

IL METODO DEGLI ELEMENTI AL CONTORNO PER LA DETERMINAZIONE DEL FATTORE DI
INTENSITA' DEGLI SFORZI NEI MATERIALI COMPOSITI

M. Marchetti, G. Ikonopoulou - Università di Roma "La Sapienza"
S. Sgubini - Università di Pisa

SOMMARIO

Nei casi di strutture in cui siano presenti cricche e si desideri conoscere con accuratezza il valore del fattore di intensità degli sforzi all' apice della cricca, non è sufficiente riferirsi a soluzioni approssimate, ma occorre utilizzare sofisticate tecniche numeriche.

In particolare, in questo lavoro, viene utilizzato un metodo agli elementi al contorno; i risultati sono confrontati con quelli ottenuti con tecniche analoghe e con tecniche agli elementi finiti.

INTRODUZIONE

La determinazione dell' andamento del campo di tensione all' apice di una cricca è stato oggetto di numerosi studi [1,2,3,4,5,6].

Seguendo il modello bidimensionale proposto da Westergaard [1] e da Irwin [2], l' andamento degli sforzi in presenza di una cricca, può essere espresso dalla relazione:

$$\sigma_{ij} = K \frac{f_{ij}(\varphi)}{\sqrt{2\pi r}} + \text{al. term} \quad (1)$$

dove r è la distanza dall' apice della cricca e φ l' angolo tra la direzione della cricca ed il generico punto; σ_{ij} sono le componenti del tensore degli sforzi e $f_{ij}(\varphi)$ opportune funzioni trigonometriche adimensionali. I termini non specificatamente indicati nella (1), non presentano singolarità e quindi, nelle immediate vicinanze della cricca, il loro contributo è trascurabile.

Il fattore di intensità degli sforzi K è in genere definito per i tre diversi modi di apertura della cricca indicati in Fig.1.

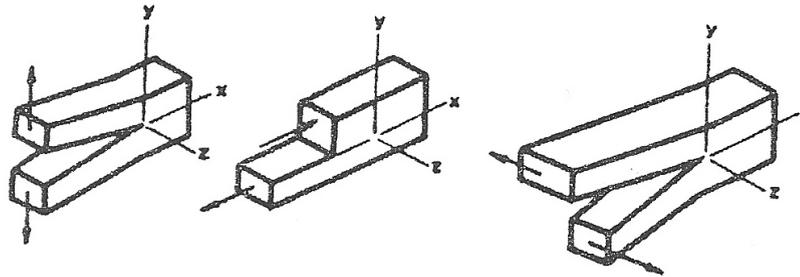


Figura 1. Modi fondamentali di apertura della cricca: a) apertura, b) scorrimento, c) lacerazione.

In particolare, per i primi due, nel caso di piastra finita risulta [7]:

$$\begin{aligned} K_1 &= Y_1 T \sqrt{\pi L} \\ K_2 &= Y_2 T \sqrt{\pi L} \end{aligned} \quad (2)$$

dove T è la tensione applicata, L la semilunghezza della cricca, Y il fattore di correzione che tiene opportunamente conto delle dimensioni finite della struttura e della posizione in cui si manifesta la cricca.

Nel caso in cui la direzione della cricca formi un angolo θ con la direzione di applicazione del carico, Fig.2, risulta [7]:

$$\begin{aligned} K_1 &= Y_1 T \sqrt{\pi L \sin^2 \theta} \\ K_2 &= Y_2 T \sqrt{\pi L \cos \theta \sin \theta} \end{aligned} \quad (3)$$

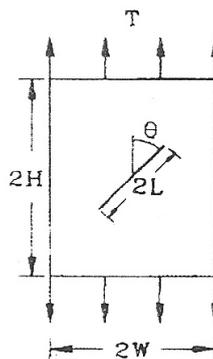


Figura 2. Piastra di dimensioni finite con cricca inclinata.

Scopo del presente lavoro è il calcolo dei fattori di correzione Y_1, Y_2 nel caso di una piastra di dimensioni finite in materiale composito (modellizzato come una sequenza di strati omogenei ed anisotropi) utilizzando

il metodo degli elementi al contorno. I risultati sono confrontati con quelli ottenuti da altri Autori con lo stesso metodo [8,9,10] o mediante tecniche agli elementi finiti [7].

GENERALITA' SUL METODO DEGLI ELEMENTI AL CONTORNO

Il metodo degli elementi al contorno trae origine dal teorema di reciprocità di Betti [11] e di identità di Somigliana [12].

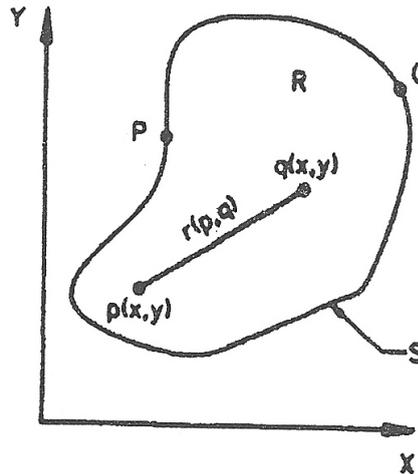


Figura 3. Geometria del corpo.

Per problemi elastici, con riferimento alla Fig.3, la relazione che fornisce lo spostamento $u_i(p)$, nei punti p interni al dominio R delimitato dal contorno S (il pedice "i" individua la componente i -esima del vettore) può essere espressa, nell' ipotesi che i carichi t_j siano applicati solamente sul contorno, nella forma:

$$u_i(p) = \int_S U_{ij}(p, Q) t_j(Q) dS - \int_S T_{ij}(p, Q) u_j(Q) dS \quad (4)$$

I punti indicati con lettera maiuscola si riferiscono a punti appartenenti al contorno.

Le funzioni U e T indicano le soluzioni della equazione di Navier corrispondenti rispettivamente al carico e spostamento unitario imposto nel generico punto Q del contorno (soluzioni fondamentali).

Dalla (4) è immediato calcolare le deformazioni:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (5)$$

(il simbolo $u_{i,j}$ indica la derivata rispetto a x_j).
Attraverso la legge di Hooke:

$$\sigma_{ij} = [C] \varepsilon_{ij} \quad (6)$$

è possibile esprimere gli sforzi nella forma:

$$\sigma_{ik}(p) = \int_S U_{ikj}^{\sigma}(p, Q) t_j(Q) dS - \int_S T_{ikj}^{\sigma}(p, Q) u_j(Q) dS \quad (7)$$

Si osserva che sforzi e spostamenti nel generico punto p implicano la conoscenza degli spostamenti e dei carichi in ogni punto del contorno: questi, seguendo i risultati mostrati in [14] possono essere ottenuti risolvendo l'equazione integrale di Fredholm, in letteratura indicata come Boundary Integral Equation (BIE) [10,13,14]:

$$C_{ij} u_j(P) + \int_{\langle S \rangle} T_{ij}(P, Q) u_j(Q) dS = \int_{\langle S \rangle} U_{ij}(P, Q) t_j(Q) dS \quad (8)$$

dove $\langle \rangle$ indica l'integrale in parte principale e:

$$C_{ij}(P) = \int_{\langle S \rangle} T_{ij}(P, Q) dS \quad (9)$$

Nelle precedenti equazioni devono essere esplicitati i nuclei U e T la cui forma dipende dal particolare tipo di problema in esame (caso bidimensionale o tridimensionale, materiale isotropo o anisotropo, presenza o meno di cricche, ecc.).

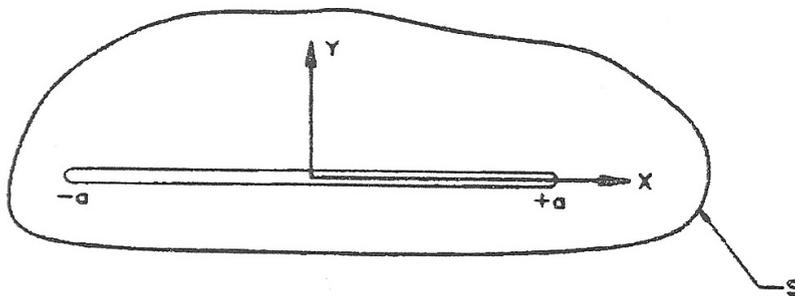


Figura 4. Geometria della cricca.

