

**IGF8 - VIII Convegno Nazionale  
Gruppo Italiano Frattura  
Genova, 27-29 maggio 1992**

**PROPAGAZIONE DI CRICCHE PER FATICA IN STATO COMPOSTO  
DI SOLLECITAZIONE IN UN ALBERO A GOMITI**

M. Guagliano, L. Vergani, A. Vighi  
Politecnico di Milano, Dipartimento di Meccanica  
P.zza Leonardo da Vinci 32, 20133 MILANO

**SOMMARIO**

Dalle prove di fatica eseguite su un albero a gomiti è risultato che la propagazione della cricca nucleata per fatica è influenzata dai tre modi di apertura delle fratture. Per una corretta previsione della vita del pezzo è dunque necessario considerare e valutare correttamente i fattori di intensificazione degli sforzi  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$  per le diverse geometrie che la frattura assume durante la propagazione. Si sono quindi effettuati calcoli ad elementi finiti per due diverse profondità della cricca calcolando  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$  dai valori degli sforzi. Inoltre è stato determinato il valore dell'integrale  $J$ . Da questi risultati si è calcolato un valore effettivo di  $K$ ,  $K_{eff}$ , al fine di definire una legge di propagazione in stato composto di sollecitazione.

**INTRODUZIONE**

La legge di Paris [1] è universalmente utilizzata per correlare la velocità di propagazione con il valore del fattore di intensificazione degli sforzi  $K_I$ . In bibliografia è possibile trovare espressioni del fattore di intensificazione degli sforzi che riguardano soprattutto il primo modo di apertura della frattura (per distacco). Tuttavia nei componenti meccanici, a causa della loro particolare geometria e delle differenti situazioni di carico, le cricche di fatica propagano in condizioni che coinvolgono tutti e tre i modi di apertura delle fratture (rispettivamente distacco, scorrimento e lacerazione).

In tali situazioni diventa difficile trovare soluzioni esatte di  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$  e per superare tale problema è necessario ricorrere a metodi approssimati. In particolare, il Metodo degli Elementi Finiti è stato molte volte utilizzato per valutare il fattore di intensità degli sforzi [2, 3, 4].

Un altro problema che sorge in queste situazioni è la definizione di un fattore di

intensificazione degli sforzi effettivo  $K_{eff}$  utilizzabile in fase di previsione in condizioni di carico multiassiale. Chen and Keer [5], per esempio, hanno definito un  $K_{eff}$  basandosi sul modello di Dugdale in condizioni di sforzo piano e composto. L'espressione cui sono giunti è la seguente:

$$K_{eff} = [(K_I^2 + 3K_{II}^2)^3 (K_I^2 + K_{II}^2)]^{1/8} \quad (1)$$

Questa espressione è risultata soddisfacente alla luce delle verifiche sperimentali effettuate. Tanaka [6] ha invece definito una legge di propagazione delle fratture in stato composto basandosi sul modello proposto da Weertmen. L'espressione della legge è:

$$\frac{dc}{dN} = C(\Delta K_{eff})^n \quad (2)$$

con:

$$K_{eff} = (K_I^4 + 8K_{II}^4)^{1/4} \quad (3)$$

Tanaka ha inoltre esteso tale legge nel caso sia presente un contributo dovuto alla lacerazione senza però effettuare verifiche sperimentali. In tale caso  $K_{eff}$  diviene:

$$K_{eff} = [K_I^4 + 8K_{II}^4 + 8K_{III}^4 / (1 - \nu)]^{1/4} \quad (4)$$

In questo lavoro si sono svolte prove di fatica su un albero a gomiti di un motore Diesel navale e si è osservata la propagazione della frattura che avviene in stato composto di sforzo. Si sono realizzati diversi modelli numerici ad elementi finiti del componente considerando delle cricche di dimensioni differenti; si sono valutati i valori del fattore di intensificazione degli sforzi lungo il fronte di propagazione relativamente ai differenti modi di apertura dai risultati ottenuti dal calcolo numerico.

## DESCRIZIONE DELLE PROVE SPERIMENTALI

In fig.1 è raffigurato uno dei tronchetti dell'albero a gomiti utilizzati per le prove a fatica: il diametro del perno di manovella è di 130mm ed il materiale è acciaio 35CrMo4 UNI 7884, le cui proprietà meccaniche sono mostrate in Tab.1.

