

**EFFETTI DELLA DISPERSIONE DI DATI SPERIMENTALI
DI FATICA OLIGOCICLICA SUI CALCOLI DI VITA
DI COMPONENTI STRUTTURALI INTAGLIATI**

A. Garzillo

ENEL/CRTN via Monfalcone, 15 Milano

SOMMARIO: La rilevante dispersione dei dati di incrudimento e fatica oligociclica tende a inficiare le previsioni teoriche di vita di un componente strutturale. In contrasto con argomentazioni intuitive, recentemente pubblicate, ottimisticamente favorevoli alla presenza di una compensazione degli effetti della variabilità dei dati di laboratorio sul risultato teorico finale di vita del componente, vengono formulate condizioni di indipendenza rigorose ma di irrealistica attuazione. Per una loro attuazione approssimata l'attenzione è stata focalizzata sui piani sperimentali per la stima dei parametri della curva sforzo-deformazione del materiale.

Premessa

Lo studio del comportamento a fatica oligociclica dei materiali strutturali degli impianti di potenza ha occupato notevolmente i programmi di ricerca svolti presso vari laboratori in tutto il mondo. Le attività vengono attualmente finalizzate a stabilire anche la trasferibilità dei dati di laboratorio alle più realistiche condizioni del materiale in impianto.

Tali sforzi rischiano di essere vanificati dalla variabilità delle curve sforzo-deformazione e deformazione-vita desunte da prove su campioni (del materiale) nei vari laboratori.

La variabilità dei dati, oltre i limiti dipendenti dalla campionatura del materiale, viene unanimemente attribuita alla complessa misura della deformazione attuata nei vari laboratori, essendo sia lo sforzo sia il numero di cicli a rottura misurabili in modo operativamente più semplice e affetti da incertezze apprezzabilmente minori.

Agli esercenti e progettisti di componenti operanti in regime di fatica oligociclica spetta il compito di attribuire fiducia a previsioni di vita sensibilmente dipendenti dalla metodologia di misura della deformazione del laboratorio che ha caratterizzato il materiale.

In [1] si pretende di aver dimostrato la indipendenza del risultato teorico 'vita del componente strutturale' dalla va-

riabilità dei dati di incrudimento e fatica oligociclica, sotto specifiche ipotesi concernenti la discrepanza dei dati provenienti da due diversi laboratori.

La dimostrazione in [1] non si avvale di una notazione rigorosa, esponendosi a svariate critiche: la più importante riguarda la assunzione (falsa) che le equazioni di congruenza tra le deformazioni siano invarianti rispetto a una trasformazione quadratica (vedere l'Appendice A del presente lavoro).

Gli interrogativi suscitati in [1] sono attuali e riproponibili per altri tipi di calcolo strutturale basati su dati del materiale variabili.

In questo articolo si affrontano le problematiche relativamente ai calcoli per le previsioni di vita a fatica oligociclica.

Considerazioni introduttive

I calcoli di vita di un componente strutturale sollecitato in regime di fatica oligociclica sono basati su analisi puntuali dello stato tensiodeformativo. Il valore massimo dell'intervallo di deformazione (generalmente realizzato alla radice di intagli) determina sulla curva deformazione-vita del materiale il numero di cicli ai quali può essere sottoposto il componente in esercizio.

Per determinare lo stato tensiodeformativo del componente occorrerebbe simulare la applicazione di un carico ciclico, considerando la evoluzione della caratteristica tensile del materiale all'aumentare del numero di cicli. Per rendere praticabili le analisi si ricorre a utilizzare la curva sperimentale sforzo-deformazione ciclica (rilevata cioè a metà vita) del materiale, opportunamente traslata nel suo piano, e a introdurre un carico monotono crescente con valore massimo pari all'intera ampiezza del carico ciclico di esercizio¹.

Il comportamento tensile ciclico del materiale dovrebbe essere rappresentato da modelli della deformazione plastica compatibili con eventuali rilassamenti locali del materiale, nonostante la crescente monotonicità del carico applicato esternamente.

