

## TEORIA DELLA FATICA BASATA SUL RATEO DI RILASCIO ENERGETICO

Pietro Paolo Milella  
ENEA/DISP  
via V. Brancati, 48  
00144 Roma

### SOMMARIO

Il fenomeno della crescita per fatica di una cricca viene attribuito all'incapacità del materiale di assorbire, ad ogni ciclo di carico, energia con lo stesso rateo del ciclo precedente durante il quale si era stabilita l'eguaglianza tra  $G$  ed  $R$  attraverso la crescita sottocritica. Ciò causa una nuova crescita della cricca per riguadagnare, attraverso la creazione di nuova area plastica, il rateo perduto.

### Introduzione

La differenza sostanziale che esiste tra un materiale idealmente fragile ed uno elasto-plastico reale emerge subito dal confronto delle rispettive curve di resistenza  $R$ . Dal criterio di Griffith<sup>1</sup> valido per i materiali idealmente fragili si ricava, infatti, che  $R$  è indipendente dalla lunghezza  $2a$  della cricca mentre il rateo di rilascio energetico  $G$  varia linearmente. All'instabilità è:

$$G_c = R$$

$$\frac{\pi \sigma_c^2 a}{E} = 2 \Gamma \quad (1)$$

in cui  $\Gamma$  rappresenta l'energia di tensione superficiale. La (1) è espressa in veste grafica in figura 1. Ogni combinazione  $\sigma$ - $a$  che risulta in un valore di  $G$  inferiore a  $G_c$  non produce frattura. È una situazione *dentro-fuori* nel senso che o il materiale si frattura o non succede nulla. Nei materiali reali, invece, il contributo alla  $R$  deriva principalmente dal rateo di assorbimento di energia

plastica con il risultato che la  $R$  non è più costante, ma cresce esponenzialmente con  $a$ . La stessa cosa vale anche per  $G$  con il che il criterio di instabilità per i materiali elasto-plastici diviene:

$$\frac{\partial G}{\partial a} = \frac{\partial R}{\partial a} \quad (2)$$

Tale criterio è rappresentato in figura 2. La differenza sostanziale con il caso ideale elastico è che ora, anche se una combinazione  $\sigma$ - $a$  non produce rottura, fig. 2, c'è, tuttavia, sufficiente energia nel sistema per far propagare la cricca di una quantità  $\Delta a$  tale da far divenire  $G$  eguale ad  $R$  e la cricca si ferma. Scaricando il sistema e quindi ricaricandolo allo stesso valore di  $\sigma$  si ottiene che la cricca, che si era fermata nel primo ciclo, si propaga ancora indicando che la condizione di equilibrio raggiunta nel ciclo precedente non è più valida. Se ciò accade non v'è che una possibile spiegazione: il volume di materiale che si deforma plasticamente davanti all'apice della cricca non è più in grado nei ricarichi successivi di assorbire energia con lo stesso rateo. Ciò forza la cricca a crescere per riguadagnare, attraverso la creazione di nuova area plastica, la perdita subita e ristabilire, ad ogni ciclo, l'eguaglianza tra  $G$  ed  $R$ . Mirabili, a tal fine, sono i lavori di Hahn e Rosenfield<sup>2</sup> che, usando delle tecniche di evidenziazione mediante attacco chimico, hanno mostrato che, in effetti, la zona plastica di fondo intaglio di una cricca di fatica è più estesa di quella sotto carico singolo.

### Massima energia perduta per ciclo

L'effetto della diminuzione  $\Delta R$  del rateo di assorbimento energetico è schematizzato in figura 3. Durante il primo carico la cricca cresce di una quantità stabile  $\Delta a$ . Nel ricarico la resistenza  $R$  che corrisponde alla nuova cricca di semilunghezza  $a+\Delta a$  non vale più  $R_1$ , ma  $R_1'=R_1-\Delta R$ . Ciò fa sì che la nuova curva  $R_{rel}$  parta, al ricarico, dal punto corrispondente ad  $R_1'$ . Un nuovo equilibrio viene dunque raggiunto tra  $G$  ed  $R$  attraverso un'ulteriore crescita  $\Delta a$  della cricca. Basandosi su tali ipotesi P.P. Milella<sup>3</sup> presentò nel 1981 una teoria che attribuiva la perdita  $\Delta R$  ad un effetto di shakedown che ha luogo nella zona plastica di fondo intaglio per il quale ogni singolo elementino,  $dv$ , non è in grado di riassorbire ad ogni ciclo una quantità di energia proporzionale a quella elastica:

$$E = C \frac{1}{2} \sigma_e \varepsilon_e dv \quad (3)$$

essendo  $\varepsilon_e$  e  $\sigma_e$  la deformazione al limite elastico e la tensione di snervamento del materiale, rispettivamente e  $C$  un parametro che varia linearmente da 1, sul vertice della cricca, a zero al limite della zona plastica assunta, per semplicità, di forma circolare di raggio  $r_p$  pari a:

$$r_p = \frac{K_I^2}{\alpha \pi \sigma_s^2} \quad (4)$$

in cui  $K_I$  è il fattore intensità delle tensioni applicato al sistema ed  $\alpha$  un fattore adimensionale che dipende dalle condizioni di deformazione piana o di tensione piana in cui opera il sistema stesso. Sotto tali ipotesi la perdita  $\Delta R$  per una lastra infinita con cricca centrale di semilunghezza  $a$  risulta essere<sup>3</sup>:

$$\Delta R = 2.34 \cdot 10^{-2} \frac{\pi a \sigma^4}{\alpha E \sigma_s^2} \quad (5)$$

dove  $\sigma$  è la tensione esterna applicata ed  $E$  il modulo di Young del materiale. Perché si abbia crescita per fatica stabile è necessario che  $\Delta R$  sia sempre inferiore a  $\Delta G$ , come si può anche vedere dalla fig. 3. La massima crescita per fatica sarà proprio quella che corrisponde a:

$$\Delta G = |-\Delta R| \quad (6)$$

ovvero:

$$\Delta a = 0.745 \cdot 10^{-2} \frac{1}{\alpha^2} \left( \frac{\Delta K_I}{\sigma_s} \right)^2 \quad (7)$$