L'albero è stato caricato con una forza assiale alternata eccentrica, al fine di avere un momento flettente costante lungo il perno di manovella. Il braccio della forza rispetto al perno di manovella è di 285mm.

L'applicazione di estensimetri elettrici, in particolare nella zona più sollecitata dell'elemento ha permesso di rilevare l'andamento delle deformazioni durante lo svolgimento della prova. In questo modo è stato possibile osservare la nucleazione della frattura: un repentino cambiamento dei valori delle deformazioni infatti caratterizza la fase

immediatamente precedente all'inizio della propagazione macroscopica.

Tab.1. Proprietà meccaniche dell'acciaio 35CrMo4 UNI 7874

$R_e$ (MPa)	$R_m$ (MPa)	E (MPa)	$\nu$	A (%)
572	764	2050000	.28	9.4

L'evoluzione della frattura è stata poi seguita tramite crack gauges. In questo lavoro si considera in particolare la propagazione della frattura quando il carico applicato è  $\Delta P = \pm 40.000N$ .

La cricca di fatica ha origine sul raccordo interno ed inizialmente si propaga nel piano perpendicolare al massimo sforzo principale, inclinato di  $45^\circ$  rispetto alla direzione di applicazione del carico (piano A-A, fig.1), ed è simmetrica rispetto al piano longitudinale di mezzeria.

Dopo che la cricca ha raggiunto una determinata lunghezza il piano di propagazione cambia e l'inclinazione diviene  $35^\circ$ , sempre rispetto alla direzione del carico applicato. In fig.2 si può osservare la sezione di rottura dell'albero a gomiti: si nota che la forma è ellittica e che il rapporto tra l'asse maggiore e quello minore diviene sempre maggiore. Le linee tratteggiate segnalano la parte di frattura inclinata di  $35^\circ$ . La stessa tipologia di frattura è stata osservata su altri tronchetti portati a rottura. Le dimensioni della cricca riportate in figura sono quelle schematizzate ad elementi finiti e corrispondono ad un numero di cicli  $n=450.000$  e  $n=550.000$ .

## MODELLI NUMERICI

Per effettuare previsioni accurate della propagazione stabile di cricche per fatica è necessario calcolare con precisione i valori del fattore di intensità degli sforzi. Se la geometria dell'elemento meccanico è complessa non è possibile utilizzare soluzioni analitiche ed è quindi necessario ricorrere a tecniche numeriche o analisi sperimentali per risolvere il problema. Oggigiorno il metodo degli elementi finiti è il più utilizzato a questo scopo. Il principale problema in questo caso è che i risultati che si ottengono possono essere influenzati dal tipo di schematizzazione adottata. Nel caso di elementi criccati il problema è complicato dalla presenza della singolarità del campo tensionale. Le molte tecniche proposte per avere modelli affidabili presentano tutte un alto grado di infittimento in corrispondenza dell'apice della frattura. Se invece ci si limita ad una valutazione dei parametri energetici caratterizzanti il fenomeno della frattura, l'integrale J può essere calcolato usando il metodo dell'estensione virtuale della cricca [8]: in questo caso le

schematizzazione possono prevedere un infittimento minore.

A causa delle problematiche computazionali solo piu' recentemente sono state sviluppate analisi tridimensionali di componenti fratturati. In questi casi le complicazioni geometriche sono tali da richiedere l'utilizzo di modellatori solidi [7].

L'albero a gomiti considerato in questo lavoro è stato quindi schematizzato utilizzando PATRAN, strumento in grado di effettuare magliature tridimensionali semiautomatiche. Gli elementi utilizzati sono solidi quadratici isoparametrici. L'accuratezza della schematizzazione è stata accresciuta grazie all'utilizzo della tecnica del "nodo a distanza 1/4 dall'apice" che simula la singolarità delle deformazioni nella zona dell'apice della frattura [9,10].

Si sono realizzati due modelli. In entrambi si è trascurata la presenza dei fori di lubrificazione ed alleggerimento mentre la cricca è stata supposta simmetrica: in tal modo la struttura diviene simmetrica ed è quindi necessario modellarne solamente 1/4 con un considerevole risparmio di tempo di modellazione e calcolo. E' stato schematizzato anche il dispositivo di applicazione del carico mentre i vincoli imposti sono quelli di simmetria.