Rinunciando al prospettato rigoroso inquadramento si ritengono attuate localmente le ipotesi di caricamento monotono crescente e proporzionale, in modo da rimpiazzare il modello di materiale a plasticità incrementale, fortemente non-lineare, con quello di materiale elastico non-lineare, ottenendo la stessa

1. Per questo motivo nella trattazione che segue le grandezze cicliche non saranno denotate con la usuale simbologia.

soluzione per il campo tensiodeformativo da determinare.

L'ipotesi precedente si intenderà verificata in termini globali, assicurandosi che, in presenza di geometria non eccessivamente complessa, nel corso del caricamento, le forze applicate esternamente crescano monotonicamente nel tempo e non cambino direzione.

Analisi del campo tensiodeformativo

Considerando carichi meccanici lentamente variabili, applicati alla superficie esterna del componente, e materiale elastico non-lineare, si assumano come incognite del problema le 6 componenti distinte di **sforzo** σ_{ij} , essendo $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, e le 6 componenti distinte di **deformazione** ϵ_{ij} , $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$.

Le prime equazioni per legare insieme le 12 grandezze incognite vengono fornite, in numero di 3, dalla Statica e rappresentano condizioni di equilibrio alla traslazione dei volumi elementari (cubi) interni al solido in esame. In assenza di forze di massa assumono la forma²

$$\sigma_{i1,1} + \sigma_{i2,2} + \sigma_{i3,3} = 0 \quad i=1,2,3$$

Imponendo l'equilibrio alla traslazione dei volumi elementari (triedri) con una faccia sulla superficie esterna del solido si introduce, in termini finiti, la dipendenza del campo tensionale dai carichi meccanici esterni

$$n_1 \cdot \sigma_{i1} + n_2 \cdot \sigma_{i2} + n_3 \cdot \sigma_{i3} = T_i \quad i=1,2,3$$

dove:

T_i è la componente della distribuzione equilibrata di forze superficiali agenti;

n_i è la componente della normale (unitaria e orientata positivamente verso l'esterno) alla superficie del solido.

I due tipi di equazioni di equilibrio alla traslazione si rimpiazzano vicendevolmente in un procedimento di integrazione, che ricostruisca il campo tensionale nel solido.

1. La riduzione da 9 a 6 delle componenti di sforzo viene determinata dalle 3 equazioni di equilibrio alla rotazione per i volumi elementari del solido. Operata questa riduzione le condizioni di equilibrio alla rotazione della Statica non si adopereranno più. Per il tensore di deformazione la riduzione a 6 delle 9 componenti si basa sulla simmetria introdotta all'atto della definizione.

2. Si ribadisce che i pedici di una grandezza che precedono la virgola ne individuano la componente tensoriale mentre quelli che seguono la virgola esprimono derivazioni parziali successive rispetto ad altre grandezze alle quali essi si riferiscono.

Le componenti di deformazione (per risalire da esse alle componenti continue e uniformi dello spostamento in ogni punto del solido) devono soddisfare alle 6 equazioni differenziali di congruenza,

$$\epsilon_{11,22} + \epsilon_{22,11} - 2 \cdot \epsilon_{12,12} = 0$$

$$\epsilon_{12,31} + \epsilon_{13,21} - \epsilon_{23,11} - \epsilon_{11,23} = 0$$

$$\epsilon_{22,33} + \epsilon_{33,22} - 2 \cdot \epsilon_{23,23} = 0$$

$$\epsilon_{23,12} + \epsilon_{21,32} - \epsilon_{31,22} - \epsilon_{22,31} = 0$$

$$\epsilon_{33,11} + \epsilon_{11,33} - 2 \cdot \epsilon_{31,31} = 0$$

$$\epsilon_{31,23} + \epsilon_{32,13} - \epsilon_{12,33} - \epsilon_{33,12} = 0$$

delle quali solo 3 risultano differenzialmente indipendenti.

Per il bilancio logico del problema si trovano 12 incognite (6 componenti di sforzo e 6 di deformazione) e solo 6 equazioni (3 di equilibrio, 3 di congruenza).

