IGF9 IX Convegno Nazionale
Gruppo Italiano Frattura
Roma, 2-4 giugno 1993

COMBINAZIONE DEI CARICHI IN PROBLEMI DI FATICA

Autore:
Pierluigi Colombi

Dipartimento di Meccanica Strutturale, Universita' di Pavia, via Abbiategrasso 211,
27100 Pavia

1. SOMMARIO

In questa memoria vengono studiati due aspetti della valutazione della vita utile a fatica: la modellazione dei carichi e la loro combinazione. La modellazione dei carichi è effettuata mediante un modello discreto nel tempo ma continuo nell'intensità. La combinazione delle azioni è finalizzata alla formulazione di una regola pratica atta a garantire alla struttura un grado di sicurezza comparabile con quello relativo al caso di una singola azione. I coefficienti di combinazione, ottenuti mediante simulazione, risultano funzione della natura delle azioni e del rapporto tra le loro intensità.

2. INTRODUZIONE

Il problema dei carichi e della loro combinazione è attualmente oggetto di grande interesse da parte dei comitati internazionali preposti alla revisione della normativa vigente sulle azioni [6].
La modellazione dei carichi è uno degli aspetti centrali della valutazione della vita utile a fatica di una struttura. Diversi modelli sono stati introdotti in letteratura per la generazione delle storie di carico da utilizzare [3] [9] [10]. In questo lavoro viene proposto un modello discreto nel tempo e continuo nell'intensità.
A livello di normativa il problema della combinazione delle azioni è risolto mediante l'introduzione di regole pratiche in grado di assicurare un adeguato livello di sicurezza [4] [1]. In questa memoria viene proposta una regola valida nel caso di due azioni presenti contemporaneamente sulla struttura. I relativi coefficienti di combinazione sono funzione dalla natura dei carichi (carico di lunga o di breve durata) e del rapporto tra le loro intensità. Essi sono valutati attraverso una simulazione della crescita di cricca per fatica, nella quale le azioni sono descritte dal valor medio del numero di cicli e dalla corrispondente ampiezza del ciclo del carico equivalente. Questi parametri sono valutati, a partire da una

una storia di carico di sufficiente lunghezza, utilizzando una delle tecniche per il conteggio dei cicli disponibili in letteratura [2]. Un esempio numerico illustrata in dettaglio la calibrazione dei coefficienti di combinazione.

3. LA FATICA IN PRESENZA DI CARICHI ALEATORI

La dimensione della cricca al tempo T, a_T può essere ottenuta, nel caso di cicli di differente ampiezza, attraverso l'integrazione [8] della legge di Paris [3]:

$$\int_{a_0}^{a_T} \frac{da}{[Y(a)]^m(\pi a)^{m/2}} = C \sum_{i=1}^{N(T)} S_i{}^m \tag{1}$$

dove a_0 è la dimensione iniziale della cricca, a_T la dimensione al tempo T, C ed m parametri del materiale, S_i l'ampiezza dell'i-esimo ciclo di carico e $N(T)$ il numero di cicli nell'intervallo $[0, T]$. $Y(a)$ è una funzione dipendente dalla geometria della cricca e del componente strutturale.
Molto spesso le strutture sono soggette a carichi che variano in modo aleatorio nel tempo. In questo caso la sequenza S_i, rappresentante l'ampiezza dell' i-esimo ciclo di carico, è la rappresentazione di un processo aleatorio discreto. Posto $\Psi(a)$ l'integrale al primo membro dell' Eq. (1) si ha:

$$\sum_{i=1}^{N(T)} S_i^m = \frac{\Psi(a)}{C} \tag{2}$$

Si può mostrare come il coefficiente di variazione del numero di cicli N in un intervallo $[0, T]$ tenda a zero al crescere di T [7]. Ciò consente di riscrivere l'Eq. (1) nel seguente modo:

$$\int_{a_0}^{a_T} \frac{da}{[Y(a)]^m(\pi a)^{m/2}} = C \cdot N_0(T)(\frac{1}{N_0(T)} \sum_{i=1}^{N_0(T)} S_i{}^m) = C \cdot N_0(T) \cdot [S_{eq}(T)]^m \tag{3}$$

