrementale, nel quale si minimizza il funzionale quadratico

$$I([\dot{u}]_i) = w''(u')(l^{-1}(\sum_i [\dot{u}]_i)^2 - 2\beta \sum_i [\dot{u}]_i) + \sum_i \theta''([u]_i)[\dot{u}]_i^2, \quad (12)$$

soggetto al vincolo

$$[\dot{u}]_i \geq 0, \quad (13)$$

che è conseguenza della non negatività della potenza di dissipazione [10].

Dalle direzioni di evoluzione mostrate in Fig. 6a si vede che, una volta superato il valore critico  $\beta = \beta_c$ , non è più possibile ritornare sulla curva di carico  $N=0$ . La Fig. 6b mostra invece che il modello dissipativo applicato all'energia coesiva convessa-concava riproduce le leggi di carico-scarico tipiche della plasticità. In particolare, il fatto che la retta inclinata mostrata in figura possa spostarsi solo nella direzione delle  $\beta$  crescenti traduce l'irreversibilità della deformazione plastica.

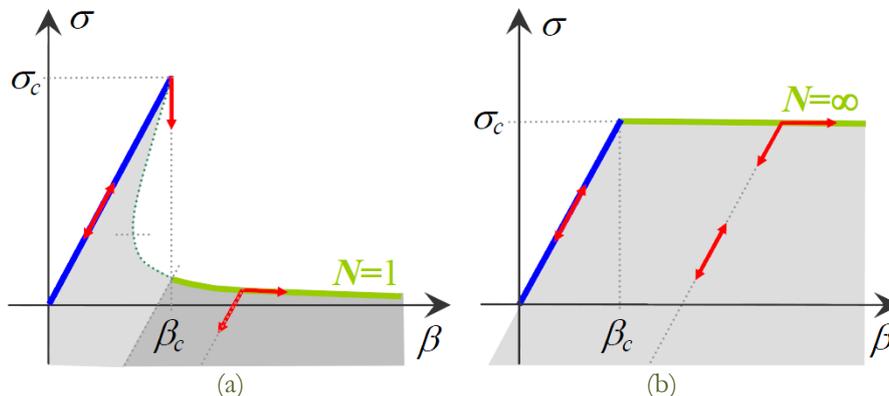


Figura 6: Le direzioni di carico-scarico previste dall'ipotesi dissipativa, nel modello di Barenblatt per il caso di rottura fragile (a), e nel modello convesso-concavo (b).



## DALLA FRATTURA CONCENTRATA ALLA FRATTURA DIFFUSA

**G**li esperimenti mostrano che nell'intorno dell'apice della frattura si forma una zona danneggiata nella quale si hanno, a seconda dei casi, microfratture o deformazioni plastiche. Questa zona, nota come zona di processo, ha un'estensione importante nel caso della rottura duttile, e trascurabile nel caso della rottura fragile. In un certo senso, le zone scure in Fig. 1c sono una rappresentazione delle zone di processo. Ma la rappresentazione è poco realistica, dato che ha origine dall'approssimazione numerica (5) e non da un'ipotesi fisica.

Vi è attualmente un forte interesse a chiarire il legame tra plasticità, danneggiamento, e frattura. Un'idea su cui si sta lavorando è abbandonare l'ipotesi che l'energia coesiva sia concentrata su superfici, supponendo invece che essa sia diffusa sul volume. Questo nuovo approccio è basato sull'idea che debbano essere le proprietà di concavità-convessità dell'espressione dell'energia a determinare se, al crescere del carico, la zona danneggiata si diffonde stabilmente su tutto il volume, oppure si concentra su superfici singolari. Nel primo caso si creeranno estese zone danneggiate che, alla fine, porteranno alla rottura duttile, mentre nel secondo caso le zone danneggiate saranno poco estese, e alla fine si avrà la rottura fragile.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] L. Ambrosio, M.V. Tortorelli, *Boll. Un. Mat. Ital.*, 6-B (1992) 105.
- [2] G. I. Barenblatt, *Adv. Appl. Mech.*, 7 (1962) 55.
- [3] E. Benvenuto, *La Scienza delle Costruzioni e il suo sviluppo storico*, Sansoni (1981). Repr. *Storia e Letteratura* (2006).
- [4] B. Bourdin, G. A. Francfort, J.-J. Marigo, *J. Mech. Phys. Solids*, 48 (2000) 797.
- [5] B. Bourdin, G. A. Francfort, J.-J. Marigo, *J. Elasticity*, 91 (2008) 5.
- [6] A. Chambolle, A. Giacomini, M. Ponsiglione, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 188 (2008) 309.
- [7] C. A. Coulomb, *Essai sur une application de Maximis et Minimis à quelques Problèmes de Statique, relatifs à l'Architecture*. In: *Mémoires de Mathématique et de Physique présentés à l'Académie Royale des Sciences par divers Savants*, 7 (1773) 343.
- [8] G. Dal Maso, *An Introduction to  $\Gamma$ -convergence*, Birkhäuser, Boston (1993).
- [9] G. Del Piero, R. March, G. Lancioni, *J. Mech. Phys. Solids*, 55 (2007) 2513.
- [10] G. Del Piero, L. Truskinovsky, *Cont. Mech. Thermodyn.*, 21 (2009) 141.
- [11] G. A. Francfort, J.-J. Marigo, *J. Mech. Phys. Solids*, 46 (1998) 1319.
- [12] G. Galilei, *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla Meccanica e ai Movimenti Locali*, Elsevier, Leyden (1638).
- [13] A. A. Griffith, *Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A*, 221 (1920) 163.
- [14] G. R. Irwin, *Fracture*. *Encyclopedia of Physics*, Springer-Verlag, IV (1958) 551.
- [15] G.R. Irwin, in: *Structural Mechanics, Proc. 1<sup>st</sup> Symposium on Naval Structural Mechanics*, Stanford University, Pergamon Press, London-New York, (1960) 557.
- [16] D. Mumford, J. Shah, *Comm. Pure Appl. Math.*, 42 (1989) 577.
- [17] S.P. Timoshenko, *History of Strength of Materials* (1953), Mc Graw-Hill. Repr. Dover (1983).