La determinazione dello stato tensiodeformativo è collegata alla disponibilità di 6 equazioni fenomenologiche che correlano le componenti della deformazione alle componenti di sforzo

$$\epsilon_{ij} = h_{ij}(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}, \text{parametri del materiale}) \quad i, j = 1, 2, 3$$

Note sulla superficie esterna del corpo le forze $T_i(x_1, x_2, x_3)$ applicate, il calcolo del campo tensiodeformativo si esegue risolvendo il sistema impostato di 12 equazioni e 12 incognite.

Nel procedimento risolutivo sono distinguibili tre passaggi:

(1) sostituzione delle componenti di deformazione nelle 3 equazioni di congruenza utilizzando le equazioni costitutive del materiale;

(2) risoluzione del sistema (ottenuto al termine del precedente passo) costituito da 6 equazioni differenziali alle derivate parziali nelle 6 componenti incognite dello sforzo;

(3) calcolo del campo deformativo riutilizzando le equazioni costitutive del materiale, noto il campo di sforzi dal passo precedente.

Il materiale determina il campo tensionale a mezzo dei parametri delle equazioni costitutive immessi nelle equazioni di congruenza. Il campo deformativo è influenzato dal materiale quando viene ricavato dalle equazioni costitutive.

Se due laboratori, caratterizzando lo stesso materiale, forniscono curve sforzo-deformazione con valori differenti dei parametri, le analisi tensiodeformative del componente da studiare varieranno di conseguenza.

Ruolo della curva sforzo-deformazione

Le equazioni costitutive di un materiale elastico non-lineare hanno effettivamente la forma

$$\epsilon_{ij} = (3/2) \cdot \sigma_0^{-M} \cdot \sigma_e^{M-1} \cdot \sigma'_{ij}$$

dove

$$\sigma_e = (1/\sqrt{2}) \cdot [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + 6 \cdot (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)]^{1/2}$$

e

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3 \quad \text{per } i=j \quad \sigma'_{ij} = \sigma_{ij} \quad \text{per } i \neq j$$

La quantità scalare σ_e sforzo equivalente di Von Mises e il tensore σ'_{ij} deviatore dello sforzo sono funzioni dello stato di sforzo.

I parametri σ_0 e M sono caratteristici del materiale e vengono identificati a mezzo di prove di trazione in regime di tensione monoassiale.

Correlando σ_{11} applicato con la deformazione assiale ϵ_{11} esibita dal campione di materiale, si stabiliscono i parametri σ_0 e M nel modello

$$\epsilon_{11} = \sigma_0^{-M} \cdot \sigma_{11}^M$$

che è la forma particolare, $i=1$ e $j=1$, dell'equazione costitutiva precedentemente presentata, in presenza di campo di tensione monoassiale $\sigma_{11} = \sigma_e$.

Si definisce una quantità, ϵ_e , detta deformazione equivalente, con l'equazione

$$\epsilon_e = \sigma_0^{-M} \cdot \sigma_e^M$$

che si riscrive, in forma generale,

$$\epsilon_e = H(\sigma_e)$$

Le quantità σ_e e ϵ_e vengono definite in modo che, in un regime monoassiale di tensioni, coincidano rispettivamente con lo sforzo e la deformazione agenti lungo l'asse di sollecitazione.

Il sistema di equazioni presentato nella precedente sezione viene equivalentemente trasformato dalle seguenti operazioni:

a) introduzione della nuova equazione di natura effettivamente fenomenologica

$$\epsilon_e = H(\sigma_e)$$

b) sostituzione delle generiche espressioni delle ϵ_{ij} con quelle relative a materiale elastico non-lineare introdotte all'inizio della presente sezione;

c) aggiunta delle nuove 8 incognite ϵ_e , σ_e e σ_{ij} ;

d) definizione dello sforzo equivalente e delle componenti del tensore deviatore dello sforzo.

Risulta ancora soddisfatto il bilanciamento logico tra numero di equazioni e incognite presenti, Tav.1.