Nel caso di problema bidimensionale con materiale anisotropo ed in presenza di una cricca piana lungo l'asse x , la cui geometria è indicata in Fig.4, le funzioni U e T risultano [10]:

$$U_{ji}(p, q; L) = 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^2 P_{ik} \phi_{jk}(z_k, c_k) \right] \quad (10)$$

$$T_{ji}(p, q; L) = 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^2 Q_{ik} (\mu_k n_1 - n_2) \frac{d\phi_{jk}(z_k, c_k)}{dz_k} \right] \quad (11)$$

dove "L" individua la dimensione caratteristica della cricca e:

$$\{P_{ik}\} = \left\{ \begin{array}{l} \beta_{11}\mu_k^2 + \beta_{12} - \beta_{16}\mu_k \\ \frac{\beta_{22}}{\mu_k} + \beta_{12}\mu_k - \beta_{26} \end{array} \right\} \quad (12)$$

$$\{Q_{ik}\} = \left\{ \begin{array}{l} \mu_k \\ 1 \end{array} \right\} \quad (13)$$

La variabile z_k è definita attraverso la relazione:

$$z_k = x + \mu_k y \quad (14)$$

con x, y coordinate del generico punto e μ_k ($k = 1, 2$) soluzioni complesse coniugate della equazione caratteristica:

$$\beta_{22} - 2\mu\beta_{26} + (2\beta_{12} + \beta_{66})\mu^2 - 2\beta_{16}\mu^3 + \beta_{11}\mu^4 = 0 \quad (15)$$

che assicura la compatibilità delle deformazioni:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (16)$$

avendo assunto che gli sforzi siano esprimibili secondo la formulazione di Airy, attraverso le relazioni:

$$\sigma_x = 2 \operatorname{Re} \left[\mu_1^2 \frac{d^2 F_1}{dz_1^2} + \mu_2^2 \frac{d^2 F_2}{dz_2^2} \right] \quad (17)$$

$$\sigma_y = 2 \operatorname{Re} \left[\frac{d^2 F_1}{dz_1^2} + \frac{d^2 F_2}{dz_2^2} \right] \quad (18)$$

$$\tau_{xy} = -2 \operatorname{Re} \left[\mu_1 \frac{d^2 F_1}{dz_1^2} + \mu_2 \frac{d^2 F_2}{dz_2^2} \right] \quad (19)$$

e tali da soddisfare la legge di Hooke:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{16} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{26} \\ \beta_{16} & \beta_{26} & \beta_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (20)$$

Le funzioni $\phi_{jk} = \frac{dF_{jk}}{dz_k}$ (l' indice j si riferisce alla componente del carico applicato) sono tali che:

$$\phi_{jk}(z_k) = -\frac{1}{2\pi(\mu_l - \mu_k)} \cdot \left[(\mu_l - \mu_k) A_{jk} J(z_k, c_k) + (\mu_l - \bar{\mu}_l) \bar{A}_{jl} J(z_k, \bar{c}_l) + (\mu_l - \bar{\mu}_k) \bar{A}_{jk} J(z_k, \bar{c}_k) \right] + A_{jk} \log(z_k - c_k) \quad (21)$$

con $l = 3-k$ e $J(z, c)$ dato da:

$$J(c, z) = \pi \log \left\{ \frac{\sqrt{z^2 - L^2} \sqrt{c^2 - L^2} + cz - L^2}{\left[z + \sqrt{z^2 - L^2} \right] \left[c + \sqrt{c^2 - L^2} \right]} \right\} \quad (22)$$

Nella precedente relazione c_k individua la posizione dove è applicato il carico, n_1, n_2 sono le normali alla superficie e le costanti complesse A_{ij} sono determinate in modo da soddisfare la condizione che il carico applicato, relativo alle soluzioni fondamentali, sia unitario (con \bar{A}_{jk} complesso coniugato di A_{jk} e analoghe):

$$\sum_{k=1}^2 (A_{jk} - \bar{A}_{jk}) = \frac{\delta_{j2}}{2\pi i} \quad (23)$$

$$-\sum_{k=1}^2 (\mu_k A_{jk} - \bar{\mu}_k \bar{A}_{jk}) = \frac{\delta_{j1}}{2\pi i} \quad (24)$$

e la continuità degli spostamenti:

$$\sum_{k=1}^2 (p_k A_{jk} - \bar{p}_k \bar{A}_{jk}) = 0 \quad (25)$$

$$\sum_{k=1}^2 (q_k A_{jk} - \bar{q}_k \bar{A}_{jk}) = 0 \quad (26)$$

dove:

$$\begin{aligned}
 p_k &= \beta_{11} \mu_k^2 + \beta_{12} - \beta_{16} \mu_k \\
 q_k &= \frac{\beta_{22}}{\mu_k} + \beta_{12} \mu_k - \beta_{26}
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

e δ_{ij} delta di Kroneker.

Dalle precedenti relazioni è possibile [8] esprimere i fattori di intensità degli sforzi attraverso le:

$$K_1 = \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ (2 \pi r)^{\frac{1}{2}} [\beta_{12} \varepsilon_{11} + \beta_{22} \varepsilon_{22} + 2\beta_{26} \varepsilon_{12}]_{\theta=0} \right\}
 \tag{28}$$

$$K_2 = \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ (2 \pi r)^{\frac{1}{2}} [\beta_{16} \varepsilon_{11} + \beta_{26} \varepsilon_{22} + 2\beta_{66} \varepsilon_{12}]_{\theta=0} \right\}
 \tag{29}$$

SIMULAZIONI NUMERICHE

Nella simulazione numerica il contorno è discretizzato in un numero finito di segmenti lungo i quali si assume una distribuzione lineare sia degli spostamenti che dei carichi applicati. Si osserva che per continuità lo spostamento del nodo tra due elementi contigui deve essere il medesimo, mentre per il carico tale condizione ovviamente non è richiesta.

Assumendo la distribuzione lineare all' interno di ogni elemento, l' equazione integrale (8) che consente di determinare gli spostamenti e le eventuali reazioni vincolari incognite sul contorno, può essere espressa nella forma:

$$\begin{aligned}
 C_{ij} u_j(P_N) + \sum_{M=1}^{NSEG} \int_{\Delta S_M} \left\{ \sum_{m=1}^2 \left[\frac{1}{2} - (-1)^m \frac{\bar{Q}}{\Delta S} + (-1)^m \frac{\hat{Q}}{\Delta S} \right] u_j^m \right\} T_{ij}(P_N, Q) dS \\
 = \sum_{M=1}^{NSEG} \int_{\Delta S_M} \left\{ \sum_{m=1}^2 \left[\frac{1}{2} - (-1)^m \frac{\bar{Q}}{\Delta S} + (-1)^m \frac{\hat{Q}}{\Delta S} \right] t_j^m \right\} U_{ij}(P_N, Q) dS
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

dove \bar{Q} individua il punto medio dell' elemento, ΔS la lunghezza dell' elemento e \hat{Q} la posizione corrente.

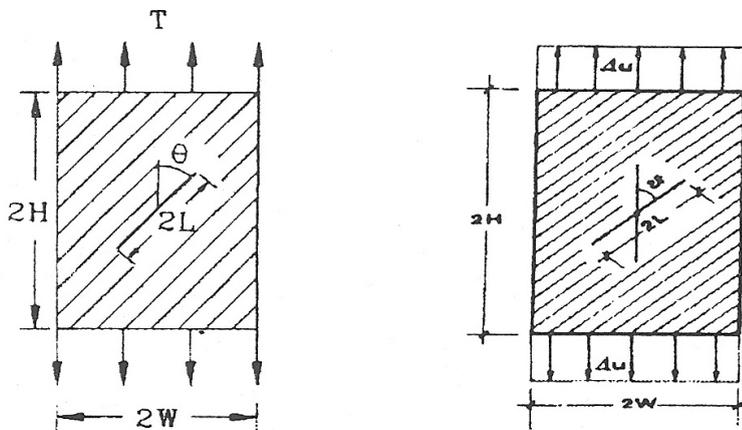
Una volta valutati gli integrali che intervengono nelle precedenti equazioni (se la geometria è elementare l' integrazione può essere agevolmente effettuata in via analitica) si perviene ad un sistema algebrico lineare.

Il programma di calcolo che è stato implementato consente la simulazione di un composito multistrato simmetrico con cricca comunque orientata.