Poiché per la maggior parte dei materiali il massimo rateo di crescita per fatica  $\Delta a$  si ottiene in condizioni di tensione piana a causa degli alti valori di  $\Delta K$  applicato, ne deriva che il valore più opportuno da dare ad  $\alpha$  è 2 e la (7) diviene pari a:

$$\Delta a = 1.86 \cdot 10^{-3} \left( \frac{\Delta K_o}{\sigma_s} \right)^2 \quad (8)$$

Il simbolo  $\Delta K_o$  che compare nella (8) sta proprio ad indicare che il  $K$  applicato può non essere un  $K$  effettivo per via delle condizioni di tensione nel piano. La (8) rappresenta la massima crescita possibile di una cricca,  $\Delta a$ , sotto una tensione che sale dal valor zero a quello che produce il massimo  $\Delta K$ . Ovviamente tale crescita massima potrà essere vista nel materiale soltanto una volta. Infatti, la condizione espressa dalla (6) per il calcolo della massima crescita della cricca per fatica è anche una condizione d'instabilità del tipo espresso dalla (2). Ciò vuol dire che quando la cricca è cresciuta di un  $\Delta a$  pari alla (8) essa è sufficientemente lunga da risultare instabile e causare la rottura. È estremamente interessante confrontare la (8) con la relazione di natura sperimentale ottenuta da Bates e Clark<sup>4</sup> tra le dimensioni della "stretched zone" precedente la propagazione instabile e la tenacità relativa  $\Delta K_o/\sigma_s$ :

$$\text{Stretched Zone Size} = 1 \cdot 10^{-3} \left( \frac{\Delta K_o}{\sigma_s} \right)^{1.6} \quad (9)$$

Come si può vedere la vicinanza tra la (8) e la (9) è troppo spinta per essere soltanto casuale soprattutto considerando che Bates e Clark<sup>5</sup> sottolinearono l'incertezza, anche del 50%, nella determinazione della SZS. Ciò fornisce un significato fisico a quella zona, cosiddetta "featureless", che viene proprio a rappresentare la massima crescita per fatica prima della rottura per sovraccarico. Se ciò è vero allora la *Stretched Zone* non dovrà apparire tutte le volte che viene rotto un provino CT senza precricca di fatica. Ciò è stato, infatti, osservato da Firrao<sup>6</sup> su provini CT senza precricca di fatica. La figura 4 mostra un esempio di *Stretched Zone* in un provino di alluminio.

### Velocità di crescita sottocritica per fatica

La condizione di crescita per fatica sottocritica si ottiene modificando la (6) in modo da imporre che al ricarico l'aumento  $\Delta G$  al quale si raggiunge il nuovo equilibrio sia inferiore alla diminuzione  $-\Delta R$  del rateo di assorbimento energetico:

$$\Delta G = \frac{1}{\beta} |-\Delta R| \quad (10)$$

in cui  $\beta$  è un parametro adimensionale maggiore di 1 da determinare. Se la curva  $R$  fosse una retta il rapporto:

$$\frac{\Delta G}{\Delta R} = \frac{1}{\beta} \quad (11)$$

sarebbe funzione lineare di  $\sigma^2$ . Quanto più la curva  $R$  si allontana dalla condizione di linearità tanto più  $\Delta G$  aumenta rispetto a  $\Delta R$  ed il rapporto (11) cresce mentre  $\beta$  non è più funzione lineare di  $\sigma^2$ , ma diventa una funzione del tipo:

$$\beta = \frac{\lambda}{(a \sigma^2)^n} \quad (12)$$

in cui  $n$  è un parametro che dipende dalla forma della curva  $R$ , quindi dal materiale, e  $\lambda$  è un parametro che può essere determinato con le considerazioni seguenti. All'instabilità  $\beta$  deve essere pari ad 1, quindi dalla (12) si ricava:

$$\lambda = (\sigma_{\max}^2 a)^n \quad (13)$$

in cui  $\sigma_{\max}$  è la tensione massima cui può essere sottoposta la lastra contenente la cricca di lunghezza  $2a$ . Sostituendo la (13) nella (12), la (11) si riscrive:

$$\Delta a = 2.34 \cdot 10^{-2} \frac{1}{\pi \alpha^2 \sigma_s^2} \frac{\Delta K^{2(1+n)}}{K_{Ic}^{2n}} \left( \frac{\alpha \sigma_s^2 - \sigma^2}{\alpha \sigma_s^2 - \sigma_{\max}^2} \right)^n \quad (14)$$

Nella (14) si è anche tenuto conto della correzione della dimensione della cricca la cui semilunghezza effettiva passa da  $a$  ad  $a + \Delta a$  (rif. 3).