dove $N_0(T)$ è il valor medio del numero di cicli nell'intervallo $[0, T]$. L' Eq. (3) introduce il concetto di ampiezza del ciclo del carico equivalente:

$$S_{eq} = (\frac{1}{N_0(T)} \sum_{i=1}^{N_0(T)} S_i{}^m) \tag{4}$$

L'ampiezza del ciclo del carico equivalente è in generale rappresentata da una variabile aleatoria $\underline{S}_{eq}$. Sotto opportune ipotesi, tra cui quella di ergodicitá, riguardanti il processo stocastico rappresentante l'azione esterna, il coefficiente di variazione di $\underline{S}_{eq}{}^m = \frac{1}{N_0(T)} \sum_{i=1}^{N_0(T)} \underline{S}_i{}^m$ tende a zero al crescere di $N_0(T)$ [7]. Questo consente di assumere deterministico $S_{eq}{}^m$:

$$E[\frac{1}{N_0(T)} \sum_{i=1}^{N_0(T)} \underline{S}_i{}^m] = E[\underline{S}_i{}^m] = S_{eq}{}^m \tag{5}$$

Inserendo questo ultimo risultato nell'Eq.(3) anche a_T può essere assunta deterministica nel caso in cui si trascuri la variabilità dei parametri C, m ed a_0.
N_0(T) viene valutato attraverso il conteggio dei cicli su singole realizzazioni di sufficiente lunghezza. Questa operazione è immediata per cicli di carico sinusoidali (o più in generale per processi aventi una limitata larghezza di banda), ma ambiguità emergono immediatamente quando la larghezza di banda è significativa. In letteratura sono disponibili diverse tecniche per il conteggio dei cicli [2]. Una possibilità è quella di definire l'ampiezza del generico ciclo come la differenza tra un massimo e il successivo minimo. Questa è la tecnica che sarà adottata in questa memoria.
Lo schema di soluzione, in presenza di aleatorietá del carico, diventa perciò :

1. simulazione di storie di carico, assumendo valida l'ipotesi di ergodicità;

2. calcolo dell'ampiezza del ciclo del carico equivalente e del numero medio di cicli;

3. risoluzione dell'equazione di propagazione di cricca (Eq. (3)) con ${S_{eq}}^m = \frac{1}{N_0(T)} \sum_{i=1}^{N_0(T)} {S_i}^m$.

Appare chiaro come la definizione di ampiezza del ciclo del carico equivalente richieda un modello stocastico per la simulazione delle storie di carico da utilizzare nella propagazione di cricca per fatica.

4. MODELLAZIONE DEI CARICHI

Modelli stocastici continui e discreti sono stati proposti in letteratura da diversi ricercatori [9] [10] per la generazione delle storie di carico da utilizzare in problemi di fatica. In questa memoria viene adottato un modello discreto nel tempo e continuo nell'intensità.
Le azioni agenti sulla struttura sono classificate in azioni di lunga o di breve durata. Nel caso di azione di lunga durata, indicata con $\underline{W}_1$, il modello considera l'intensità $\underline{y}_1$ costante tra due istanti di tempo la cui distanza (tempo di interarrivo) è descritta da una variabile aleatoria $\underline{v}_1$.
Nel caso invece di azione di breve durata $\underline{W}_2$, l'intensitá $\underline{y}_2$ è assunta costante su di un intervallo di tempo $\underline{d}$ (durata del carico), di lunghezza minore del tempo di interarrivo $\underline{v}_2$.
Questo modello è ergodico e perciò la dimensione di cricca a_T é una quantità deterministica. Essa diventa aleatoria solo nel caso in cui a_0, C e m sono variabili aleatorie.
Una volta ottenuta una realizzazione di $\underline{W}_1$ o $\underline{W}_2$, si procede al conteggio dei cicli come indicato nel paragrafo precedente e alla determinazione di S_{eq} medinate l'Eq. (4). Nel caso in cui due azioni siano contemporaneamente presenti sulla struttura il problema viene affrontato simulando le rispettive storie di carico e sovrapponendone gli effetti.