La risoluzione del nuovo sistema prevede che le equazioni di congruenza siano costrette a contenere, come incognite, solo componenti di sforzo. Essendo lo stato tensionale del componente descritto dalle 6 componenti di sforzo, dalle 6 componenti del deviatore dello sforzo e dallo sforzo equivalente le 13 equazioni occorrenti sono le 3 di equilibrio, le 3 di congruenza, le 6 che definiscono le componenti del deviatore di sforzo e quella che definisce lo sforzo equivalente. Risolto il campo tensionale si calcolano le 6 componenti di deformazione e , tramite la relazione fenomenologica H , la deformazione equivalente.

Ruolo della curva deformazione-vita

Le considerazioni svolte nella precedente sezione evidenziano il completo disaccoppiamento tra il calcolo dello stato tensiodeformativo di un componente strutturale e quello successivo di vita a fatica oligociclica.

Si rileva che le prove di fatica oligociclica si eseguono, generalmente, in regime di sollecitazione monoassiale e la curva deformazione-vita, ottenuta elaborando i dati di laboratorio, dovrebbe propriamente chiamarsi curva **deformazione equivalente-vita**

$$N_f = L(\epsilon_e)$$

Il valore più grande di ϵ_e realizzato sul componente determina sulla curva deformazione-vita il numero di cicli a rottura.

Variabilità delle curve di incrudimento e fatica oligociclica

Il concetto di "variabilità" tra dati sperimentali implica, nel presente articolo, che, nel corso delle prove, lo sforzo e il numero di cicli a rottura del campione di materiale vengano misurati con una incertezza trascurabile. Questa ipotesi risulta accettabile per la grandezza numero di cicli a rottura e rappresenta una plausibile approssimazione per la grandezza sforzo, specialmente se si esegue un confronto con l'incertezza connessa alla misura della deformazione.

Si ipotizzi che due laboratori A e B, caratterizzando lo stesso materiale a incrudimento ciclico e fatica oligociclica, producano le seguenti curve sforzo-deformazione e deformazione-vita

$$\epsilon_e = H_A(\sigma_e) \quad N_f = L_A(\epsilon_e) \quad \epsilon_e = H_B(\sigma_e) \quad N_f = L_B(\epsilon_e)$$

Le discrepanze tra i dati dei due laboratori, attribuibili essenzialmente alla misura della deformazione, si possono rappresentare formalmente a mezzo di una funzione F, Fig.1, che lega le deformazioni espresse dalle equazioni fenomenologiche sopra fornite

$$H_A(\sigma_e) = F[H_B(\sigma_e)] \quad L_A^{-1}(N_f) = F[L_B^{-1}(N_f)]$$

In F si devono ritenere rappresentati gli errori sistematici come pure gli immancabili errori di natura casuale commessi nelle misure delle deformazioni eseguite dai laboratori A e B.

Il problema degli effetti della variabilità dei dati sperimentali introdotti nei procedimenti di calcolo di vita a fatica oligociclica si formula rigorosamente così: 'Nota la funzione F, esistono condizioni perché si arrivi a calcolare lo stesso N_f , quando si utilizzano le curve sforzo-deformazione e deformazione-vita prodotte dai laboratori A e B ?'

Condizioni di indipendenza dalla variabilità dei dati sperimentali

Si indichino con ϵ_{eA} e ϵ_{eB} le deformazioni equivalenti massime calcolate utilizzando rispettivamente le curve sforzo-deformazione dei laboratori A e B.

Solo se tali deformazione risultano nella relazione

$$\epsilon_{eA} = F(\epsilon_{eB})$$

si avranno gli stessi valori di N_f , una volta che siano sostituite nei legami L_A e L_B .

La invariabilità del risultato dei calcoli di vita oligociclica di un componente richiede che tra le deformazioni equivalenti massime calcolate si conservi la stessa relazione esistente tra le deformazioni equivalenti delle curve sforzo-deformazione fornite dai laboratori A e B.

Il procedimento che determina le deformazioni equivalenti richiede, per rispettare la condizione precedentemente scritta, che risultino uguali i corrispondenti sforzi equivalenti.

Data la stessa geometria, si deduce che i due calcoli devono consegnare lo stesso campo tensionale, sebbene sia stata va-

riata la caratteristica tensile del materiale.