### Fattore di costrizione plastica

L'equazione (14) è stata derivata riducendo del fattore  $\beta$  la massima crescita per fatica che il materiale può sostenere. Anche se è verosimile che tale massimo rateo di crescita debba avvenire in condizioni di tensione nel piano piuttosto che di deformazione piana, è chiaro che la crescita sottocritica per fatica si verificherà sotto una condizione effettiva che dipenderà dall'ampiezza del carico ciclico, dalla temperatura e dallo spessore del materiale. Di conseguenza attraverso l'applicazione della (14) alle curve sperimentali di crescita per fatica sarà possibile derivare il valore di  $\alpha$  e quindi quello della effettiva zona plastica. Ciò permetterà anche di fare meglio luce sulle condizioni di triassialità sotto cui si sviluppa il fenomeno della fatica. Consideriamo, allora, il rapporto:

$$fcp = \frac{\sigma_{eff}}{\sigma_s} \quad (15)$$

solitamente indicato come *fattore di costrizione plastica*, tra la tensione effettiva di snervamento  $\sigma_{eff}$  e quella monoassiale di snervamento  $\sigma_s$  che definisce il grado di costrizione esercitato dal materiale elastico sulla piccola zona plastica di fondo cricca. Il  $fcp$  è strettamente legato al fattore  $\alpha$  che compare nella (4) dalla relazione:

$$\alpha = 2 (fcp)^2 \quad (16)$$

In condizioni di tensione piana in cui  $fcp=1$ ,  $\alpha$  vale 2, come già detto. Di contro, in condizioni di deformazione piana in cui  $\sigma_{eff}$  vale, secondo Von Mises,  $2.8 \sigma_s$ , esso sale a circa 16. In realtà condizioni ideali di triassialità attraverso tutto lo spessore non sono mai raggiungibili ed  $fcp$  ed  $\alpha$  rimangono abbastanza lontani dai valori limite di ~3 e 16, rispettivamente. L'equazione (14) ci fornisce un ottimo elemento di valutazione. In essa, infatti,  $n$  è una costante del materiale che definisce in una scala bilogarithmica la pendenza della curva  $da/dN$  in funzione di  $\Delta K$  ed è indipendente da  $\alpha$ . Una volta individuato  $n$  dalla pendenza delle curve sperimentali si deriva automaticamente  $\alpha$  che costituisce, ora, l'unica variabile nella (14) che può essere dedotta utilizzando l'equazione stessa per approssimare i risultati sperimentali. Ciò è stato fatto per 11 leghe differenti. Le figure 5, 6 e 7 mostrano tre esempi di curve di fatica utilizzate mentre i risultati per tutte le 11 leghe sono elencati in tabella 1 assieme alla tenacità relativa, la tensione di snervamento, il fattore  $n$  citato ed il coefficiente d'in-

crudimento del materiale. In figura 8 sono diagrammati, in funzione della tenacità relativa  $K_{Ic}/\sigma_s$ , i valori di  $\alpha$  di tabella 1 assieme a quelli teorici previsti da Hendickson, Wood e Clark<sup>7</sup> per una cricca acuta. L'accordo è particolarmente significativo.

## Discussione e conclusioni

L'equazione (14) fornisce il valore dell'avanzamento di una cricca per ciclo in una lastra sottoposta ad una escursione  $\Delta K$ . Come si può vedere esso dipende dalla tenacità del materiale  $K_{Ic}$  e dalla tensione di snervamento  $\sigma_s$ . Poichè, normalmente, quanto più è tenace un materiale tanto più basso è il suo snervamento, questi due parametri tendono a bilanciarsi. Ad esempio, passando da una lega ad altissima resistenza e bassa tenacità ( $\sigma_s = 2.000$ , MPa,  $K_{Ic} = 50$  MPa $\sqrt{m}$ ,  $n = 0.15$ ) ad una molto tenace ( $\sigma_s = 400$  MPa,  $K_{Ic} = 160$  MPa $\sqrt{m}$ ,  $n = 0.4$ ) si ha un aumento di 25 volte del fattore  $1/\sigma_s^2$  ed una diminuzione di 27 volte del termine  $1/K_{Ic}^2$ . L'effetto combinato è praticamente trascurabile. In generale ogni aumento della tensione di snervamento è bilanciato dalla contemporanea riduzione della tenacità. Al contrario, ogni azione che produce una modifica ad uno solo dei due parametri cambierà necessariamente il rateo di crescita. Ciò accade ad alle temperature in cui la tenacità ha raggiunto il suo valore massimo. Ogni ulteriore aumento della temperatura causerà una riduzione della tensione di snervamento mentre la tenacità non crescerà più o, addirittura, diminuirà essa stessa. Il risultato sarà un significativo aumento nel rateo di crescita per fatica. L'effetto è stato effettivamente notato sull' A 533 B in cui in *upper shelf* esiste una relazione inversa tra la temperatura ed il numero di cicli necessari a far avanzare una cricca di una data quantità<sup>8</sup>. Per di più ed ancor più interessante è il fatto che, considerando tutti i parametri che entrano nell'equ. (14), indipendentemente dal tipo di lega, struttura metallurgica etc., la velocità di crescita per fatica è praticamente la stessa, in particolare ai valori più elevati di  $\Delta K$ . Questa mancanza di ogni apprezzabile differenza nel rateo di crescita per fatica era risaputa da sempre, ma mai completamente spiegata. La figura 9 presenta [rif. 9,10,11,12] le velocità di crescita di varie leghe confrontate tra loro da cui risulta quanto detto.

## References

- [1] Griffith, A.A., " The Phenomena of Rupture and Flaw in Solids ", Ro. Soc. Phil. Trans., London, Series A, Vol. 221, PP. 163-198, 1920.
- [2] Hahn, G., Hoagland, R.G., Rosenfield, A.R., " Local Yielding Attending Fatigue Crack Growth, Metal Trans., Vol. 3, pp. 1189-1202, 1973.
- [3] Milella, P.P., " Fatigue Crack Growth Theory Based upon Energy Considerations ", IAEA Specialists' Meeting on Subcritical Crack Growth, Freiburg, Germany, May 13-15, pp. 484-408, 1981.

