

PROPAGAZIONE DELLE INCERTEZZE SUI PARAMETRI DELLA MECCANICA DELLA FRATTURA

Pierluigi Colombi

Dipartimento di Meccanica Strutturale, Università di Pavia, via Abbiategrasso 211,
27100 Pavia

SOMMARIO

In questa memoria viene studiato il problema della propagazione delle incertezze sulle variabili di progetto, meccaniche e geometriche, nel calcolo dei parametri della meccanica della frattura (fattore di intensificazione delle tensioni o integrale J). L'approccio seguito è quello degli elementi finiti stocastici (tecnica della superficie di risposta). Il codice di calcolo adottato per i parametri della meccanica della frattura è utilizzato come una "black box" nell'approccio proposto, nel senso che nessuna modifica è richiesta all'interno dell'algoritmo che risolve il problema strutturale. La distribuzione di probabilità dei parametri della meccanica della frattura è calcolata, a partire dalla definizione della dipendenza analitica tra tali parametri e le variabili aleatorie di progetto (superficie di risposta), mediante un metodo di affidabilità di livello 2. Nell'esempio numerico viene calcolata la distribuzione di probabilità cumulata dell'integrale J per una condotta in pressione, assunta di lunghezza infinita, con una cricca superficiale, in direzione assiale, di forma semiellittica.

INTRODUZIONE

La propagazione di un difetto per fatica è un problema strutturale molto complesso a causa della sensibilità della risposta dalle proprietà del materiale, dalla geometria del componente in esame, dalla sequenza dei carichi esterni e dall'ambiente in cui la struttura si trova ad operare. Attraverso un approccio deterministico non è possibile valutare l'influenza di tutti questi parametri sulla propagazione per fatica. L'utilizzo delle leggi della meccanica della frattura probabilistica risulta perciò necessario nello studio di questa classe di problemi.

Parte centrale di ogni studio della propagazione di una cricca per fatica é la valutazione dei parametri della meccanica della frattura, quali l'integrale J o il fattore di intensificazione delle tensioni [2]. Scopo di questa ricerca é dunque quello di illustrare le potenzialità del metodo degli elementi finiti stocastici nella propagazione delle incertezze nel calcolo di tali parametri. L'approccio ad elementi finiti stocastici utilizzato é di tipo statistico (metodo della superficie di risposta) [5] [7] [8]. Tale tecnica é già stata utilizzata nelle memorie [3] [4] per lo studio della propagazione di una cricca per fatica in un bocchello di un reattore nucleare in pressione.

Il metodo é costituito da un "preprocessor" e da un "postprocessor" da applicare al codice di calcolo dei parametri della meccanica della frattura. Nella fase di "preprocessor" vengono pianificati gli esperimenti numerici da eseguire [5]. Questo significa che per ogni test pianificato i parametri della meccanica della frattura vengono valutati per mezzo del codice di calcolo prescelto. Infine mediante il "postprocessor" viene dapprima definita la superficie di risposta, cioè una relazione analitica tra i parametri della meccanica della frattura e le variabili aleatorie di progetto. Tale relazione viene infine utilizzata per il calcolo, mediante una tecnica di affidabilità di livello 2 [1] [6] della distribuzione di probabilità cumulata del fattore di intensificazione delle tensioni o dell'integrale J .

Nel seguito, dopo la descrizione dei modelli meccanico (calcolo dei parametri della meccanica della frattura) e stocastico (propagazione dell'incertezza) adottati, viene svolto un esempio numerico allo scopo di illustrare nei dettagli la metodologia proposta. Tale esempio considera un tratto di una condotta in pressione in cui é presente una cricca superficiale di forma semiellittica in direzione assiale. Oggetto dell'esempio é quello di valutare la distribuzione di probabilità dell'integrale J . Le variabili di progetto considerate aleatorie sono rappresentate dal raggio e dallo spessore della condotta, dal semiasse maggiore della cricca, dal modulo di Young e dalla tensione di snervamento del materiale. Il calcolo dell'integrale J viene effettuato attraverso il codice ABAQUS [10] utilizzando gli elementi line spring. La valutazione della distribuzione di probabilità cumulata per l'integrale J é effettuata per 3 differenti profondità di cricca allo scopo di valutare l'effetto di diversi livelli di plasticizzazione degli elementi line spring sulla dispersione dei valori dell'integrale J .