5. REGOLA DI COMBINAZIONE DEI CARICHI

Nel testo dell'Eurocodice 1 [6] l'Annex 11 è dedicato al problema della combinazione dei carichi in fatica. In esso particolare attenzione è dedicata al problema della rappresentazione delle azioni, cioè della determinazione dell' ampiezza del ciclo del carico equivalente e del valor medio di cicli in un periodo di riferimento [0,T_N], $N(T_N)$. In questo modo

e del valor medio di cicli in un periodo di riferimento $[0,T_N]$, $N(T_N)$. In questo modo l'ipotesi di ergodicità è implicitamente assunta. Tuttavia una regola di combinazione dei carichi non è mai direttamente indicata.
L'Annex 3 del medesimo Eurocodice specifica che la vita utile di progetto deve essere valutata nel seguente modo:

$$T_d = \gamma_T \cdot T_r \tag{6}$$

dove T_r è la vita utile richiesta alla struttura e γ_T un fattore di sicurezza. Lo stato ultimo a fatica è dunque rappresentato, nel caso ergodico, dalla seguente relazione:

$$a(N_0(T_d), S_{eq}) \leq a_c \tag{7}$$

con

$$N_0(T_d) = \frac{T_d}{T_N} \cdot N_0(T_N) \tag{8}$$

Il caso non ergodico può essere eventualmente studiato come una successione di storie di carico ergodiche.
In questa memoria la combinazione delle azioni é studiata nel caso di due sole azioni. Nell'ambito di un codice strutturale una regola di combinazione dei carichi deve fare un uso diretto dei parametri che contribuiscono ad una definizione qualitativa dei carichi esterni e cioè $(S_{eq_1}, N_1(T_N))$ e $(S_{eq_2}, N_2(T_N))$. Una possibilitá é quella di [5] combinare linearmente le azioni [4], incrementando per entrambi i carichi S_{eq} o $N(T_N)$.
Nel seguito si assume che $N_i(T_N)$ sia incrementato di un fattore $(1 + \gamma_N)$ con $\gamma_N \geq 0$. La calibrazione, in un intervallo dei parametri del modello dei carichi opportunamente selezionato, dei valori del coefficiente γ_N è effettuata in modo tale da garantire una vita utile a fatica nel caso di una singola azione maggiore di quella fornita dall'Eq. (6), scritta nel caso di due azioni agenti. Le verifiche di sicurezza devono dunque essere effettuate per le coppie di valori $(S_{1_{eq}}, (1 + \gamma_N) \cdot N_1(T_N))$ e $(S_{2_{eq}}, (1 + \gamma_N) \cdot N_2(T_N))$. Un esempio di calibrazione di γ_N è sviluppato nell'esempio numerico dove sarà anche evidenziata l'indipendenza dei coefficienti di combinazione da a_0 e a_c.

6. ESEMPIO NUMERICO

Questo esempio considera una piastra di lunghezza e larghezza infinita sottoposta a trazione uniforme sui bordi. Nella piastra è presente una cricca passante avente semiasse maggiore di lunghezza a. Per questa semplice situazione strutturale la funzione $Y(a)$ presente nell'Eq. (1) è uguale ad uno. I coefficienti della legge di Paris sono assunti pari a $C = 5 \cdot 10^{-14}$ (la cricca è misurata in mm e la tensione agente sulla piastra in MPa) ed $m = 4$.
Si consideri il modello per i carichi descritto nel paragrafo precedente. Il tempo di interarrivo di ciascuna azione è assunto avere una distribuzione esponenziale traslata con valor medio $1/\nu_i$ e traslazione pari a ν_{0_i}. Il valore assoluto delle intensità è assunto avere distribuzione lognormale con media μ_{y_i} e coefficiente di variazione pari a 0.5. Infine la durata del carico $\underline{W}_2$ è descritta da una variabile aleatoria gaussiana avente media μ_d e coefficiente