- [4] Bates,R., Clark,W., " Fractography and Fracture Mechanics ", ASM trans., June, 1969.
- [5] Clark,W.G., Bates,R., " Microscopic Aspects of Fracture Toughness", Sc. Paper 69-1E7-RDAFC-P1, Westinghouse, December 1969.
- [6] Firrao,D.,
- [7] Hendrickson,J.A., Wood,D.S., Clark,D.S., " The Initiation of Brittle Fracture in Mild Steel ", Trans. ASM, 50, p. 656, 1958.
- [8] Clark,W.G., " Effect of Temperature and Section Size on Fatigue Crack Groth in A 533 B 1 Pressure Vessel Steel ", Jour. Mat., No 1, 6, March 1971.
- [9] Barsom,J.M., " Fatigue Crack Propagation in Steels of Various Yield Strengths ", Trans. ASME, Jour. Eng. Ind., Series B, No 4, 93, November 1971.
- [10] Barsom,J.M., Imhof,E.J., Rolfe,S.T., " Fatigue Crack Propagation in High-Yield Strength Steels ", Eng. Fract. Mech., No 4, 2, June 1971.
- [11] Barsom,J.M., " Fatigue Behavior of Pressure Vessel Steels ", WRC Bulletin 194, March 1974.
- [12] Shainian,P., Watson,H.E., Smith,H.H., " Fatigue Crack Groth in Selected Alloys for Reactor Applications ", Jour. Mat., No 4, 7, 1972.

TABELLA 1

Lega	$\alpha$	$K_{\sigma}/\sigma_s$ $\sqrt{mm}$	$\sigma_s$ MPa	$n$	coefficiente di incrudimento
4340	3.38	1.26	1517	0.17	0.17
12Ni5Cr3Mo	3.92	2.52	1320	0.14	0.14
7079-T6	4	2.67	448	0.3	0.2
4340	4	2.77	1241	0.14	0.14
Hy 130	5.4	4.69	965	0.067	0.067
NiMoV	7	5.64	586	0.5	0.24
A 469	7	6.8	660	0.35	0.32
A 217	10.25	9.6	420	0.5	0.3
A 533 B 1	9.3	9.77	480	0.25	0.24
A 302 B	12	11.7	386	0.4	0.36
A 216 WCC	14	14.6	330	0.4	0.38



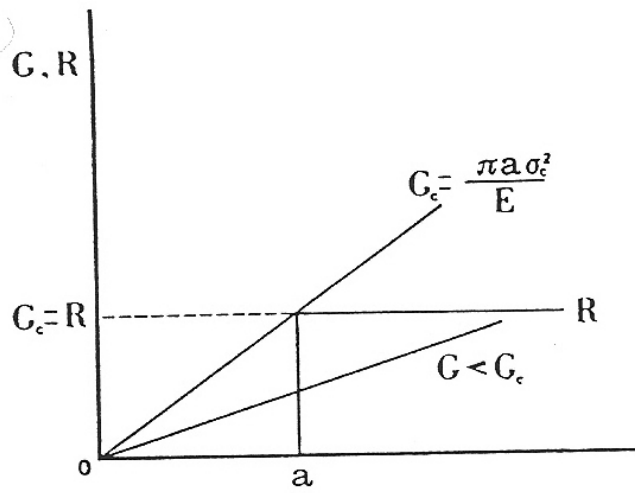


Figure 1. Fracture resistance diagram for an ideally brittle material

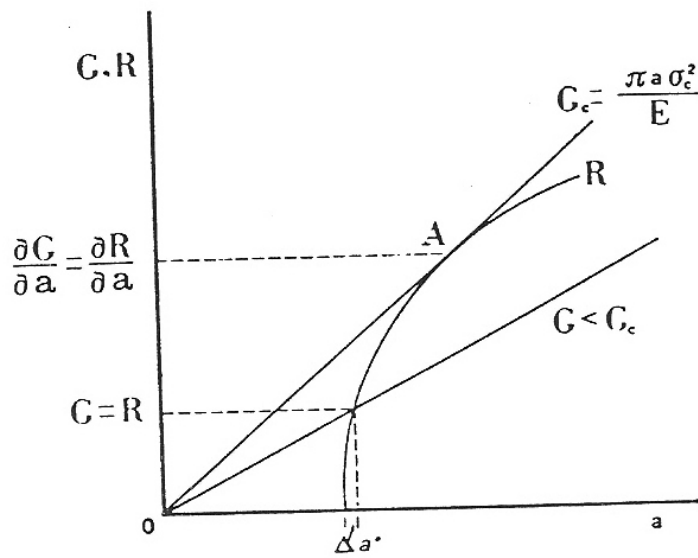


Figure 2. Fracture resistance diagram for a material which exhibits ductility.

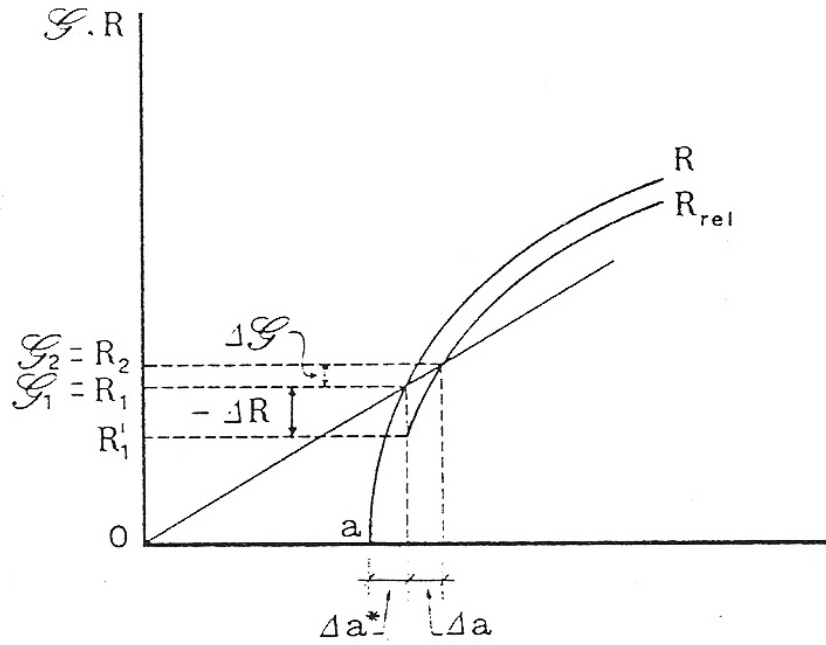


Figure 3. During the first loading the crack size a increases of a quantity  $\Delta a^*$ . At reloading the R value which corresponds to the new crack  $a + \Delta a^*$  is no longer  $R_1$  but  $R_1'$ . This makes the R curve shift starting from the new point  $R_1'$ . A new equilibrium is reached between G and R upon a further growth  $\Delta a$  of the crack.