Il campo delle tensioni, invece, come si è dimostrato, dipende, in generale, dai parametri presenti nelle equazioni costitutive del materiale.

Rimarebbe solo da auspicare un progressivo e sensibile miglioramento della misura della deformazione sui campioni del materiale da caratterizzare, per ridurre le incertezze ad essa collegate e attribuire maggiore attendibilità ai risultati teorici di previsioni di vita a fatica oligociclica.

Viene naturale chiedersi se le condizioni di indipendenza del campo tensionale dai parametri delle equazioni costitutive si possano realizzare almeno in maniera approssimata, in modo da ridurre, presumibilmente, la variabilità del dato finale di vita del componente.

Nel procedimento di calcolo dello stato tensiodeformativo in un componente strutturale la sostituzione, nelle equazioni di congruenza, delle espressioni delle componenti di deformazione, ricavate dalle equazioni costitutive del materiale, in alcuni casi, porta alla eliminazione di un parametro caratteristico del materiale che rigorosamente non contribuisce alla determinazione del campo tensionale.

Una situazione del genere si verifica sia nel caso di materiale elastico lineare sia nel caso di materiale elastico non-lineare, che interessa i calcoli analizzati.

Per materiale elastico lineare, caratterizzato dalle uniche costanti E , modulo di Young, e μ , modulo di Poisson, la particolare struttura delle equazioni costitutive

$$\epsilon_{ij} = (1/E) \cdot [(1+\mu) \cdot \sigma_{ij} - \mu \cdot (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) / 3] \text{ per } i=j$$

e

$$\epsilon_{ij} = (1/E) \cdot (1+\mu) \cdot \sigma_{ij} \text{ per } i \neq j$$

pone in evidenza la quantità $1/E$, che può essere eliminata quando si sostituiscono le equazioni costitutive del materiale nelle equazioni di congruenza. Il campo di sforzi pertanto risulta rigorosamente indipendente dal modulo di Young.

Nel caso di materiale elastico non-lineare si ha la eliminazione del coefficiente moltiplicativo σ_0^M presente nelle equazioni

$$\epsilon_{ij} = (3/2) \cdot \sigma_0^{-M} \cdot \sigma_e^{M-1} \cdot \sigma_{ij}$$

Quindi il campo tensionale in un solido costituito di tale materiale viene a dipendere esclusivamente dall'esponente M .

Se i laboratori A e B riuscissero a caratterizzare il materiale pianificando la sperimentazione in modo da riversare nella stima della quantità σ_0 buona parte della incertezza della prova di incrudimento e ridurre notevolmente la incertezza connessa con la stima dell'esponente M, allora effettivamente il campo tensionale verrebbe ad essere poco influenzato dai parametri delle equazioni costitutive e, senza tenere conto delle deformazioni calcolate (necessariamente discrepanti), si arriverebbe a valutazioni confrontabili della vita a fatica oligociclica del componente.

Ipotesi di pianificazione sperimentale per sola variabilità casuale della misura di deformazione

Si immagini di dover calcolare la vita a fatica oligociclica di un componente strutturale costituito di materiale elastico non-lineare, la caratteristica tensile del quale si intende approssimare con

$$\epsilon = \sigma_0^{-M} \cdot \sigma^M$$

Le conclusioni della precedente sezione autorizzano a ritenere indipendente il campo di sforzi dal parametro σ_0 .

Gli ipotetici laboratori A e B commettano errori di ampiezza decisamente trascurabile misurando gli sforzi e non ne introducano di sistematici nel misurare la deformazione. Le discrepanze si attribuiscono agli errori casuali connessi alla misura della deformazione.

I due istituti A e B si propongano di fornire le curve sforzo-deformazione in modo da non provocare notevoli divergenze nei risultati dei calcoli per la determinazione della vita del componente da studiare.

Ogni laboratorio, a prove effettuate, avrà a disposizione una serie di coppie di dati sperimentali (σ_i, ϵ_i) , $i=1, 2, \dots, n$.