Al fine di confrontare i risultati con quelli ottenuti in [7] dove il modello matematico (Modified Mapping Collocation Method) è stato simulato mediante una tecnica agli elementi finiti, è stata presa in esame la stessa configurazione esaminata in [7], consistente in una piastra piana rettangolare in laminato unidirezionale con fibre orientate lungo la direzione della cricca e con caratteristiche elastiche e geometriche mostrate nella Tab.1 e Fig.5.

Tabella 1. Caratteristiche del laminato.

	Vetro-Epoxy	Grafite-Epoxy
E_1 (GPa)	48.27	133.8
E_2 (GPa)	17.24	9.58
G_{12} (GPa)	6.90	4.80
ν_{12}	0.29	0.28



$$\frac{H}{W} = 1, 2, 3 \quad , \quad \frac{L}{W} = 0.1 \rightarrow 0.7 \quad , \quad \theta = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$$

Figura 5. Geometria della piastra.

Sono stati considerati diversi valori del rapporto H/W per poter stabilire da quale punto in poi la piastra possa essere assunta come infinita e quindi tale che le condizioni al contorno non influenzino più i risultati. Si sono altresì considerati diversi valori del rapporto L/W e dell' inclinazione θ della cricca. Sono state effettuate due diverse condizioni di sollecitazioni esterne: una corrispondente ad una tensione uniforme ($T=10$ KPa) applicata su due lati del contorno, Fig.5, ed una corrispondente ad uno spostamento uniforme ($\Delta u = 0,4 \cdot 10^{-6}$ m).

Nelle figure che seguono sono riportati gli andamenti dei fattori di correzione K_1, K_2 al variare dei rapporti L/W e H/W . In ogni figura i due grafici si riferiscono rispettivamente ai risultati riportati in [7] ed a quelli

ottenuti con il programma di calcolo relativo al metodo agli elementi al contorno precedentemente illustrato.

Le Fig.6-7-8-9 e Fig.10-11-12-13 si riferiscono rispettivamente al caso di laminato in Vetro-Epoxy e Grafite-Epoxy per diversi valori dell' angolo θ che la cricca forma con la direzione del carico nel caso di tensione uniforme. Sempre per il caso della tensione uniforme, in Fig.14, si confronta il comportamento del materiale anisotropo e di uno isotropo ($E=133.24$ GPa, $\nu=0.29$) nell' ipotesi di $\theta=90^\circ$. Infine nelle Fig.15-16 viene indicato l' andamento di χ_1 al variare di θ .

Nella Tab.2 sono indicati i valori di correzione χ_1, χ_2 per una piastra isotropa, con le caratteristiche geometriche e meccaniche indicate soggetta a tensione uniforme, ottenuti nel presente studio e da altri Autori.

Tabella 2. Confronto dei risultati numerici ottenuti nel presente lavoro con quelli di altri Autori.

(Caso isotropo $E=48.24$ GPa, $\nu=0.29$, $\frac{H}{W} = 3$, $\frac{L}{W} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\theta = 45^\circ$).

	χ_1	χ_2
Tada FEM	1.46	1.2
Cruse FEM	1.456	1.180
Cruse BIE	1.424	1.180
Karami BIE	1.464	1.182
Blandford BEM	1.45	1.196
Yum - Hong FEM	1.453	1.182
presente studio BIE	1.423	1.180

Da Fig.17 fino a Fig.27 si fa riferimento al caso in cui venga imposto lo spostamento uniforme.

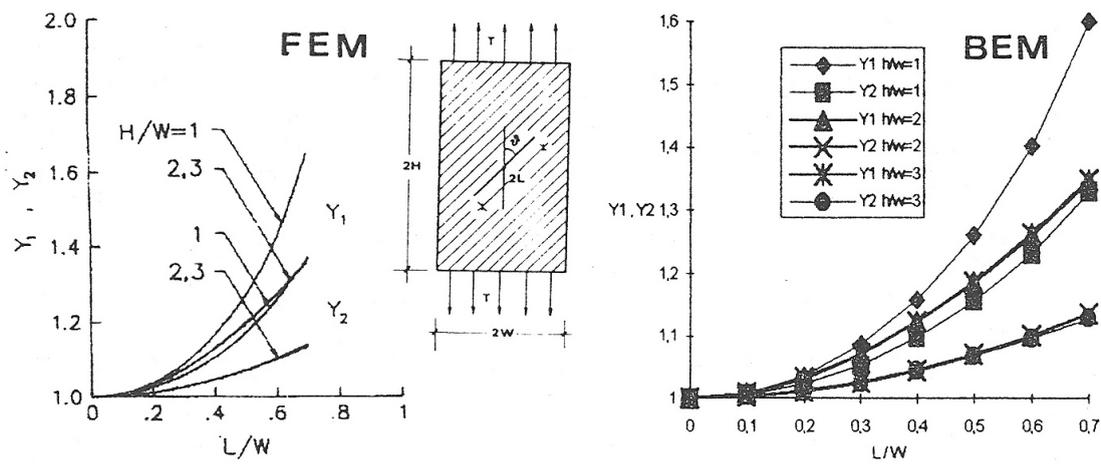


Figura 6. Laminato Vetro - Epoxy. $\theta = 30^\circ$. Tensione uniforme.

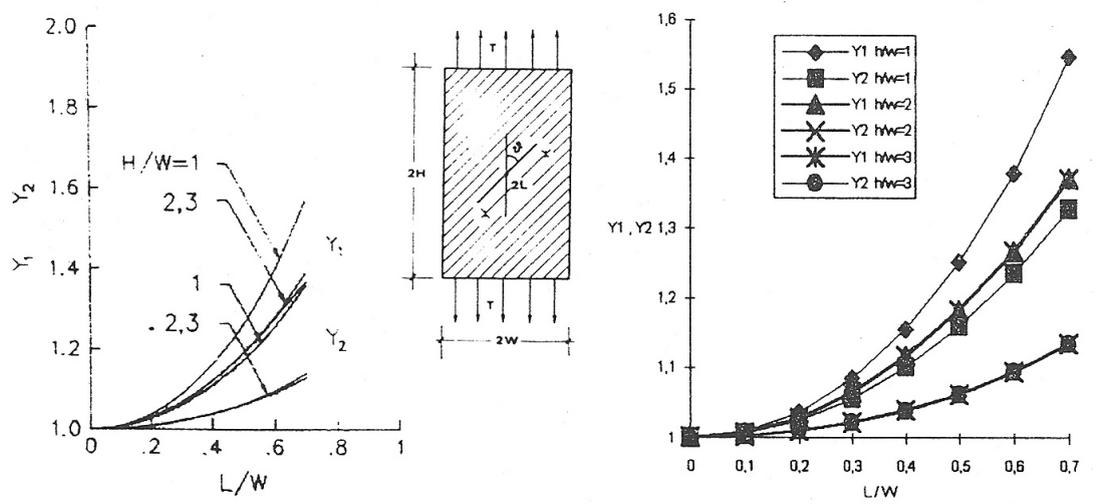


Figura 7. Laminato Vetro - Epoxy. $\theta = 45^\circ$. Tensione uniforme.

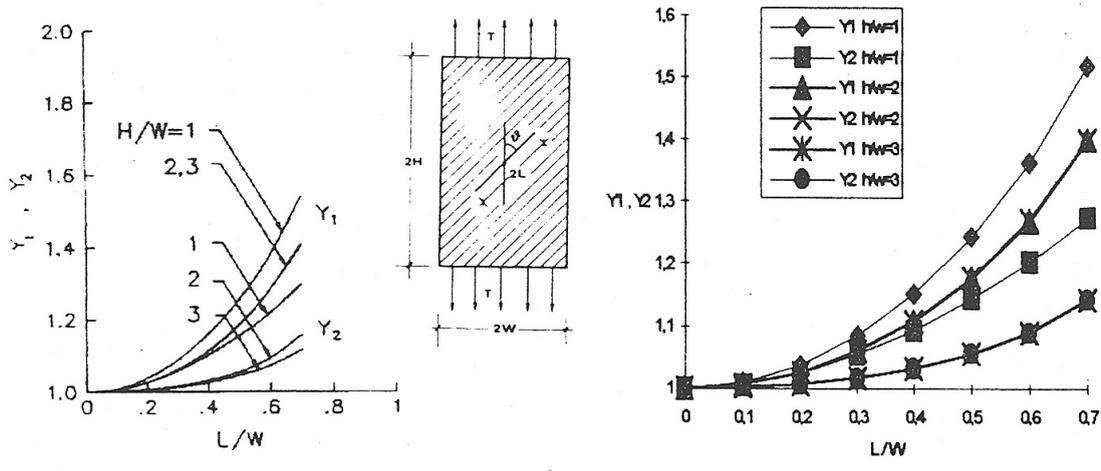


Figura 8. Laminato Vetro - Epoxy. $\theta = 60^\circ$. Tensione uniforme.