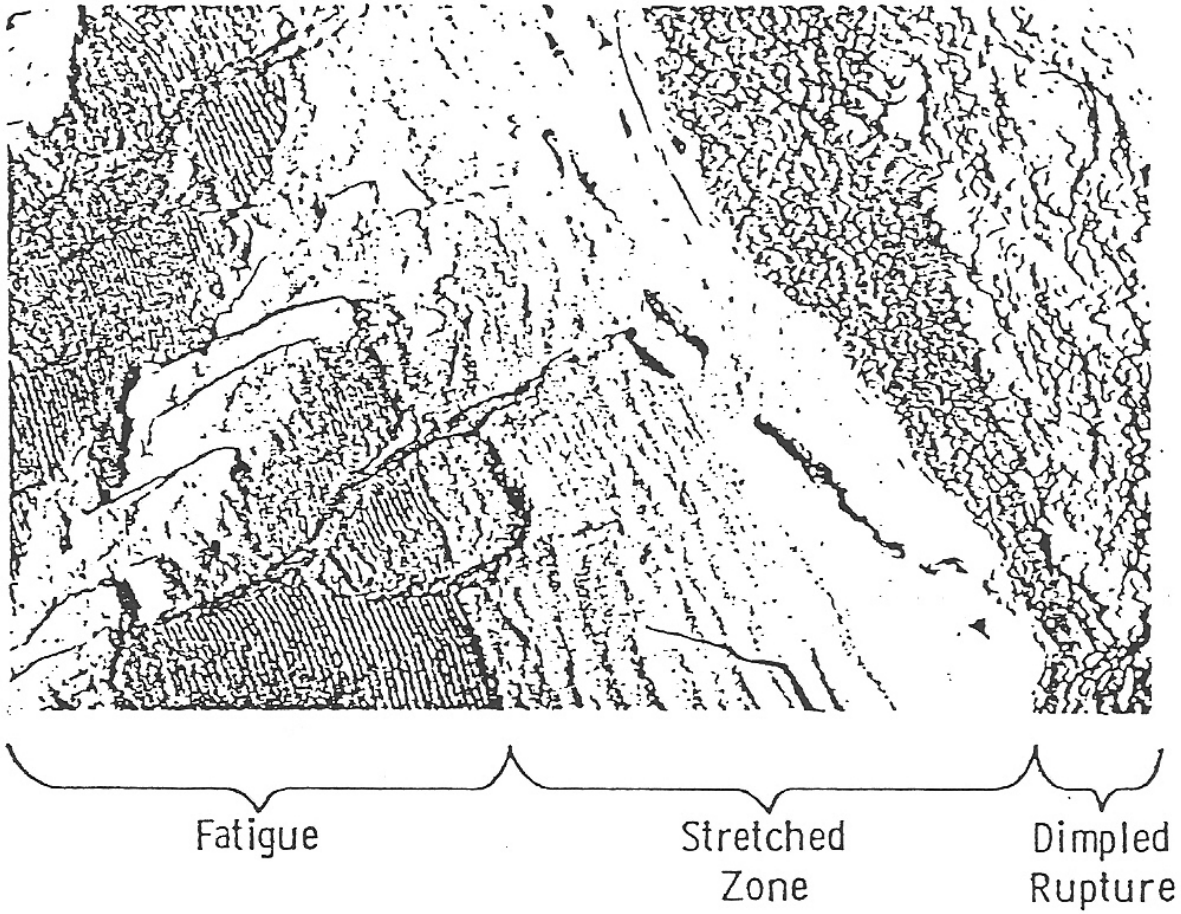


Fig. 4 —Fractograph of stretched zone observed in 7178-T651 aluminum

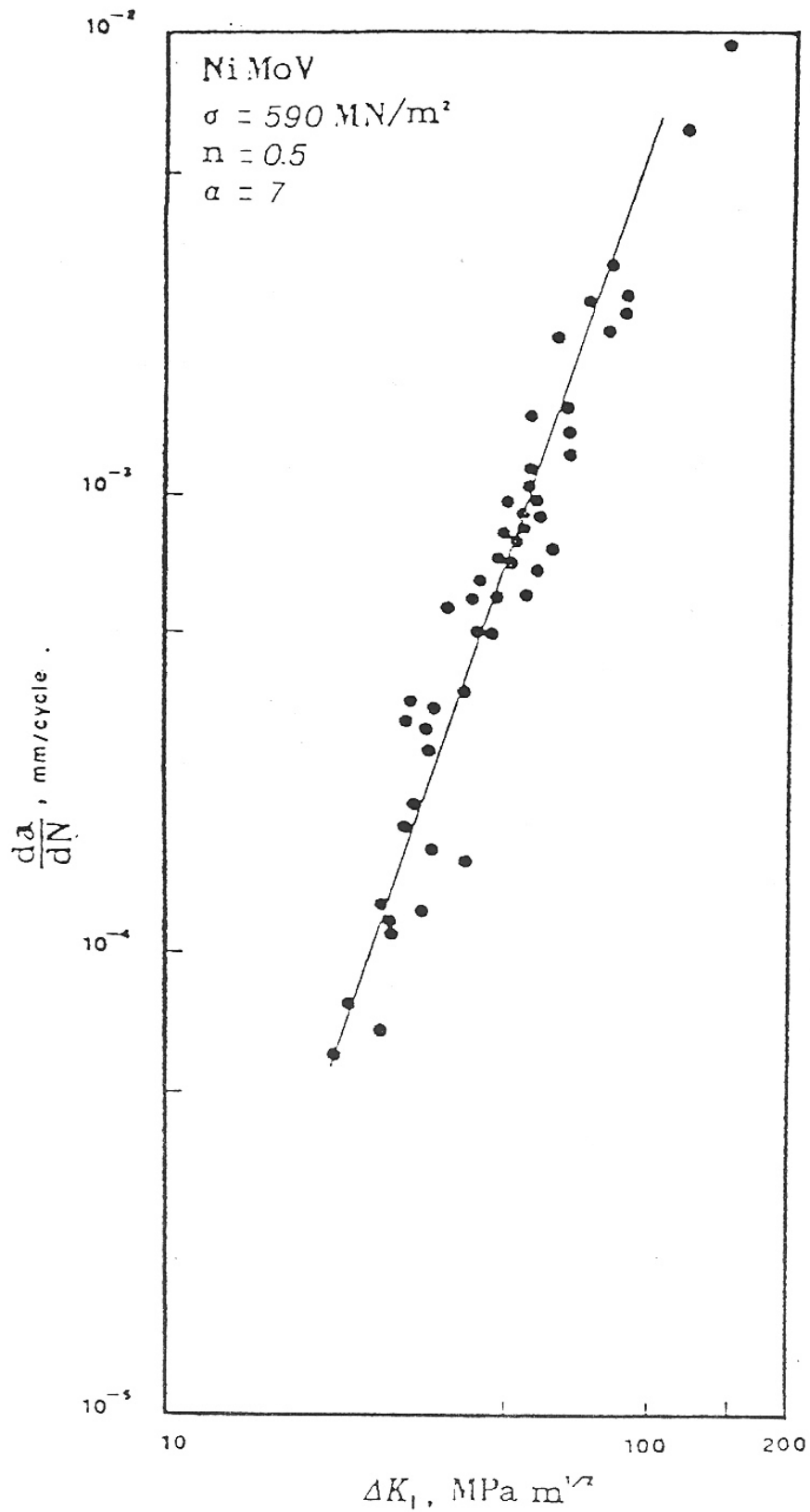


Figure 5 . Comparison of fatigue crack growth rate given by eq.