Scelto un valore convenzionale di σ_0 , ininfluenza sui calcoli da condurre, e linearizzando (nell'unico parametro M) il modello rappresentativo della caratteristica tensile del materiale introducendo la funzione logaritmo decimale, si otterrà

$$\lg(\epsilon) = M \cdot \lg(\sigma/\sigma_0)$$

Le grandezze da considerare diventano $e_i = \lg(\epsilon_i)$ e $s_i = \lg(\sigma_i/\sigma_0)$ e la retta da individuare

$$e = M \cdot s$$

Con il metodo di approssimazione statistica dei minimi quadrati si stimerà M [3] (pendenza della retta approssimante)

$$M = [\Sigma(s_i \cdot e_i)] / (\Sigma s_i^2)$$

Se δ_{ei} indica l'incertezza di ciascuna delle grandezze misurate e_i , per le leggi di propagazione l'incertezza sulla stima del parametro M risulta

$$\delta_M = [\Sigma(s_i \cdot \delta_{ei}) / \Sigma s_i^2]$$

Pianificando le misure delle σ_i in modo da minimizzare la quantità δ_M , i due laboratori fornirebbero equazioni della caratteristica tensile del materiale, differenti per il parametro σ_0 , con due valori prossimi dell'esponente M.

I campi tensionali calcolati presenterebbero leggere divergenze e lo stesso accadrebbe per le due previsioni di vita del componente.

Conclusioni

Una rigorosa analisi della struttura logica dei calcoli a fatica oligociclica di un componente strutturale non ha evidenziato meccanismi di compensazione che annullino gli effetti della variabilità delle curve sforzo-deformazione e deformazione-vita sul risultato finale 'vita a fatica', in contrasto con la tesi conclamata in [1].

L'analisi ha indicato le rigorose condizioni per ottenere la stessa previsione di vita di un componente (in presenza di curve sforzo-deformazione e deformazione-vita variabili a seconda del laboratorio di prova), consistenti nella indipendenza del campo di sforzo dai parametri caratteristici del materiale nelle equazioni costitutive.

Le condizioni di indipendenza di impraticabile attuazione possono realizzarsi in maniera approssimata perché non tutti i parametri delle equazioni costitutive concorrono alla determinazione del campo tensionale, essendo presenti nei calcoli processi algebrici di eliminazione-semplificazione.

Risultano proponibili piani sperimentali che dirottino il carico di incertezza delle prove di incrudimento sul parametro che non contribuisce alla determinazione del campo tensionale.

Bibliografia

[1] **Bicego V., Ragazzoni S.**, "Dispersione dei Dati in Prove di Fatica Oligociclica: Considerazioni sui Risultati di un Round Robin", Atti del VII Convegno Nazionale del Gruppo Italiano Frattura, pagg.171-179, IGF7 Firenze 13-14 Giugno 1991.

[2] **Belloni G., Bernasconi G.**, "Sforzi e Deformazioni e loro legami", pagg.122-123, Tamburini Editore s.p.a. Milano, 1975.

[3] Taylor J.R., "Introduzione all'Analisi degli Errori, lo studio delle incertezze nelle misure fisiche", pag.127, Zanichelli Editore s.p.a. Bologna, 1986.

Tav.1 Sistema di equazioni per il calcolo dello stato tensio-deformativo in un componente strutturale

Incognite in numero totale di 20

$$\sigma_{ij} \quad \sigma'_{ij} \quad \epsilon_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad \sigma_e \quad \epsilon_e$$

Equazioni in numero totale di 20

Equilibrio (3):

$$\sigma_{i1,1} + \sigma_{i2,2} + \sigma_{i3,3} = 0 \quad \text{oppure} \quad n_1 \cdot \sigma_{i1} + n_2 \cdot \sigma_{i2} + n_3 \cdot \sigma_{i3} = T_i \quad i=1, 2, 3$$