MODELLO MECCANICO

L'approccio ad elementi finiti stocastici che verrà utilizzato in questa memoria richiede la costruzione di una superficie di risposta. Tale superficie descrive la risposta del sistema meccanico in funzione delle variabili di progetto. Questa operazione viene effettuata attraverso una regressione sui risultati di esperimenti numerici, opportunamente pianificati attraverso la tecnica della pianificazione degli esperimenti [5]. Il numero degli esperimenti da effettuare può risultare elevato nel caso in cui si voglia considerare diverse variabili aleatorie, campi o processi stocastici di progetto. Risulta dunque evidente come sia necessario utilizzare tecniche di calcolo dei parametri della meccanica della frattura che consentano da un lato un risparmio del tempo macchina e dall'altro una buona accuratezza dei risultati.

Diverse tecniche sono disponibili per il calcolo dell'integrale J o del fattore di intensificazione delle tensioni. Nel caso generale in cui sia necessaria una discretizzazione mediante elementi 3D del continuo fratturato si può utilizzare il metodo dell'estensione virtuale della cricca introdotto da Parks [11]. Nel caso di continui discretizzabili con elementi 2D ed in presenza di difetti superficiali è possibile un trattamento semplificato basato sulla tecnica degli elementi "line-spring". Tale metodo consente di valutare i parametri della meccanica della frattura con buona accuratezza e con tempi di calcolo ridotti.

Il metodo sostituisce la cricca superficiale con una cricca passante. Il fronte della cricca è discretizzato attraverso coppie di nodi: i nodi di ciascuna coppia hanno le stesse coordinate ma corrispondono a differenti gradi di libertà. La cricca è "chiusa" da bielle la cui matrice di rigidezza $[S]$ dipende dalla profondità locale della cricca [15]. Tale matrice può essere calcolata per il modo I, il modo II e il modo III di apertura seguendo la tecnica descritta in [15]. L'analisi agli elementi finiti del componente in esame fornisce gli spostamenti relativi dei bordi della cricca e quindi, attraverso la matrice $[S]$, le forze presenti nelle bielle. La conoscenza di queste forze consente di valutare i fattori di intensificazione delle tensioni K_I , K_{II} e K_{III} [16]. La parte elastica dell'integrale J , J_{el} , è infine calcolata attraverso le classiche relazioni della meccanica della frattura lineare elastica:

$$J_{el} = \frac{1 - \nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1 + \nu}{E} K_{III}^2 \quad (1)$$

dove ν è il coefficiente di Poisson ed E il modulo elastico. Il contributo, J_{pl} , all'integrale J dovuto alla deformazione plastica, tale che $J = J_{el} + J_{pl}$, viene calcolato attraverso la procedura suggerita in [12]. Brevemente, la matrice di rigidezza elasto-plastica $[S^{ep}]$ per gli elementi line spring è ottenuta attraverso l'introduzione di una opportuna superficie di snervamento [10] [12].

Viene inizialmente calcolato il valore della parte plastica del "crack tip opening displacement", δ_t^{pl} , attraverso l'integrazione lungo il percorso di carico della seguente relazione [13]:

$$\dot{\delta}_t^{pl} = \dot{\delta}^{pl} + (t/2 - a)\dot{\theta}^{pl} \quad (2)$$

dove δ e θ rappresentano lo spostamento e la rotazione relativa delle facce della cricca, t è lo spessore dell'elemento ed a la profondità della cricca. Il valore di J^{pl} è infine ottenuto attraverso la seguente relazione:

$$J^{pl} = m\sigma_y\delta_t^{pl} \quad (3)$$

dove σ_y rappresenta il valore della tensione di snervamento mentre m è un coefficiente dipendente dal campo di deformazione all'apice della cricca [12].

MODELLO STOCASTICO

Il termine "elementi finiti stocastici" è usato per indicare quella tecnica di soluzione di problemi strutturali nei quali la geometria, le proprietà meccaniche dell'elemento in esame o le azioni esterne sono aleatorie. L'approccio utilizzato in questa memoria è quello

della superficie di risposta ed é di natura statistica [5] [8] [6].

Questa tecnica é in grado di modellare le variabili di progetto aleatorie sia come campi o processi stocastici che come variabili aleatorie. Nel seguito si descrive brevemente il metodo nel caso di sole variabili aleatorie. Per quanto riguarda il caso di campi stocastici o processi stocastici si rimanda alla memorie [5] [8] [6].