Su entrambi i modelli è stata condotta una analisi elastica: il carico imposto riproduce la situazione sperimentale ( $P=20.000N$ ). E' stato effettuato uno studio di convergenza dei risultati sui due modelli: quando i valori degli sforzi non sono variati significativamente dal meno al piu' accurato non si è infittita ulteriormente la schematizzazione.

Il primo modello, vedi fig.3, rappresenta la cricca nella fase iniziale della propagazione, quando avanza nel piano perpendicolare alla direzione del massimo sforzo. Un primo studio su questo modello è già stato effettuato considerando il solo primo modo di propagazione [11]. Il fronte di propagazione è semiellittico con un rapporto tra gli assi pari a 1/2. Il numero degli elementi che costituiscono il modello è 796 mentre i nodi sono 4378.

Il secondo modello è topologicamente simile al primo ma rappresenta l'albero a gomiti con la cricca già oltre il raccordo che si sta muovendo verso il fianco del pezzo. Si è prestata particolare attenzione nel modellare il cambio di giacitura del piano di propagazione della cricca al fine di valutare il contributo dei diversi modi di propagazione. In questo caso il rapporto tra gli assi dell'ellisse che descrive il fronte è minore del precedente. La lunghezza superficiale della cricca è in questo caso 120mm mentre il modello è composto da 1844 elementi e 9478 nodi.

### **CALCOLO DI $K_I$ , $K_{II}$ , $K_{III}$**

Per una corretta valutazione dei fattori di intensità degli sforzi  $K_i$  ( $i= I, II, III$ ) è stato considerato il campo tensionale nella zona dell' apice della frattura. Hartranft e Sih [12] hanno mostrato che lungo una cricca di forma arbitraria, il campo tensionale nei piani definiti dalla normale  $\mathbf{n}$  e dalla binormale  $\mathbf{b}$  (fig.4) è lo stesso del caso bidimensionale, anche se i valori dei fattori di intensità degli sforzi cambiano lungo il fronte della frattura. Quindi si può scrivere:

$$\begin{aligned}
\sigma_n &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\vartheta}{2} \left[ 1 - \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{3}{2} \vartheta \right] - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\vartheta}{2} \left[ 2 + \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{3}{2} \vartheta \right] \\
\sigma_b &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\vartheta}{2} \left[ 1 + \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{3}{2} \vartheta \right] + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{3}{2} \vartheta \\
\sigma_t &= 2\nu \left[ \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\vartheta}{2} - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\vartheta}{2} \right] \\
\tau_{nb} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{3}{2} \vartheta + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\vartheta}{2} \left[ 1 - \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{3}{2} \vartheta \right] \\
\tau_{nt} &= -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\vartheta}{2} \\
\tau_{bt} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\vartheta}{2}
\end{aligned} \tag{5}$$

per gli sforzi ed analoghe formule per gli spostamenti. Considerando  $\theta=0$  i fattori di intensità degli sforzi possono essere calcolati estrapolando i valori ottenuti ai nodi a distanza  $x$  dall'apice della frattura:

$$\begin{aligned}
K_I &= \lim_{x \rightarrow 0} \sigma_n \sqrt{2\pi x} \\
K_{II} &= \lim_{x \rightarrow 0} \tau_{nb} \sqrt{2\pi x} \\
K_{III} &= \lim_{x \rightarrow 0} \tau_{bt} \sqrt{2\pi x}
\end{aligned} \tag{6}$$

Le stesse estrapolazioni possono essere fatte per gli spostamenti e danno in genere risultati più accurati prendendo come angolo  $\theta = \pi$  [13].

Tuttavia per ottenere risultati affidabili questo calcolo richiede modellazioni molto accurate e rende necessari dei test per verificarne la correttezza. E' stato quindi calcolato il valore dell'integrale  $J$  utilizzando una procedura numerica basata sul lavoro di estensione virtuale della cricca, tecnica che non richiede schematizzazioni troppo accurate ma che non permette di separare i contributi dei differenti modi di apertura di fratture. Tenendo presente che abbiamo a che fare con un materiale elastico lineare, si può, considerando uno stato di deformazione piano, applicare la seguente relazione

$$J = \frac{(K_I^2 + K_{II}^2)(1 - \nu^2)}{E} + \frac{K_{III}^2(1 + \nu)}{E} \tag{7}$$

ed un'altra simile per stato di sforzo piano. Poichè nel caso considerato non si ha una situazione nè di deformazione piana nè di sforzo piano è stato valutato un valore medio tra i due citati. I valori dell'integrale  $J$  così ottenuti possono essere utilizzati per verificare l'accuratezza della schematizzazione in termini di sforzi e deformazioni.