di variazione pari a 0.4.
Assegnato un generico valore al tempo di interarrivo dell'azione di lunga durata v_1 si è valuatato il valor medio del valore assoluto dell'intensità che causa il collasso della struttura in 5 e 50 anni, rispettivamente. Tra questi valori estremi di μ_{y_1} è stata costruita la griglia indicata in Tabella III. Gli altri valori dei parametri delle azioni esterne utilizzati nelle simulazioni numeriche sono anch'essi riportati in Tabella III.
Per ciascun insieme dei parametri $\nu_1, \nu_2, \mu_{y_1}, \mu_{y_2}, v_{01}, v_{02}$ e μ_d sono state simulate storie di carico avente una prefissata lunghezza (ad esempio un anno). Questo ha consentito di valutare i valori dell'ampiezza del ciclo del carico equivalente S_{eq_i} e del numero medio di cicli $N_{0i}(T_N)$. La Tabella I riassume i risultati di alcune delle simulazioni numeriche effettute. Essa mostra come il numero di cicli equivalenti e l'ampiezza del ciclo di carico equivalente dipendono dai valori dei parametri di $\underline{W}_2$. In Tabella I è inoltre evidenziato l'effetto, in termini di S_{eq} e $N_0(T_N)$, della contemporanea presenza di due azioni in combinazione. Il numero di cicli N_c necessari per raggiungere a_T, a partire da una dimensione iniziale di cricca pari ad a_0, è ottenuto dall'Eq. (3):

$$N_c = \frac{\underline{a}_c^{(1-\frac{m}{2})} - a_0^{(1-\frac{m}{2})}}{S_{eq} \cdot (1 - \frac{m}{2}) \cdot C \cdot \pi^{m/2}} \tag{9}$$

La vita utile a fatica è dunque rappresentata dalla seguente relazione:

$$T_c = T_N \cdot \frac{N_c}{N_0(T_N)} \tag{10}$$

Questa simulazione è ripetuta considerando le azioni agenti separatamente sulla struttura. Si indichino con T_{c1}, T_{c2} e T_{c12} i risultati relativi al caso di una singola azione e di due azioni in combinazione. Ovviamente risulta $T_{c_{12}} \leq \min(T_{c_1}, T_{c_2})$. La Tabella II riporta i risultati del rapporto tra $\min(T_{c_1}, T_{c_2})$ e $T_{c_{12}}$. Questo valore, indipendente per definizione dalla dimensione di cricca iniziale e finale, rappresenta il valore per il quale moltiplicare $N_0(T_N)$ di una singola azione, cioé il valore del coefficiente $(1 + \gamma_N)$. La seguente relazione è in grado di soddisfare tutte le situazioni di interesse pratico:

$$\gamma_N = \gamma_\mu \cdot \gamma_d \tag{11}$$

Il fattore γ_d tiene conto della natura dei carichi in combinazione (carichi di breve o di lunga durata). In [5] γ_d é stato assunto uguale ad 1 per azioni di lunga durata e uguale a 0.5 quando uno dei due carichi in combinazione presenta una durata molto piccola. Il fattore γ_μ dipende dal valor minimo dei rapporti $\frac{\mu_{\underline{y}_2}}{\mu_{\underline{y}_1}}$ e $\frac{\mu_{\underline{y}_1}}{\mu_{\underline{y}_2}}$. I valori assunti per γ_μ sono riportati in Tabella IV.

7. CONCLUSIONI

Particolare attenzione è dedicata al problema della combinazione dei carichi da parte della autorità predisposte, a livello europeo, alla revisione della normativa sulle azioni. Questo lavoro affronta il problema della modellazione e della combinazione delle azioni in problemi di fatica. I risultati conseguiti sono validi nel caso di due azioni in combinazione e tengono conto della natura dei carichi agenti. Ulteriori ricerche sono in corso al fine di introdurre gli effetti del ritardo sul modello di carico e sulla regola di combinazione adottata.