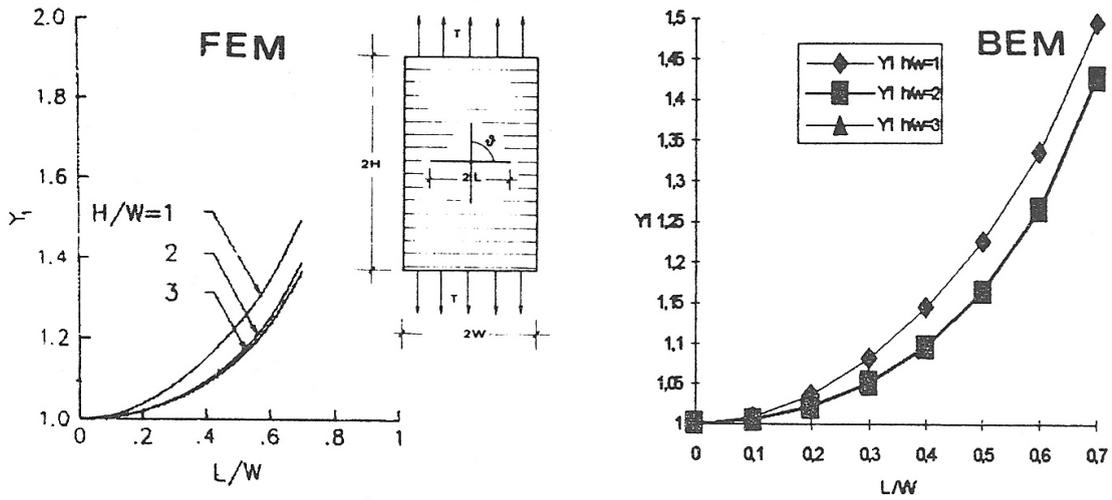


Figura 9. Laminato Vetro - Epoxy. $\theta = 90^\circ$. Tensione uniforme.

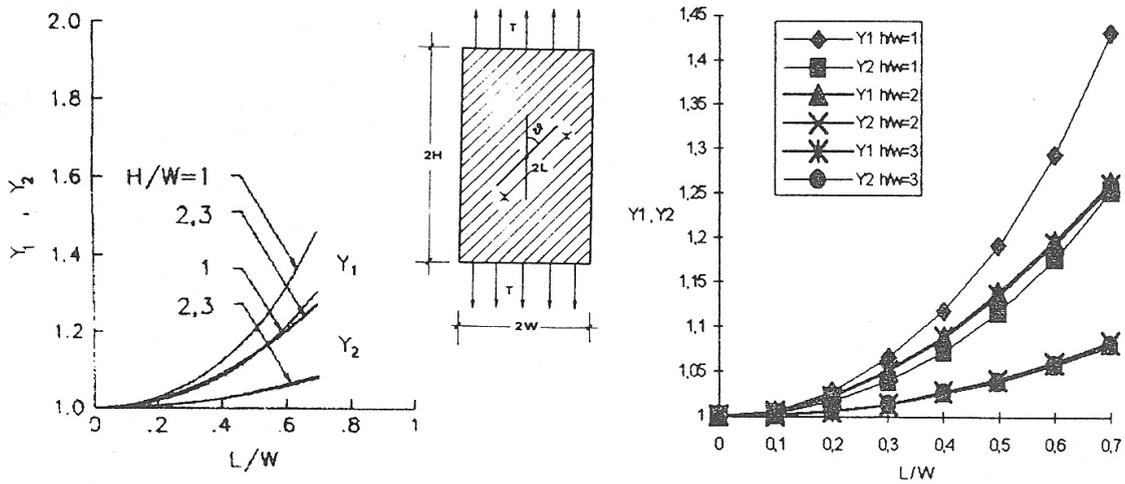


Figura 10. Laminato Grafite - Epoxy. $\theta = 30^\circ$. Tensione uniforme.

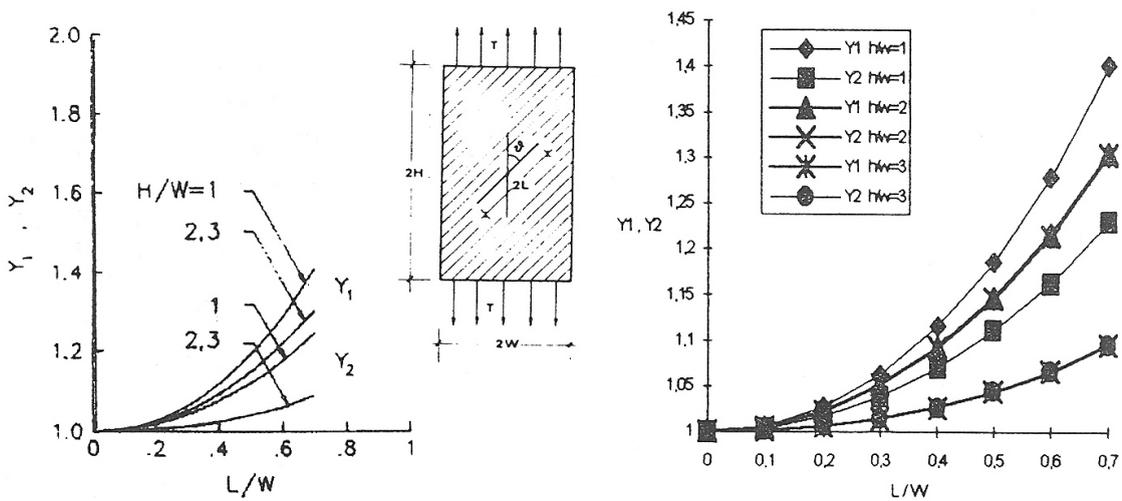


Figura 11. Laminato Grafite - Epoxy. $\theta = 45^\circ$. Tensione uniforme.

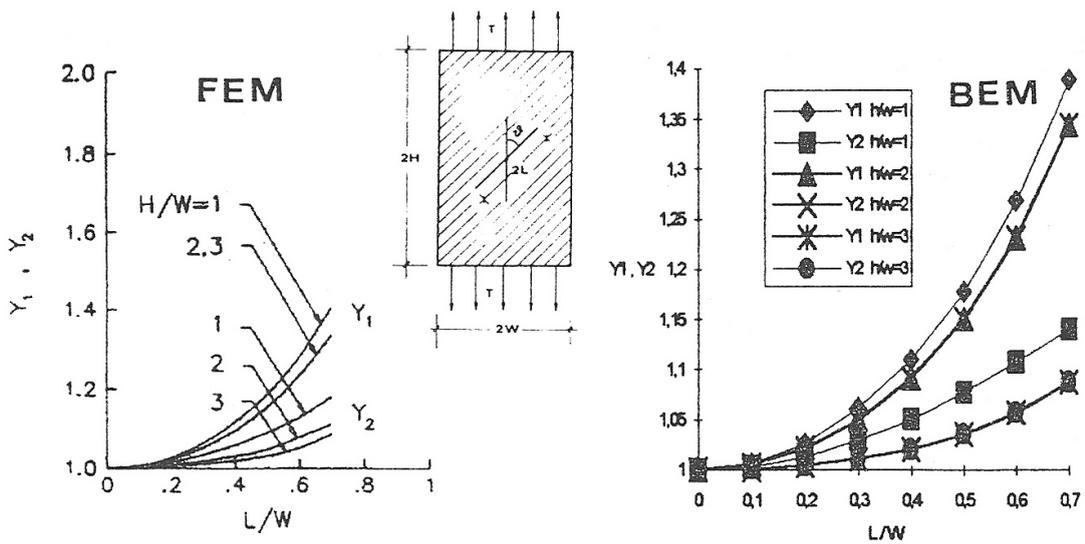


Figura 12. Laminato Grafite - Epoxy. $\theta = 60^\circ$. Tensione uniforme.