Parte centrale del metodo é la costruzione di una relazione analitica (superficie di risposta) tra le variabili aleatorie di progetto \vec{x}_j e la risposta strutturale di interesse y .

Le variabili aleatorie di progetto vengono suddivise in due classi: variabili primarie e variabili secondarie. Le variabili primarie sono quelle la cui aleatorietà influenza in modo sensibile la risposta strutturale. Le variabili secondarie invece sono quelle la cui aleatorietà incide solo marginalmente sulla risposta. Sia \vec{x} il vettore dove vengono raggruppate le variabili principali di progetto. Viene inizialmente introdotta una opportuna trasformazione Y e \vec{X}_j delle variabili y e \vec{x}_j , rispettivamente, allo scopo di agevolare la pianificazione degli esperimenti e ottenere il miglior modello possibile per la variabile y . La relazione tra Y e \vec{X}_j é descritta attraverso un polinomio del secondo ordine [5]. In forma matriciale si ottiene:

$$Y = \bar{\alpha}_0 + \vec{X}^T \bar{\alpha}_1 + \vec{X}^T \bar{\alpha}_2 \vec{X} + \epsilon \quad (4)$$

I coefficienti $\bar{\alpha}_0$, $\bar{\alpha}_1$ e $\bar{\alpha}_2$ sono calcolati attraverso una analisi di regressione sui risultati ottenuti da esperimenti numerici opportunamente pianificati [5]. Il termine ϵ a secondo membro rappresenta l'errore compiuto nella regressione. Le variabili secondarie non intervengono direttamente nella definizione della superficie di risposta: il loro effetto é inglobato nel termine di errore ϵ presente nell'Eq. 4 [5]. Attraverso una analisi di varianza (ANOVA) viene studiato l'errore ϵ [8] [6]. L'analisi di varianza permette inoltre di valutare il contributo nel termine ϵ delle sole variabili secondarie [8] [6].

La distribuzione di probabilità cumulata [6] [1] di ogni variabile risposta viene valutata attraverso un metodo di affidabilità di livello 2 [5].

La tecnica della superficie di risposta é eventualmente anche in grado di valutare la correlazione tra le risposte di interesse della struttura [5] [7].

ESEMPIO NUMERICO

L'esempio numerico proposto considera un tratto di una condotta in pressione, assunta di lunghezza infinita, nella quale é presente una cricca superficiale in direzione assiale [13].

I valori nominali del raggio R e dello spessore t sono rispettivamente di 268 mm e 10 mm. La cricca é stata assunta di forma semiellittica: il valore nominale del semiasse maggiore b é di 28.93 mm. Per quanto riguarda le dimensioni del semiasse minore a , sono stati presi in considerazione tre valori del rapporto a/t : 0.2, 0.46 e 0.7. Essi corrispondono

ai casi di difetto poco profondo ($a/t = 0.2$), difetto di media profondità ($a/t = 0.46$) e difetto profondo ($a/t = 0.7$).

Per ragioni di simmetria solo metà della condotta è stata discretizzata in elementi finiti mediante il codice ABAQUS [10]. La discretizzazione, riportata in Fig. 1, è stata realizzata per un tratto pari a 15 volte il semiasse maggiore della cricca. Si è assunto infatti che questo valore sia sufficiente a rappresentare le condizioni di lunghezza infinita. Il rapporto raggio/spessore consente una discretizzazione con elementi shell del tipo S8R ad 8 nodi (elementi ad integrazione ridotta). L'adozione degli elementi shell permette l'utilizzo degli elementi line spring del tipo LS6 per il calcolo dell'integrale J . Nella discretizzazione della cricca sono stati dunque utilizzati 12 elementi line spring di differente lunghezza come rappresentato in Fig. 2. Il comportamento del materiale è stato assunto di tipo elasto-plastico con incrudimento isotropo. Le caratteristiche del materiale sono le seguenti:

- modulo di Young: $E=206.8$ GPa;
- tensione di snervamento : $\sigma_y=482.5$ MPa;
- coefficiente di Poisson : $\nu=0.3$.

La mesh è stata infittita nella zona della cricca mediante l'opzione MPC presente nel codice ABAQUS. L'opzione MPC consente inoltre di "cucire" la cricca, di modificare cioè il semiasse maggiore della cricca. È infatti possibile imporre a due nodi aventi le stesse coordinate di possedere anche gli stessi gradi di libertà.