(14) and experimental results for NiMoV steel.

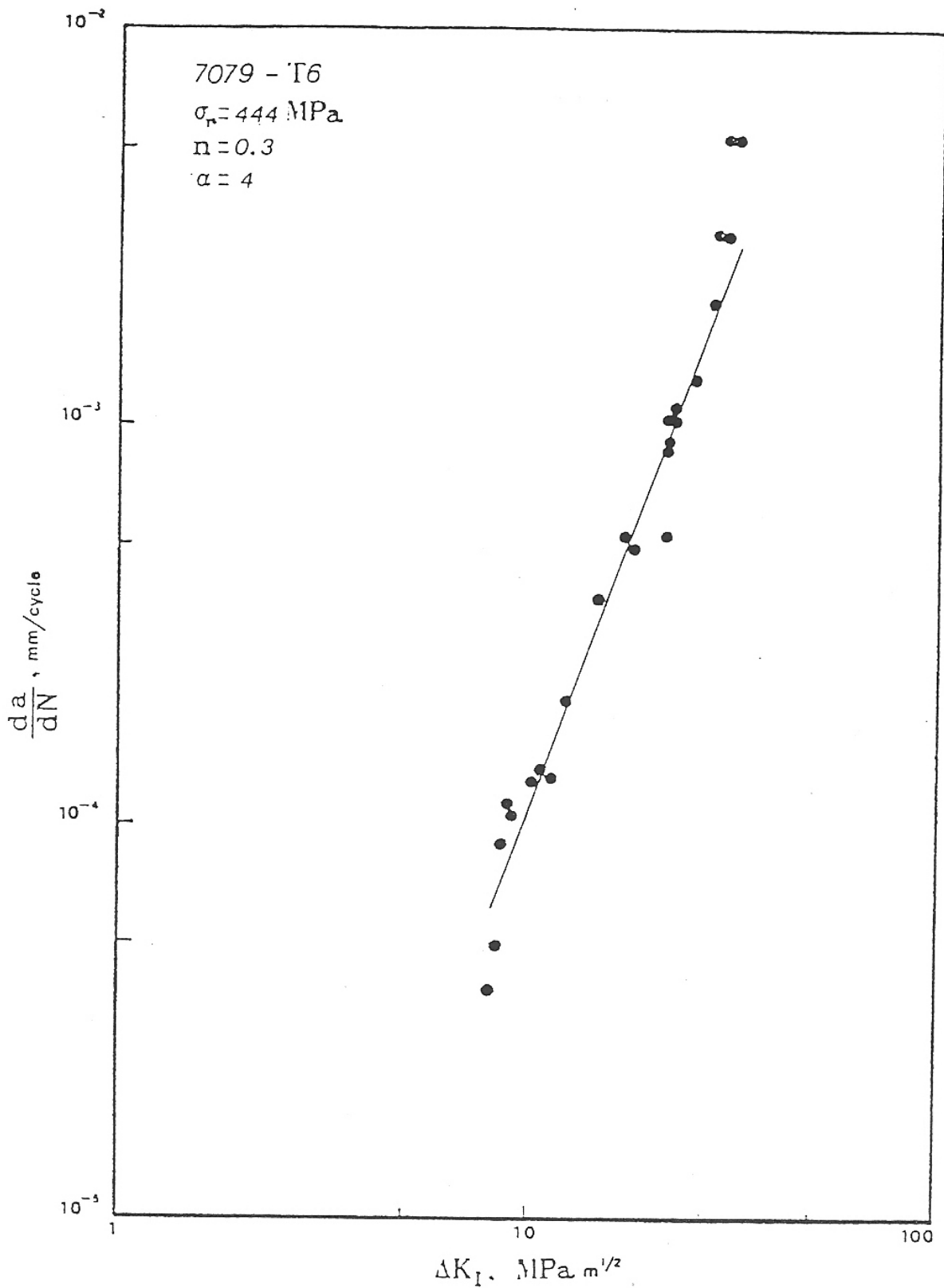


Figure 6 . Comparison of fatigue crack growth rate given by eq.(14) and experimental results for 7079-T6 Aluminum alloy.