## DISCUSSIONE DEI RISULTATI

Le analisi numeriche hanno mostrato come i tre modi di apertura contribuiscono alla propagazione della frattura.

I modelli sono stati per prima cosa verificati confrontando le deformazioni ottenute con i valori estensimetrici (punti A, B, C, D, E in fig.1): le differenze sono risultate sempre minori del 10%. I valori dei  $K_i$  sono stati valutati estrapolando i valori nodali ottenuti dagli sforzi. Questo tipo di calcolo non è in generale molto accurato ma una convalida è stata trovata dal confronto dell'integrale  $J$  ottenuto dalla (7) con quello ottenuto grazie al metodo del Parks. Nelle figure 5 e 6 si mostra l'andamento di  $J$  lungo il fronte di propagazione per le due cricche considerate: in entrambi i casi l'accordo tra i due metodi di calcolo è buono, tranne che per i punti lungo la superficie del pezzo. In fig.7 è illustrato l'andamento del

fattore di intensità degli sforzi normalizzato  $k_i$  ( $k_i = \frac{K_i}{\sigma_{ij} \sqrt{\pi a}}$ ,  $ij = nn, nb, bt$ ) per la cricca

di minore estensione: i massimi valori di  $k_i$  non sono nel punto di maggiore profondità della cricca. Probabilmente ciò è dovuto agli effetti della triassialità dello stato di sforzo ed all'effetto della superficie posteriore del pezzo.

I valori di  $k_{II}$  sono maggiori di quelli di  $k_I$ : tuttavia la influenza del secondo modo è minore a causa del minor sforzo nominale.

In fig.8 si mostra l'andamento di  $k_I, k_{II}, k_{III}$  lungo il fronte di frattura per la cricca di maggiore estensione: si può notare la maggiore influenza del II e III modo quando cambia il piano della cricca.

Si è inoltre calcolato il valore del fattore di intensità degli sforzi effettivo utilizzando la definizione di Tanaka (4).

Le prove sperimentali hanno permesso di seguire l'evoluzione superficiale della frattura (fig.9): non si notano punti di discontinuità. Quindi si può ritenere che le variazioni del fattore di intensità degli sforzi non avvengano bruscamente anche se il piano della cricca cambia. Ciò è spiegabile pensando al  $K_{eff}$  definito da Tanaka. In fig. 10 è illustrato

l'andamento di  $k_{eff}$  ( $k_{eff} = \frac{K_{eff}}{\sigma_{nom} \sqrt{\pi a}}$ ) lungo la frattura: si può notare che in prossimità

della superficie libera tali valori sono molto prossimi a  $k_I$  in entrambi i casi, e ciò può spiegare il fatto che non siano state osservate brusche variazioni nella propagazione della frattura. Nella parte interna, invece, la propagazione è governata anche dagli altri modi. In entrambi i casi analizzati i più alti valori di  $k_{eff}$  sono verso la superficie del pezzo, e questo spiega la maggiore velocità di propagazione lungo l'asse maggiore dell'ellisse.

## CONCLUSIONI

Si sono effettuate prove di fatica per studiare la propagazione di cricche per fatica su di un elemento meccanico in stato composto di sollecitazione. Analisi ad elementi finiti hanno permesso di valutare separatamente il contributo dei tre modi di apertura della frattura sulla propagazione a fatica grazie al calcolo di  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$ , ottenuti per estrapolazione. I risultati ottenuti sono stati convalidati dal confronto con i parametri energetici calcolati con piu' accurate procedure numeriche. E' stato cosi' puntualizzato che sulla superficie esterna è lecito considerare solo il I modo di propagazione mentre internamente la propagazione va valutata tenendo presenti i contributi dei tre modi di apertura delle fratture. Alla luce dei risultati ottenuti è possibile affermare che una accurata previsione della velocità di propagazione delle cricche per fatica in organi meccanici di forma complessa ed in condizioni di sforzo multiassiale non può unicamente basarsi sui dati ottenuti da provini standardizzati e relativi al solo modo I ma deve quantitativamente tenere in conto anche  $K_{II}$  ed, eventualmente,  $K_{III}$  mediante la definizione di un fattore effettivo di intensità degli sforzi  $K_{eff}$ . La mancanza di dati relativi a tali condizioni di sollecitazione rende necessario l'impiego di tecniche numeriche.