I carichi esterni sono rappresentati da una pressione interna pari a 12 MPa. Sono inoltre presenti dei carichi concentrati al termine del tratto di condotta analizzato allo scopo di riprodurre le condizioni di continuità.

Per la condotta rappresentata in Fig. 1 le variabili aleatorie di progetto sono: il modulo elastico E , la tensione di snervamento σ_y , il raggio R , lo spessore t e il semiasse maggiore della cricca b . La loro definizione probabilistica [1] [6] è riassunta in Tabella 1.

Solo il semiasse maggiore della cricca b , lo spessore t e il raggio R della condotta sono considerate come variabili aleatorie principali. Le proprietà meccaniche del materiale e precisamente il modulo di Young e la tensione di snervamento sono considerate come variabili secondarie. Per quanto riguarda il semiasse maggiore occorre precisare che avendo discretizzato la cricca con elementi line spring, solo valori discreti di b possono essere presi in considerazione. Il campo di variabilità è stato perciò suddiviso in 8 classi, ciascuna con una dimensione corrispondente ad un singolo elemento line spring (1.5875 mm).

In accordo con quanto descritto nella sezione precedente, sia J' una opportuna trasformazione dell'integrale J . La superficie di risposta per J' , in termini delle variabili principali b , R e t è fornita in forma esplicita dalla seguente relazione:

$$J' = \theta_0 + \theta_1 t^* + \theta_2 b^* + \theta_3 R^* + \theta_4 t^{*2} + \theta_5 b^{*2} + \theta_6 R^{*2} + \theta_7 t^* b^* + \theta_8 b^* R^* + \theta_9 R^* t^* + \epsilon \quad (5)$$

Quantità fisica	Distribuzione	Valor medio	Deviazione Standard
Spessore t della condotta	Gaussiana	10 mm	0.67 mm
Raggio R della condotta	Lognormale	268 mm	2.68 mm
Semiassse maggiore b della cricca	Lognormale	28.93 mm	2.97 mm
Modulo di Young	Gaussiana	206.8 GPa	6.67 GPa
Tensione di snervamento	Gaussiana	482.5 MPa	14.2 MPa

Tabella 1: Definizione probabilistica dei parametri assunti aleatori nell'analisi della condotta in pressione rappresentata in Fig. 1.

dove l'asterisco indica la corrispondente variabile standardizzata. I coefficienti del modello $\theta_0 \dots \theta_1$ sono valutati per le 3 configurazioni di cricca esaminate mediante una regressione sui risultati degli esperimenti numerici condotti modificando i dati di ingresso del codice ABAQUS. Tali modifiche sono introdotte in accordo con la pianificazione degli esperimenti [5]. Per le diverse profondità di cricca sono state prese in esame diverse trasformazioni J' dell'integrale J allo scopo di individuare quella che realizza la migliore accuratezza del modello. In Fig. 3 è rappresentata la superficie di risposta relativamente ad $a/t=0.46$. In tale figura il valore del semiassse b è stato mantenuto pari al valore nominale. Il ruolo dominante dello spessore t sul raggio R della cricca, evidenziato in Fig. 3, è stato riscontrato anche per gli altri due valori del rapporto a/t considerati. Per tutti i tre casi analizzati lo spessore t esercita la stessa influenza dominante, a raggio R costante, sul semiassse b . A spessore costante invece, per $a/t=0.2$ e 0.46 , l'effetto del semiassse b e del raggio R è di pari entità mentre per a/t uguale a 0.7 (caso di cricca di profonda) si è notato una maggiore influenza sull'integrale J del semiassse b rispetto al raggio R .

La distribuzione di probabilità cumulata dell'integrale J per i valori di a/t considerati è infine calcolata come descritto nella sezione precedente. Il risultato è riportato in forma grafica in Fig. 4. Come si può osservare al crescere del rapporto a/t la dispersione dei valori dell'integrale J diventa più marcata. Ciò è dovuto alla maggiore deformazione plastica che si ottiene per profondità di cricca maggiori.