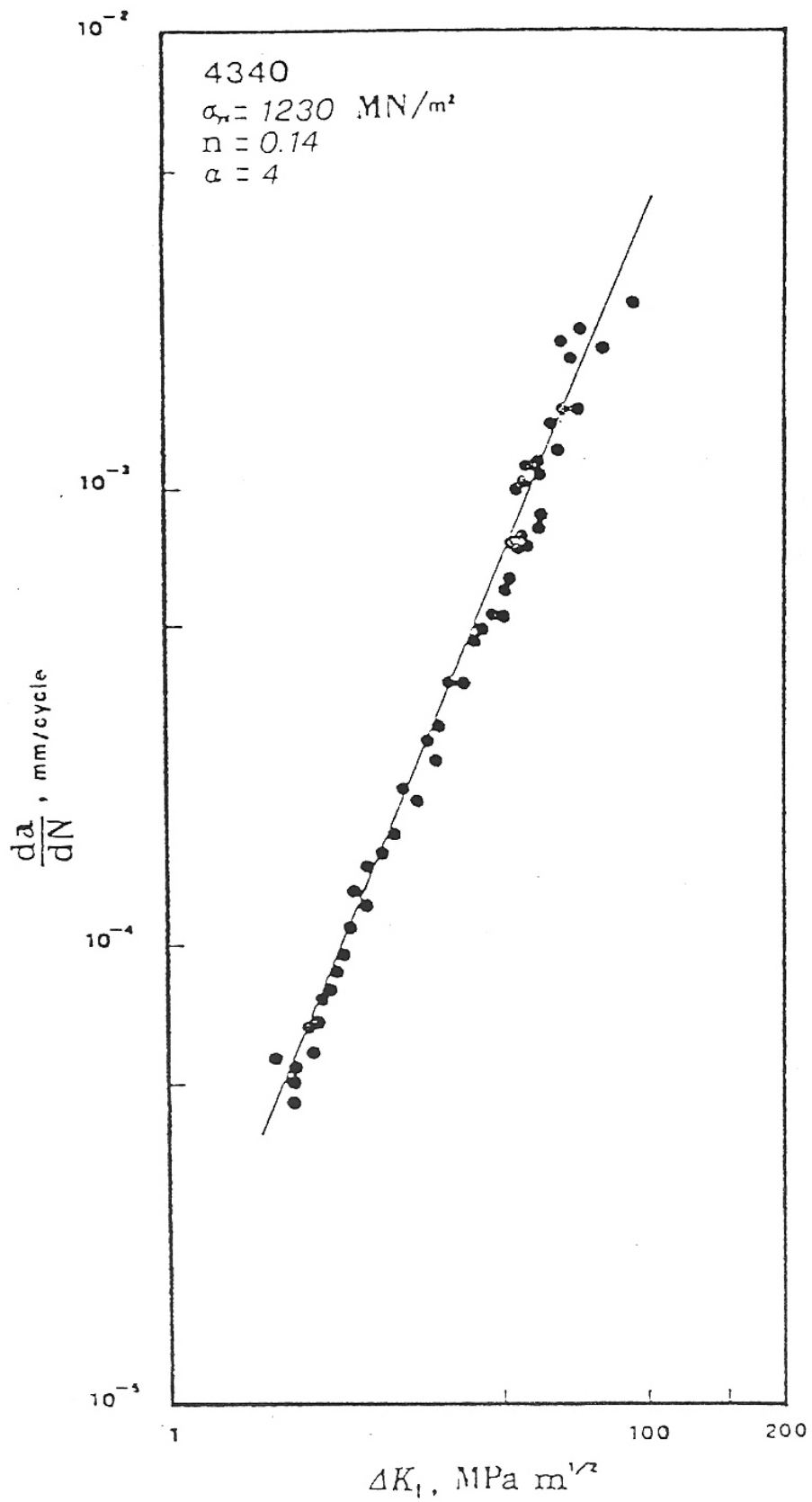


Figure 7. Comparison of fatigue crack growth rate given by eq.(14) and experimental results for 4340 steel.