## RINGRAZIAMENTI

Questo lavoro è stato finanziato con i fondi C.T.91.03068.CT07.

## BIBLIOGRAFIA

1. Paris, P.C., Erdogan, F., - A critical analysis of crack propagation laws. *Journal of Basic Engineering* (Trans. ASME), Ser. D85 (1963), pp. 528-533.
2. Fawkes, A.J., Owen, D.R., Luxmoore, A.R., - An assesment of crack tip singularity models for use with isoparametric elements. *Engineering Fracture Mechanics* 11(1979)1, pp. 143-159.
3. Wu, X.R., Stress intensity factors for half-elliptical surface cracks subjected to complex face loadings. *Engineering Fracture Mechanics* 19(1984)3 , pp.387-405
4. Newman, J.C., Raju, I.S., An empirical stress-intensity factor equation Surface Crack. *Engineering Fracture Mechanics* 15(1981)1-2, No.1-2, pp.185-192.
5. Chen, W-R, Keer, L.M., Fatigue crack growth in mixed mode loading. *Journal of Engineering Materials and Technology* (Trans. ASME), 113(1991), pp.222-227.

6. Tanaka, K., Fatigue crack propagation from a crack inclined to the cyclic tensile axis. *Engineering Fracture Mechanics* 6(1974)1, pp. 493-507.
7. Meguid, S.A., Three-dimensional finite element analysis of circumferentially cracked notched and un-notched cylindrical components. *Engineering Fracture Mechanics* 37(1990)2, pp.361-371.
8. Parks, D., A Stiffness derivative finite element technique for determination of elastic crack tip stress intensity factors. *International Journal of Fracture*, 10(1974), pp.487-502.
9. Barsoum, R.S., On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 10(1976)1, pp.25-37.
10. Henshell, R.D., Shaw, K.G., Crack tip Elements are unnecessary. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 10(1975), pp.495-507.
11. Guagliano, M., Vergani, L., Propagazione di cricche per fatica in stato di sforzo triassiale. IGF7, *Atti del VII Convegno Nazionale Gruppo Italiano Frattura*, pp.139-147.
12. Hartfrant, R.J., Sih, G.C., Stress singularity for a crack with an arbitrarily curved front. *Engineering Fracture Mechanics* 9(1977)3, pp.705-718.
13. Meguid, S.A., *Engineering Fracture Mechanics*. Elsevier Science Publishers LTD, pp.151-158.