CONCLUSIONI

Il lavoro illustra una tecnica di propagazione, su base statistica, delle incertezze che intervengono nel calcolo dei parametri della meccanica della frattura. Il metodo può essere accoppiato con un qualsiasi codice, sia esso un codice agli elementi finiti o agli elementi di contorno, che consenta di valutare i parametri della meccanica della frattura. Nessuna modifica è infatti richiesta all'interno dell'algoritmo di calcolo utilizzato. Nel caso dell'esempio numerico riportato, si è mostrato come la distribuzione di probabilità dell'integrale J è ottenuta a partire dalla descrizione probabilistica delle variabili di progetto. Ulteriori ricerche sono in corso allo scopo di valutare la correlazione esistente tra i valori dell'integrale J calcolati per differenti valori del rapporto a/t .

RINGRAZIAMENTO

Questa ricerca è stata effettuata grazie al supporto finanziario del Ministero della Ricerca Scientifica e Tecnologica.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Augusti G., Baratta A., Casciati F. , Probabilistic Methods in Structural Engineering. Chapman & Hall, London, 1984.
- [2] Broek D., Elementary Engineering Fracture Mechanics. Martinus Nijhoff Publishers, 1982.
- [3] F. Casciati, P. Colombi and L. Faravelli, Filter technique for stochastic crack growth. In Computational Stochastic Mechanics, eds. P.D. Spanos and C.A. Brebbia, Elsevier Applied Science Publication, 1991, pp. 485-496.
- [4] F. Casciati, P. Colombi and L. Faravelli, Fatigue Lifetime Evaluation via Response Surface Methodology. In Proceedings of the European Safety and Reliability Conference 92, Elsevier Applied Science Publication, in corso di pubblicazione.
- [5] Casciati F., Faravelli L. , Fragility Analysis of Complex Structural System. Research Studies Press Ltd., Taunton, 1991.
- [6] Faravelli L. , Sicurezza Strutturale (in Italian). Pitagora Editrice, Bologna, 1988.
- [7] Faravelli L. , Response Surface Approach for Reliability Analysis. J. of Eng. Mech., Vol. 115 (12), 1989, pp. 2763-2780.
- [8] Faravelli L., Finite Element Analysis of Stochastic Nonlinear Continua. In Computational Mech. of Probability and Reliab. Analysis, eds. Liu W. K. and Belytschko T., Elmepress, Lausanne, 1989, pp. 263-280.

- [9] Faravelli L., Response Variable Correlation in Stochastic Finite Elements Analysis. Meccanica, Vol. 22 (2), 1988, pp.102-106.
- [10] Hibbit, Karlsson & Sorensen Inc., ABAQUS Manual: Vol.1, User's Manual; Vol. 2, Theory Manual; Vol 3., Example Problems Manual. Providence, RI, Usa, 1982.
- [11] Parks D.M., The Virtual Crack Extension Method for Nonlinear Material Behaviour. Comp. Meth. in Appl. Mech. Eng., Vol. 2, 1977, pp. 353-364.
- [12] Parks D.M. , The Inelastic Line Spring: Estimates of Elastic-Plastic Fracture Mechanics Parameters for Surface-cracked Plates and Shells. Jour. Pressure Vessel Tech., Vol.103, 1981, pp. 246-254.
- [13] Parks D.M. and White C.S., Elastic-Plastic Line Spring Finite Elements Surface Cracked Plates and Shell. Jour. Pressure Vessel Tech., Vol. 104, 1982, pp.287-292.
- [14] Rice J.R., Mathematical Analysis in the Mechanics of Fracture. In Fracture, Vol. 3, ed. H. Liebowitz, Academy Press, New York, 1968, pp. 191-311.
- [15] Rice J.R. and Levy N., The Part-through Surface Crack in an Elastic Plate. Journal of Applied Mechanics, 1981, pp. 185-194.
- [16] Tada H., Paris P. and Irwing G. R., The Stress Analysis of Crack Handbook. DEL Research Corporation, Hellertown, Pennsylvania, 1973.