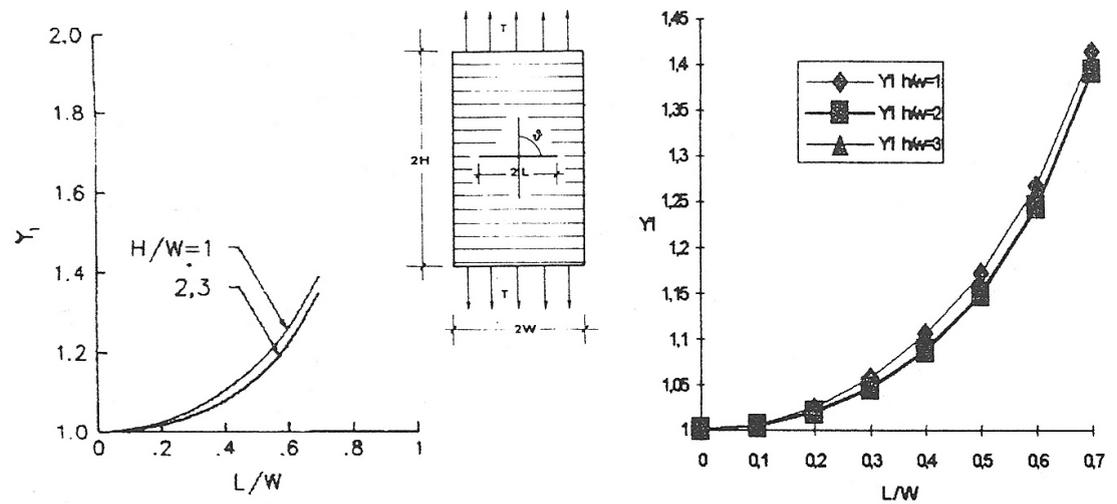


Figura 13. Laminato Grafite - Epoxy. $\theta = 90^\circ$. Tensione uniforme.

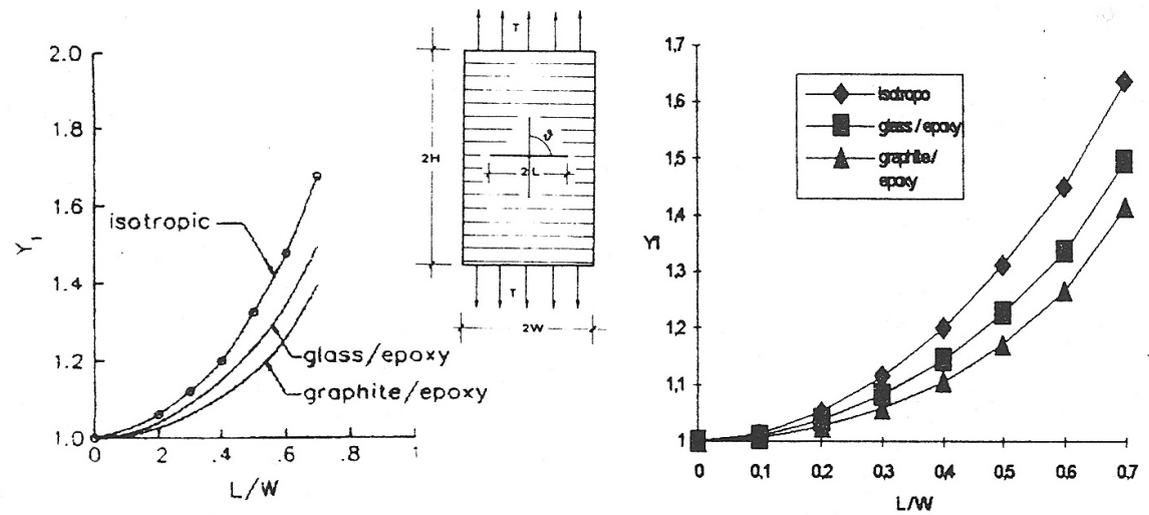


Figura 14. Confronto caso isotropo. $\theta = 90^\circ$. $H/W=1$. Tensione uniforme

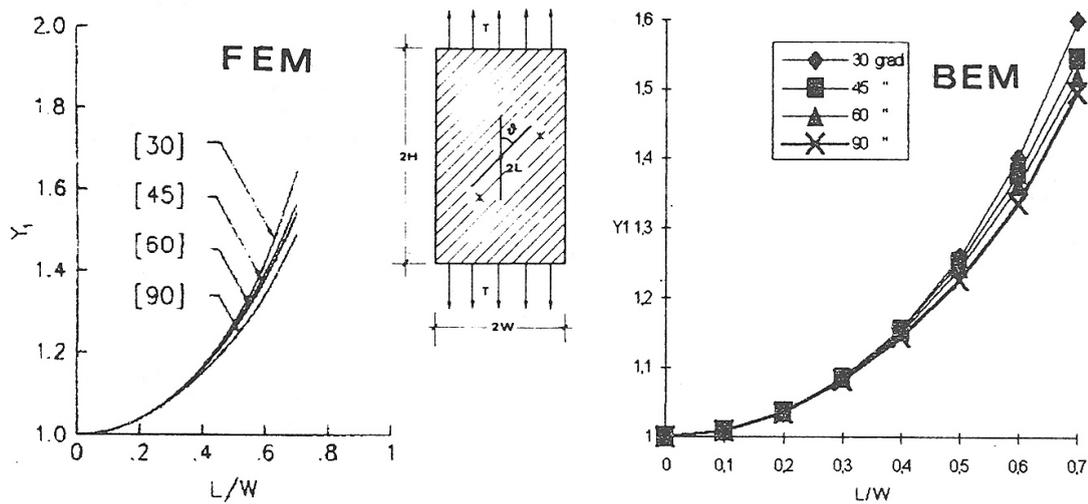


Figura 15. Laminato Vetro - Epoxy. Cricca a inclinazione variabile. $H/W=1$. Tensione uniforme.

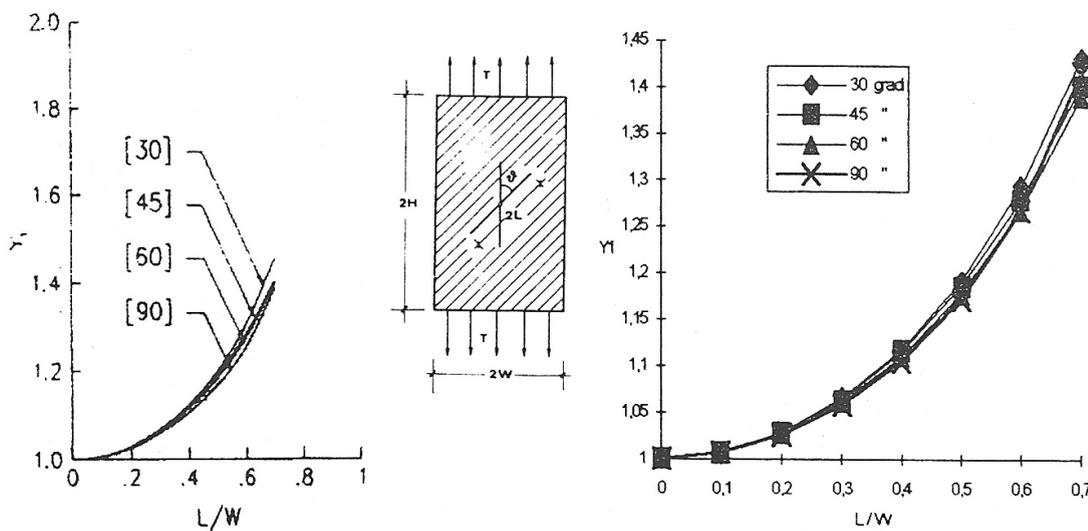


Figura 16. Laminato Grafite - Epoxy. Cricca a inclinazione variabile. $H/W=1$. Tensione uniforme.