RINGRAZIAMENTO

Questa ricerca è stata resa possibile grazie al contributo finanziario del Ministero dell'Università e della Ricerca Scientifica e Tecnologica (MURST) e dell'Agenzia Spaziale Italiana (ASI).

BIBLIOGRAFIA

[1] Augusti G., Baratta A. e Casciati F., Probabilistic Methods in Structural Engineering , Chapman-Hall, London, 1984.

[2] Bignonnet A. e Olagnon M., Fatigue Life Prediction for Variable Amplitude Loading, Proc. Offshore Mechnaics and Artic Engineering, Stavanger, Norway, 1991, Vol. III-B, pp. 395-401.

[3] Broek D., The Practical Use of Fracture Mechanics, Kluwer Academic Publishers, 1988.

[4] Casciati F. e Faravelli L., Fragility Analysis of Complex Structural Systems, Research Studies Press, Taunton, 1991.

[5] Casciati F. e Colombi P., Load Combination and Related Fatigue Reliability Problems, Structural Safety, 1993.

[6] CEN/TL 250 Coordination Group. Eurocode 1 - Basic of Design and Action on Structures, 1992.

[7] Jiao G. e Moan T., Probabilistic Analysis of Fatigue Due to Gaussian Load Processes, Prob. Engng. Mech., 5(2), 1990, pp. 76-83.

[8] Karamchandani A., Dalane J. I. e Bjerager P., System Reliability Approach to Fatigue Reliability of Structures, J. Struct. Engng., ASCE, 108, 1992, pp. 684-700.

[9] Sarkani S., Faesability of Auto-Regressive Simulation Model for Fatigue Studies, J. Struct. Engng., ASCE, 116, 1990, pp. 2481-2495.

[10] Wirshing P. H. e Light M. C., Fatigue Under Wide Band Random Stresses, J. Struct. Div. ASCE, 106, 1980, pp. 1593-1607.

Tabella I. Coppie di valori $(S_{eq}, N_0(T_N))$, con $T_N = 1$ anno, ottenuti per simulazione. Per ciascuna simulazione la prima linea è relativa a solo W_1, la seconda a solo W_2 e la terza a W_1 e W_2 in combinazione.

$\nu_1 = 1$ (1/ore) $\mu_{y_1} = 18$ MPa				
		μ_{y_2}/μ_{y_1}		
W_2	ν_2/ν_1	.5	.66	1.
		S_{eq} $N(T_N)$	S_{eq} $N(T_N)$	S_{eq} $N(T_N)$
Lunga Durata	1.	45.88 2910	45.88 2910	45.88 2910
		22.74 2962	30.32 2962	45.48 2962
		49.95 4468	54.59 4468	64.90 4468
$\mu_d = \nu_2/2$	1.	45.88 2910	45.88 2910	45.88 2910
		17.51 6584	23.41 6584	35.15 6584
		41.63 7743	45.35 7743	53.65 7743
$\mu_d = \nu_2/3$	1.	45.88 2910	45.88 2910	45.88 2910
		17.51 6484	23.41 6584	23.41 6584
		41.63 7743	44.18 8064	52.20 8064
$\nu_1 = 2$ (1/hour) $\mu_{y_1} = 18$ MPa				
Lunga Durata	1.	45.84 5832	45.84 5832	45.84 5832
		22.71 5986	30.28 5986	45.43 5986
		50.26 8977	54.96 8977	65.38 8977
$\mu_d = \nu_2/2$	1.	45.84 5832	45.84 5832	45.84 5832
		17.42 13203	23.22 13203	34.84 13203
		41.73 15578	45.39 15578	53.53 15578
$\mu_d = \nu_2/3$	1.	45.84 5832	45.84 5832	45.84 5832
		17.42 13203	23.22 13203	34.84 13203
		40.72 16225	44.22 16225	52.08 16225