Congruenza (3) (3 tra le seguenti 6):

$$\begin{aligned} \epsilon_{11,22} + \epsilon_{22,11} - 2 \cdot \epsilon_{12,12} &= 0 & \epsilon_{12,31} + \epsilon_{13,21} - \epsilon_{23,11} - \epsilon_{11,23} &= 0 \\ \epsilon_{22,33} + \epsilon_{33,22} - 2 \cdot \epsilon_{23,23} &= 0 & \epsilon_{23,12} + \epsilon_{21,32} - \epsilon_{31,22} - \epsilon_{22,31} &= 0 \\ \epsilon_{33,11} + \epsilon_{11,33} - 2 \cdot \epsilon_{31,31} &= 0 & \epsilon_{31,23} + \epsilon_{32,13} - \epsilon_{12,33} - \epsilon_{33,12} &= 0 \end{aligned}$$

Costitutive del materiale (7):

$$\epsilon_e = H(\sigma_e) \quad \epsilon_{ij} = (3/2) \cdot \sigma_0^{-M} \cdot \sigma_e^{M-1} \cdot \sigma'_{ij} \quad \text{per } i, j=1, 2, 3$$

Definizioni di sforzo equivalente (1) e delle componenti del tensore deviatore dello sforzo (6):

$$\sigma_e = (1/\sqrt{2}) \cdot [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + 6 \cdot (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)]^{1/2}$$

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3 \quad \text{per } i=j \quad \sigma'_{ij} = \sigma_{ij} \quad \text{per } i \neq j$$

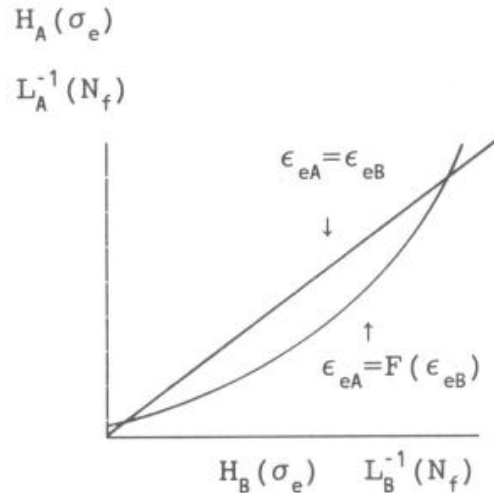


Fig.1 Rappresentazione schematica della discrepanza tra le misure di deformazione eseguite nei laboratori A e B

Appendice A

La derivata parziale seconda, rispetto a due coordinate x_i e x_j , della componente di deformazione ϵ_{hk} , funzione, tramite F (trinomio di secondo grado completo), di ϵ'_{hk} , a sua volta dipendente dalle coordinate spaziali, si scrive

$$\epsilon_{hk,ij} = 2 \cdot A \cdot (\epsilon'_{hk,i} \cdot \epsilon'_{hk,j}) + (2 \cdot A \cdot \epsilon'_{hk} + B) \cdot \epsilon'_{hk,ij} \quad 12$$

Le equazioni di congruenza hanno forma generale [2]

$$\epsilon_{hk,ij} + \epsilon_{ij,hk} - \epsilon_{hi,kj} - \epsilon_{kj,hi} = 0$$

Permutando gli indici e sostituendo ciascun termine $\epsilon_{hk,ij}$ si ottengono nuove equazioni nelle funzioni incognite ϵ'_{hk} , che non conservano la proprietà di **costanza dei coefficienti** delle $\epsilon'_{hk,ij}$ e di **omogeneità rispetto alle derivate seconde**.

L'invarianza delle equazioni di congruenza è banalmente verificata se F è una trasformazione lineare.

1. I pedici di una grandezza che precedono la virgola ne individuano la componente tensoriale mentre quelli che seguono la virgola esprimono derivazioni parziali successive rispetto ad altre grandezze, alle quali essi si riferiscono; nel caso in questione il riferimento è $i \rightarrow x_i, j \rightarrow x_j$.

2. Assunto che

$$\epsilon_{hk} = F(\epsilon'_{hk}) = A \cdot \epsilon'^2_{hk} + B \cdot \epsilon'_{hk} + C$$

derivando rispetto a x_i si ottiene

$$\epsilon_{hk,i} = 2 \cdot A \cdot \epsilon'_{hk} \cdot \epsilon'_{hk,i} + B \cdot \epsilon'_{hk,i}$$

Derivando poi rispetto a x_j si arriva all'espressione riportata sopra.