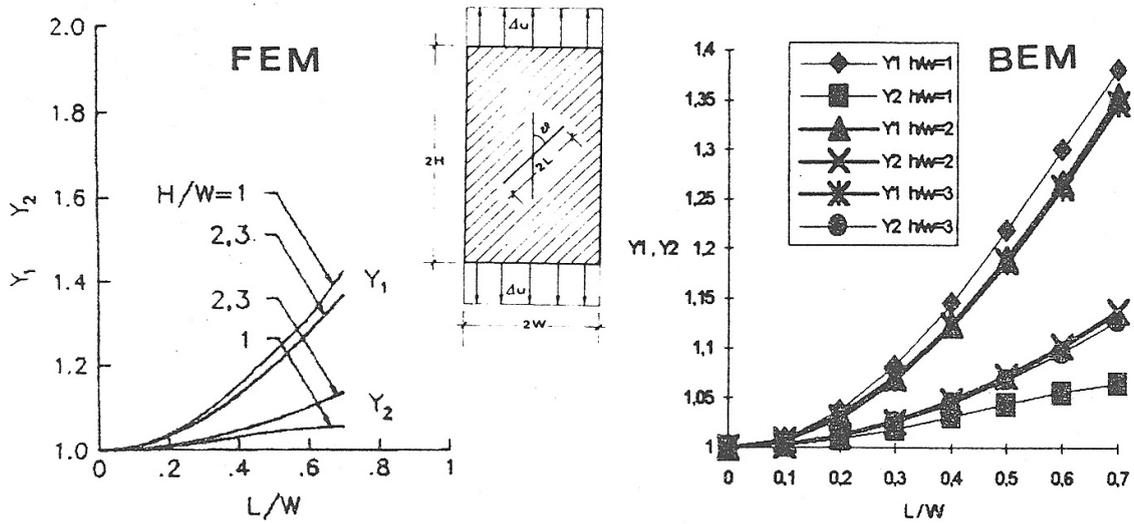


Figura 17. Laminato Vetro - Epoxy. $\theta = 30^\circ$. Spostamento uniforme.

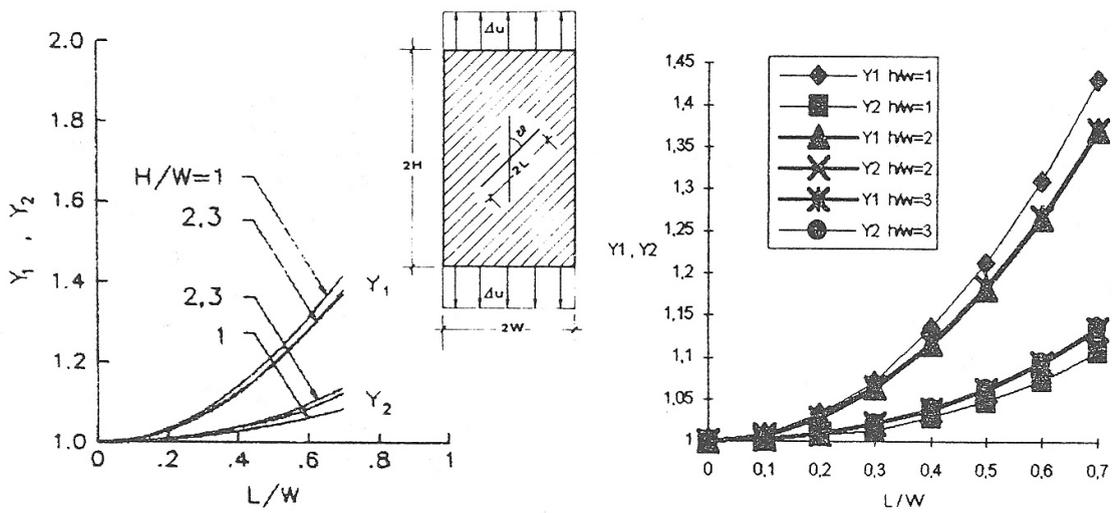


Figura 18. Laminato Vetro - Epoxy. $\theta = 45^\circ$. Spostamento uniforme.

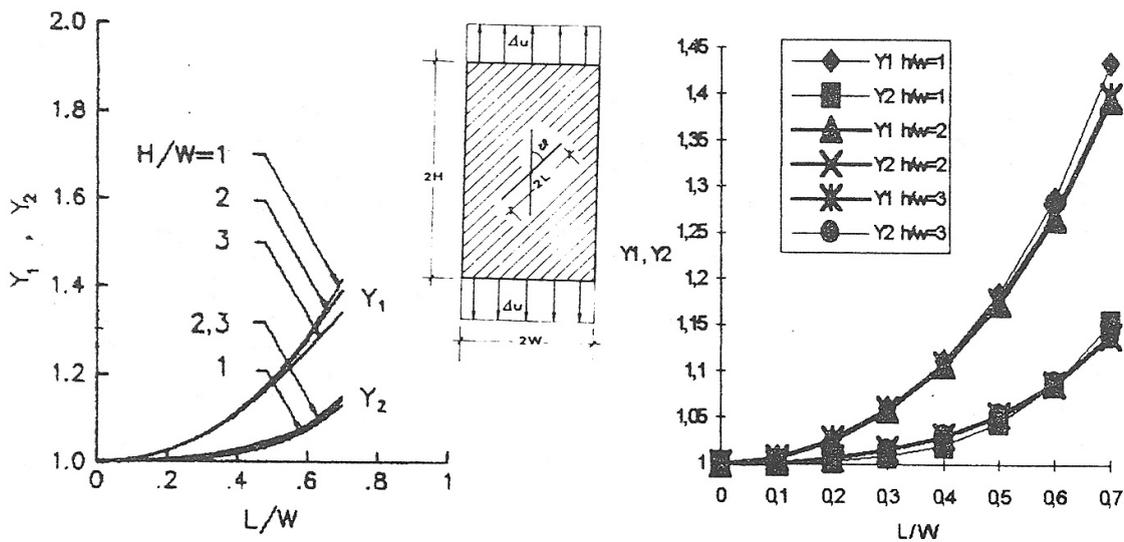


Figura 19. Laminato Vetro - Epoxy. $\theta = 60^\circ$. Spostamento uniforme.

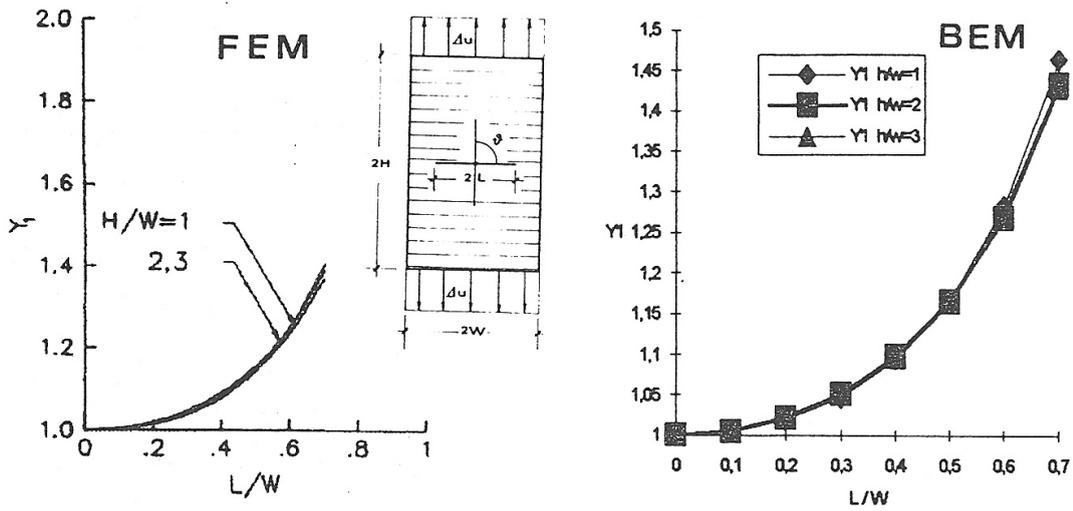


Figura 20. Laminato Vetro - Epoxy. $\theta = 90^\circ$. Spostamento uniforme.