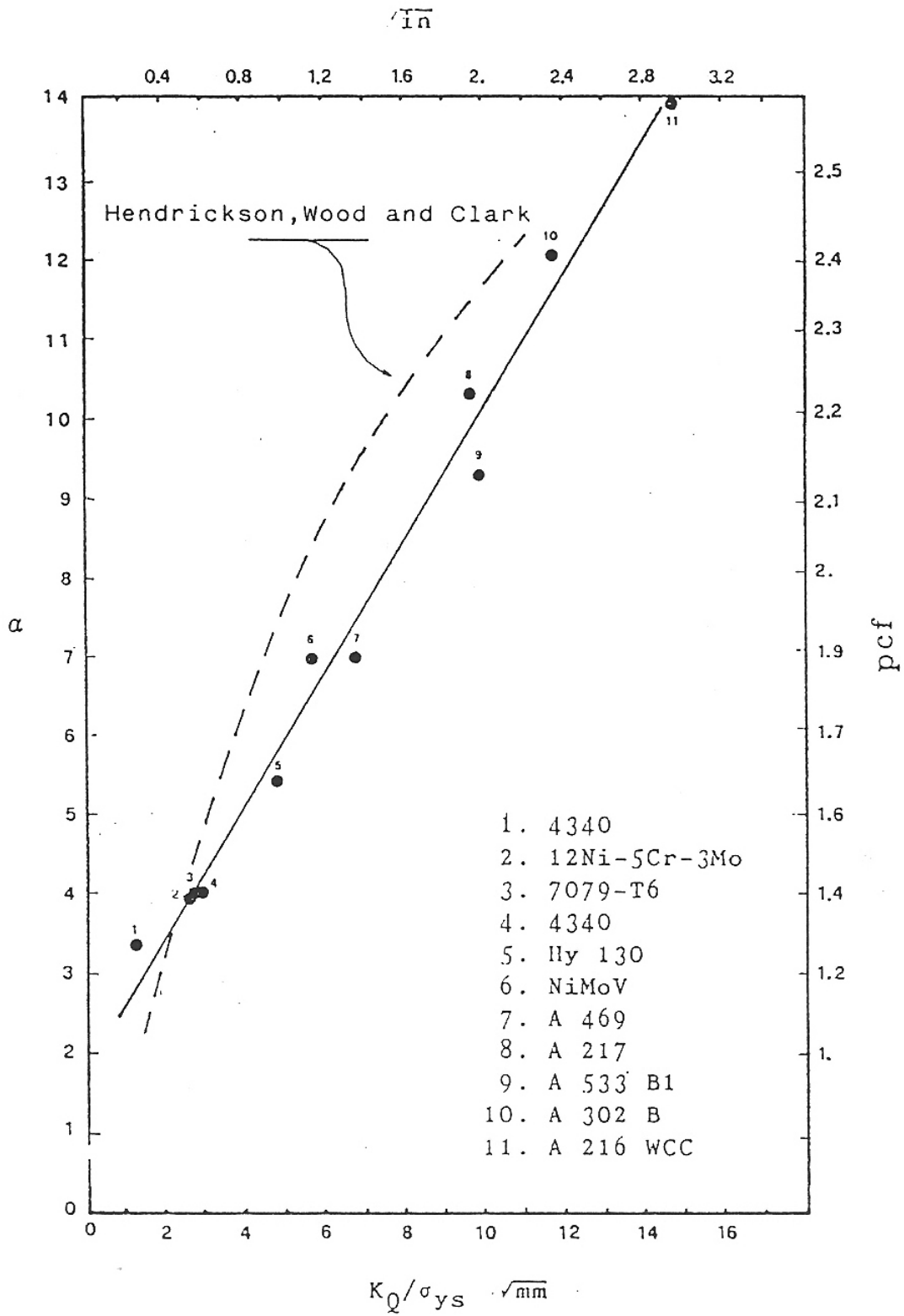


Figure 8. Influence of relative toughness on  $\alpha$  and plastic constraint factor (pcf).

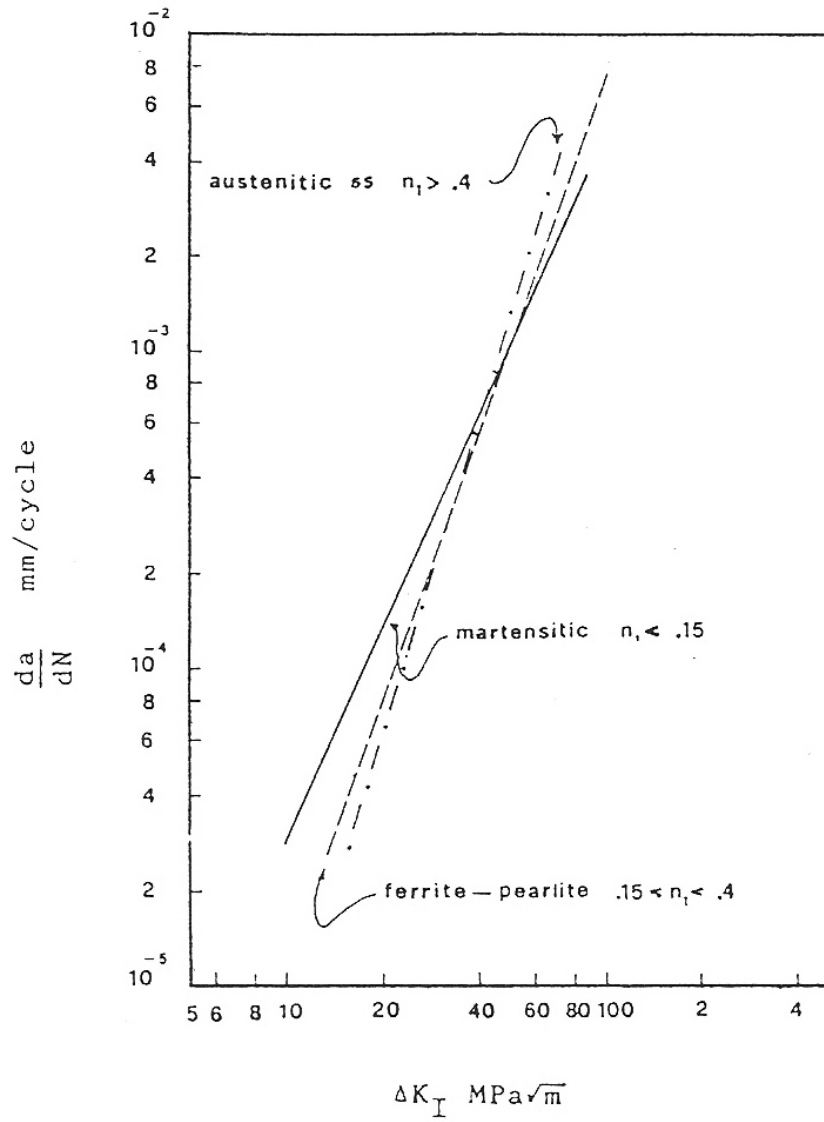


Figure 9 . Fatigue crack propagation behavior of various steels.