$\nu_1 = 2$ (1/ore) $\mu_{y_1} = 12$ MPa				
		μ_{y_2}/μ_{y_1}		
W_2	ν_2/ν_1	.5	.66	1.
		S_{eq} $N(T_N)$	S_{eq} $N(T_N)$	S_{eq} $N(T_N)$
Lunga Durata	1.	30.28 5986	30.28 5986	30.28 5986
		15.14 5986	20.19 5986	30.28 5986
		33.51 8977	36.64 8977	43.58 8977
$\mu_d = 1/2\nu_2$	1.	30.28 5986	30.28 5986	30.28 5986
		11.61 13203	15.48 13203	23.22 13203
		27.82 15578	30.26 15578	35.68 15578
$\mu_d = 1/3\nu_2$	1.	30.28 5986	30.28 5986	30.28 5986
		11.61 13203	15.48 13203	23.22 13203
		27.15 16225	29.48 16225	34.72 16225
$\nu_1 = 1/2$ (1/ore) $\mu_{y_1} = 22$ MPa				
Lunga Durata	1.	55.87 1458	55.87 1458	55.87 1458
		27.68 1491	36.55 1491	55.38 1491
		61.48 2226	67.01 2226	80.02 2226
$\mu_d = 1/2\nu_2$	1.	55.87 1458	55.87 1458	55.87 1458
		21.33 3302	28.16 3302	42.66 3302
		51.42 3881	54.93 3881	65.57 3881
$\mu_d = 1/3\nu_2$	1.	55.87 1458	55.87 1458	55.87 1458
		21.33 3302	28.16 3302	42.66 3302
		50.12 4045	54.13 4045	63.77 4045

Tabella II. Valori di $(1+\gamma_N)$ ottenuti per le simulazioni riportate in Tabella I.

W_2	ν_2/ν_1	$\mu_{\underline{y}_2}/\mu_{\underline{y}_1}$ .5	.66	1.
$\nu_1 = 2$ (1/ore)		$\mu_{\underline{y}_1} = 12$ MPa		
Lunga Durata	1.	2.248	3.213	6.433
$\mu_d = \nu_2/2$	1.	1.853	2.594	5.018
$\mu_d = \nu_2/3$	1.	1.751	2.434	4.682
$\nu_1 = 1/2$ (1/ore)		$\mu_{\underline{y}_1} = 22$ MPa		
Lunga Durata	1.	2.228	3.159	6.426
$\mu_d = \nu_2/2$	1.	1.911	2.487	5.050
$\mu_d = \nu_2/3$	1.	1.797	2.445	4.652
$\nu_1 = 1$ (1/ore)		$\mu_{\underline{y}_1} = 18$ MPa		
Lunga Durata	1.	2.126	3.304	6.059
$\mu_d = \nu_2/2$	1.	1.778	2.504	4.898
$\mu_d = \nu_2/3$	1.	1.677	2.279	4.578
$\nu_1 = 2$ (1/ore)		$\mu_{\underline{y}_1} = 18$ MPa		
Lunga Durata	1.	2.328	3.158	6.232
$\mu_d = \nu_2/2$	1.	1.821	2.549	4.932
$\mu_d = \nu_2/3$	1.	1.720	2.406	4.606

Tabella III. Valori dei parametri del modello di carico utilizzati nelle simulazioni numeriche riportate in Tabella I.

Parametri dei Carichi	Dati		
$\mu_{\underline{y}_1}$ (MPa)	12 ; 15 ; 18	18	22
ν_1 (1/ore)	2.	1.	.5
ν_2/ν_1	0.5 1. 2.		
v_1 (min.)	26	52	104
v_2/v_1	0.5 1. 2.		
μ_d	$1/\nu_2$ $1/2\nu_2$ $1/3\nu_2$		
$\mu_{\underline{y}_1}/\mu_{\underline{y}_2}$	0.5 ; 0.66 ; 1. ; 1.5 ; 2.		

Tabella IV. Valori del coefficiente γ_μ presente nell'Eq. (11).

$\min(\frac{\mu_{\underline{y}_2}}{\mu_{\underline{y}_1}}, \frac{\mu_{\underline{y}_2}}{\mu_{\underline{y}_1}})$	γ_μ
0.1	0
0.5	1
0.66	3
1.0	5