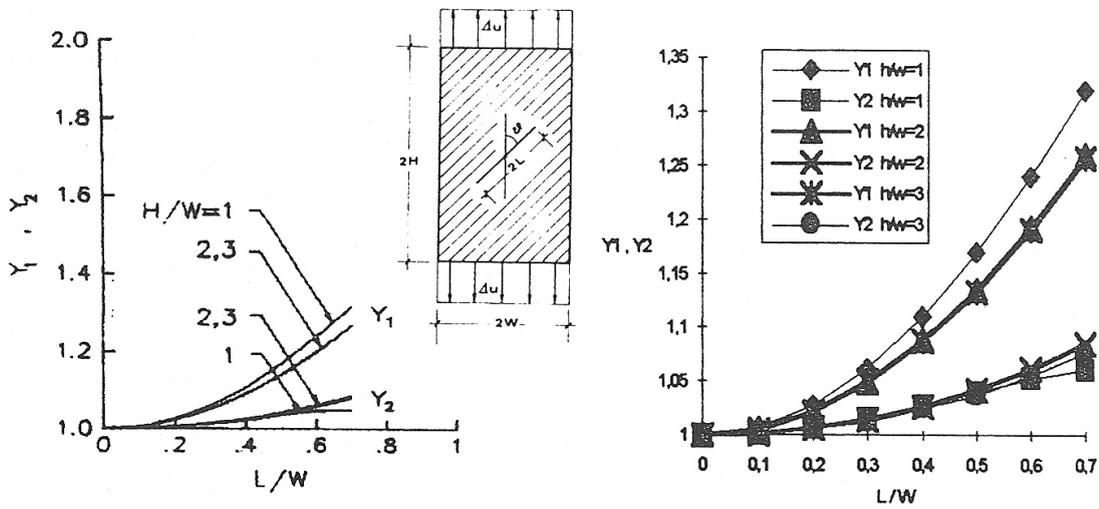


Figura 21. Laminato Grafite - Epoxy. $\theta = 30^\circ$. Spostamento uniforme.

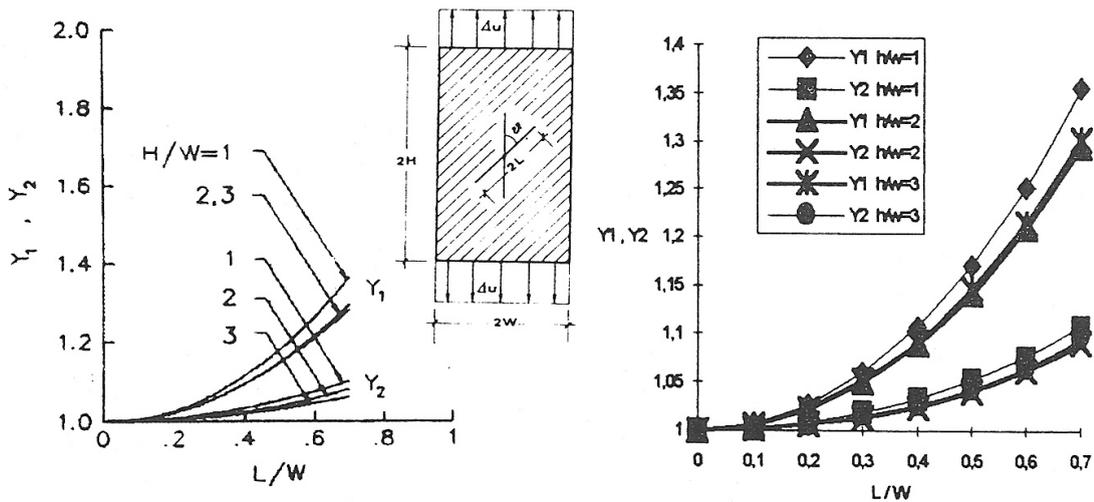


Figura 22. Laminato Grafite - Epoxy. $\theta = 45^\circ$. Spostamento uniforme.

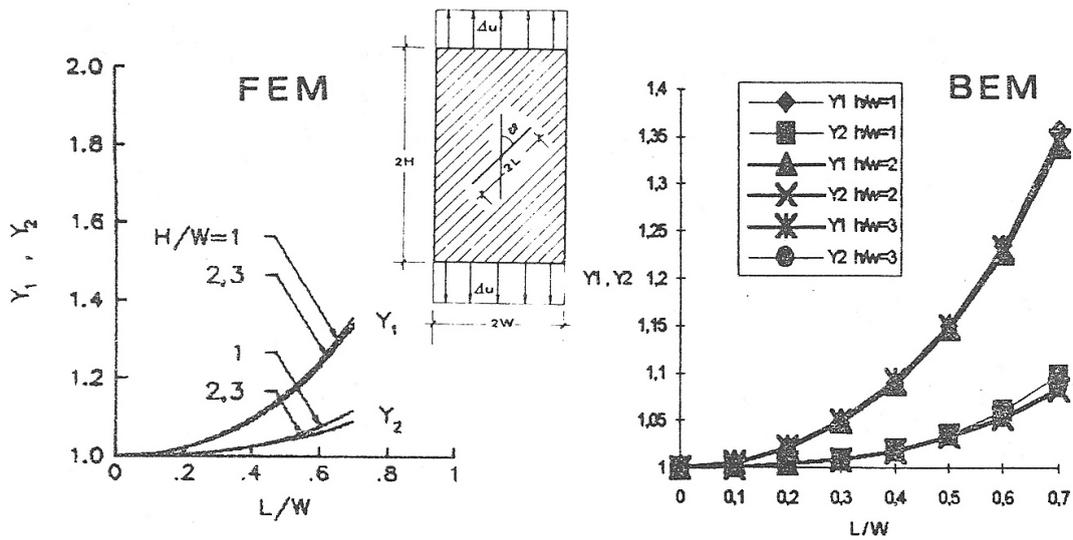


Figura 23. Laminato Grafite - Epoxy. $\theta = 60^\circ$. Spostamento uniforme.

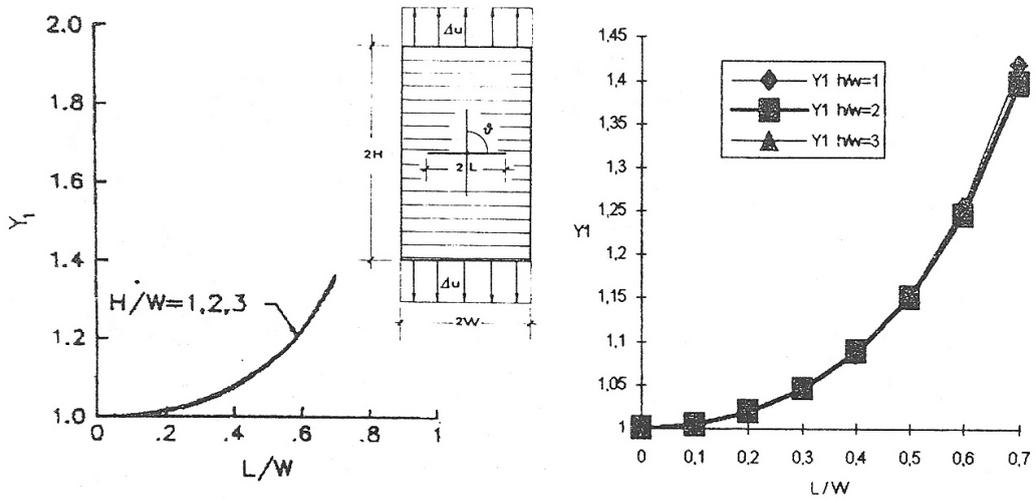


Figura 24. Laminato Grafite - Epoxy. $\theta = 90^\circ$. Spostamento uniforme.

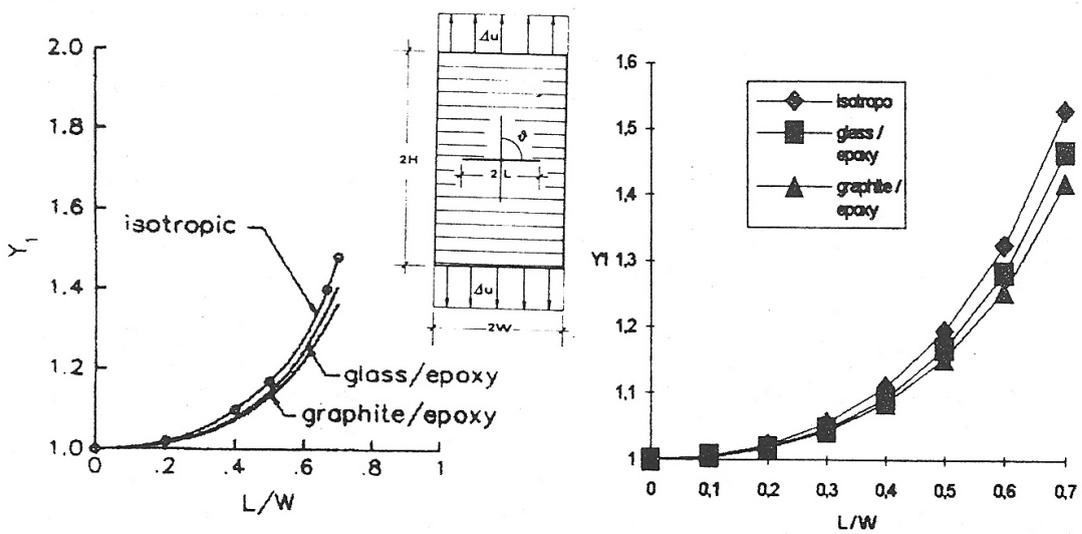


Figura 25. Confronto caso isotropo. $\theta = 90^\circ$. $H/W=1$. Spostamento uniforme.