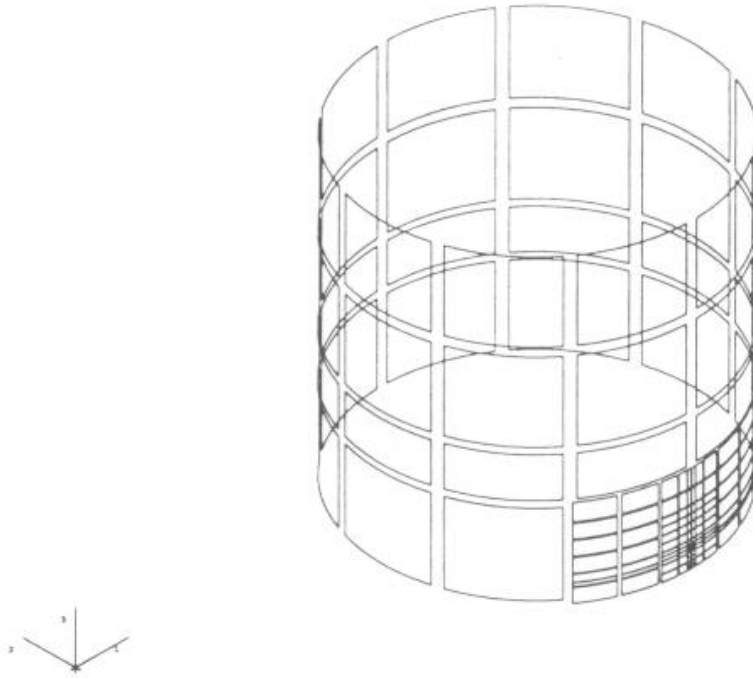


Fig. 1. Mesh ad elementi finiti usata per l'analisi strutturale.

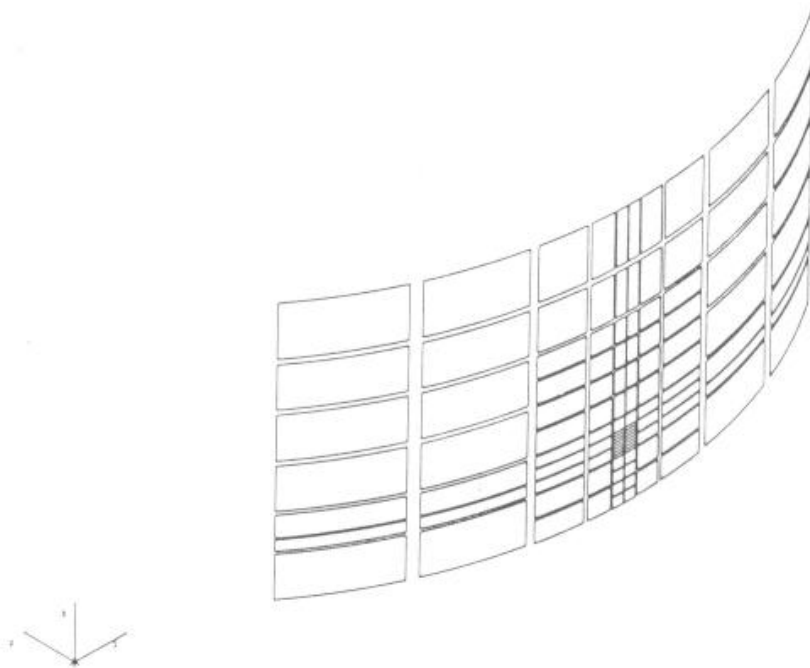


Fig. 2. Dettaglio della mesh utilizzata nella zona della cricca.

Integrale J (N/mm)

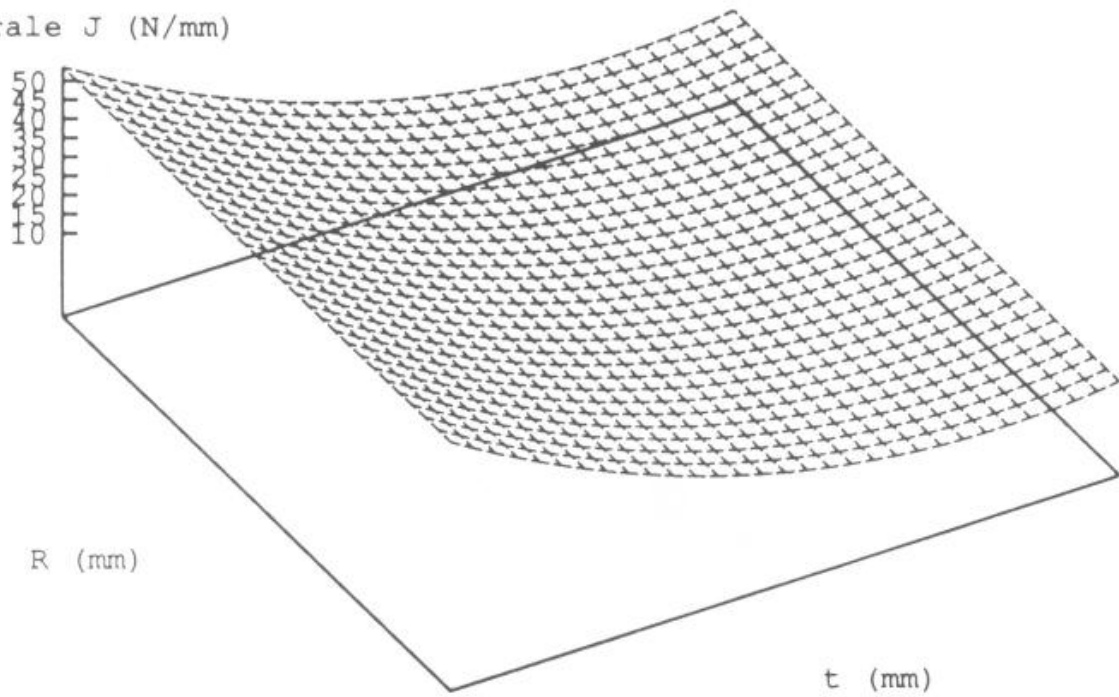


Fig. 3. Superficie di risposta ottenuta per l'integrale J per $a/t=0.46$ (il semiasse maggiore b della cricca é mantenuto pari al valore nominale).

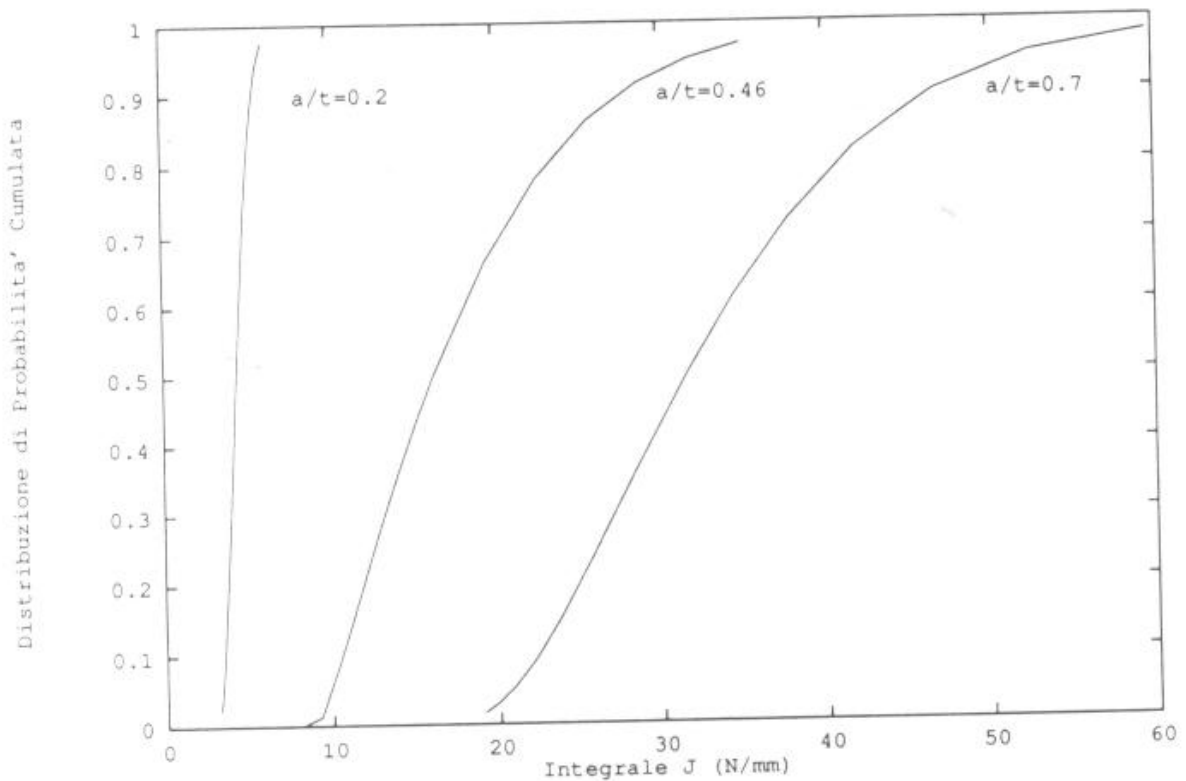


Fig. 2. Distribuzione di probabailtà cumulata dell'integrale J relativamente alle tre profondità di cricca analizzate.