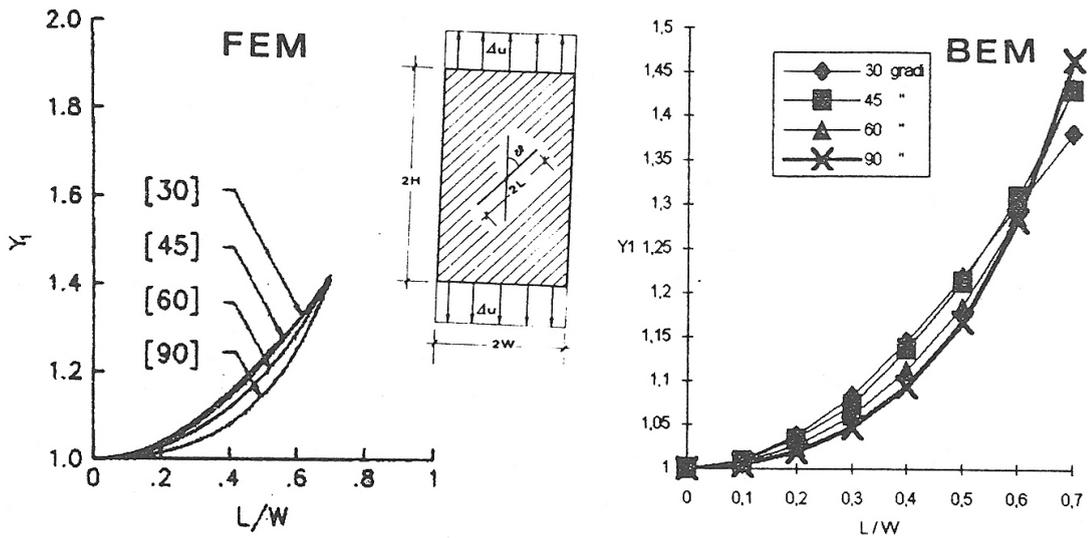


Figura 26. Laminato Vetro - Epoxy. Cricca a inclinazione variabile. $H/W=1$. Spostamento uniforme.

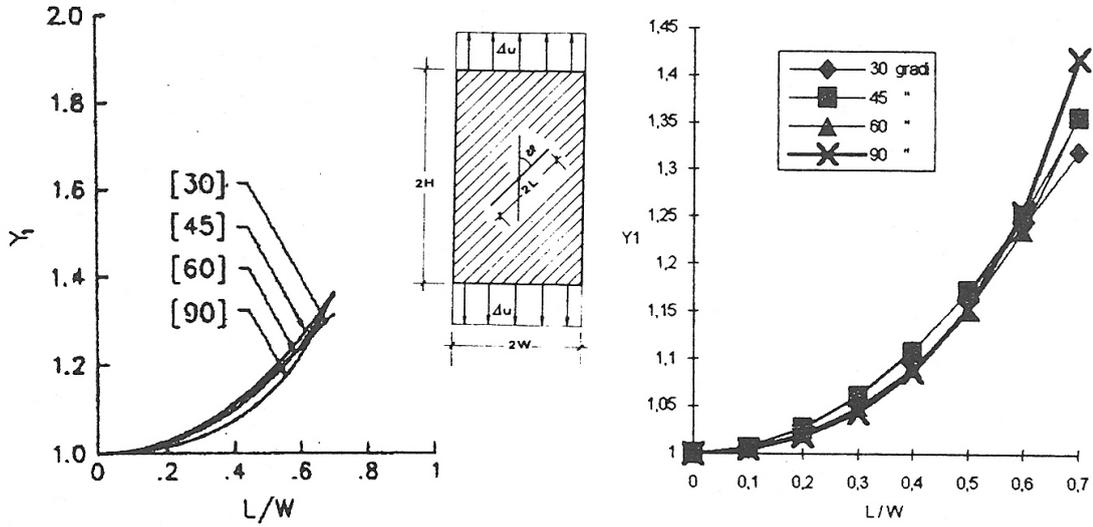


Figura 27. Laminato Grafite - Epoxy. Cricca a inclinazione variabile. $H/W=1$. Spostamento uniforme.

ANALISI DEI RISULTATI E CONCLUSIONI

I risultati sono in buon accordo con quelli di altri Autori sia nel caso in cui siano state applicate tecniche agli elementi finiti che al contorno e mostrano la notevole influenza del fattore di correzione dalle condizioni geometriche e di carico. Si possono trarre le seguenti osservazioni:

- Il fattore di correzione per una piastra di dimensioni finite aumenta all' aumentare della dimensione della cricca.

- Y_1 è sempre più grande di Y_2 e questa differenza aumenta all' aumentare della dimensione della cricca.

- Y_1 e Y_2 diminuiscono sempre all' aumentare del rapporto H/W nel caso di applicazione di una tensione uniforme. Nel caso di applicazione di uno spostamento uniforme ciò non si verifica sempre.

- Gli effetti delle condizioni al contorno sono trascurabili quando il rapporto H/W è superiore di 2.

- Il fattore di correzione diminuisce aumentando l' anisotropia del materiale sia nel caso di applicazione di tensione uniforme che nel caso di spostamento uniforme. Questi risultati coincidono con quelli trovati da Bowie-Freese come indicato da Yum - Hong [7].

- Y_1 cresce diminuendo l' inclinazione della cricca nel caso di applicazione di tensione uniforme. Nel caso di applicazione di spostamento uniforme ciò non si verifica sempre.

- Il fattore di correzione per problemi anisotropi non si discosta eccessivamente da quello isotropo solo quando le dimensioni della cricca sono piccole rispetto alle dimensioni della piastra.

BIBLIOGRAFIA

- [1]. Westergaard H. M. Journal of Applied Mechanics A, 49, 6/1939
- [2]. Irwin G.R. "Analysis of Stress and Strain near the end of Crack Traversing a Plate" Journal of Applied Mechanics 24, pp.361-364, 1957
- [3]. Hutchinson J. W. "Singular Behavior at the End of a Tensile Crack in a Hardening Material" Journal of Mechanics and Physics, Solids Vol 15, 1968
- [4]. Rice J. R. Johnson M. A. "The Role of Large Crack Tip Geometry Changes in Plane Stress Fracture" Inelastic Behavior of Solids, pp.641-672 Mc Graw-Hill, New York, 1977
- [5]. Rice J. R. Rosegren G. F. "Plain Strain Deformation near a Crack Tip in a Power Hardening Material" J. Mech. & Phys. Solids Vol 16, pp.1-12, 1968

- [6]. Westergaard H. M. "Theory of Elasticity and Plasticity" Harward Univ. Press, 1952
- [7]. Yum Y. J. Hong C. S. "Stress Intensity Factors in Finite Othotropic Plates with a Crack under Mixed Mode Deformation" International Journal of Fracture 47, pp. 53-67 1991
- [8]. Snyder M. D. Cruse T. A. "Boundary Integral Equation Analysis of Cracked Anisotropic Plates" International Journal of Fracture Vol. 11 No. 2 4/1975
- [9]. Cruse T. A. "Two Dimensional BIE Fracture Mechanics Analysis" Appl. Math. Modelling Vol. 2, pp. 287-293, 1978
- [10]. Cruse T. A. "Boundary Element Analysis in Computational Fracture Mechanics" Kluwer Academic Publihers 1988
- [11]. Betti E. "Teoria dell' Elasticità" Il nuovo Cimento T. 7-10
- [12]. Somigliana C. "Sopra l' Equilibrio di un Corpo Elastico Isotropo" Il Nuovo Cimento T. 17-19
- [13]. Chan K. S. Cruse T. A. "Stress Intensity Factors of Anisotropic Compact Tension Specimens with Inclined Cracks" Engineering Fracture Mechanics Vol.23 No. 5 pp. 863-874, 1986
- [14]. Cruse T. A. "An Improved Boundary Integral Equation Method for Three Dimensional Elastic Stress Analysis" Computers and Structures, 4. pp. 741-754, 1974