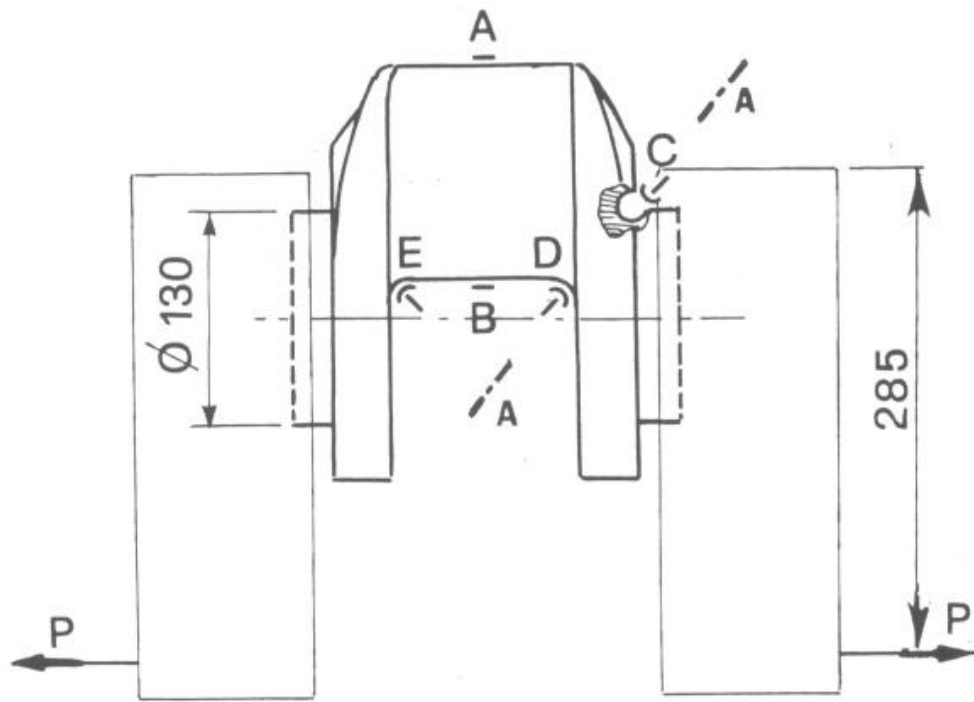


Fig.1. Mappa estensimetrica e modalità di applicazione del carico.

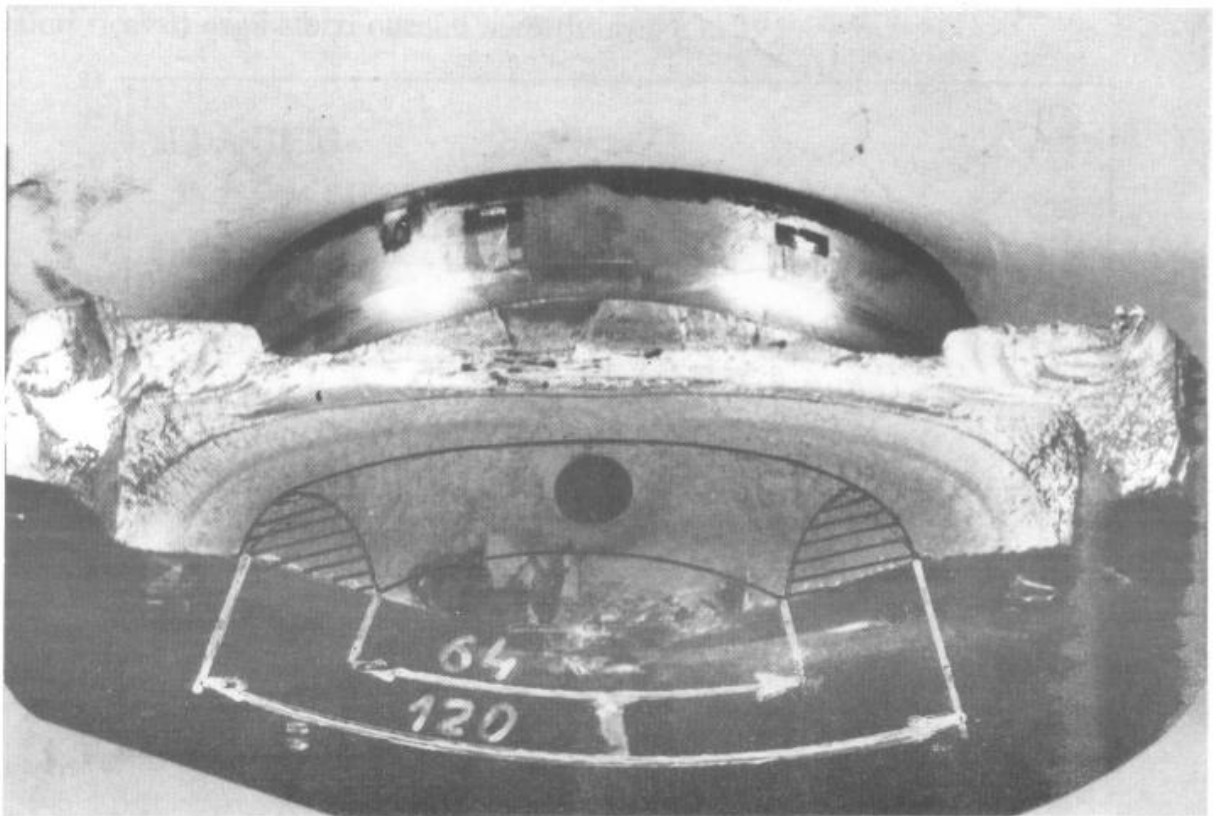


Fig.2. Fotografia della superficie di frattura: sono indicate le differenti dimensioni delle cricche schematizzate ad elementi finiti che giacciono nel piano a  $45^{\circ}$ , tranne la parte tratteggiata, inclinata di  $35^{\circ}$ .

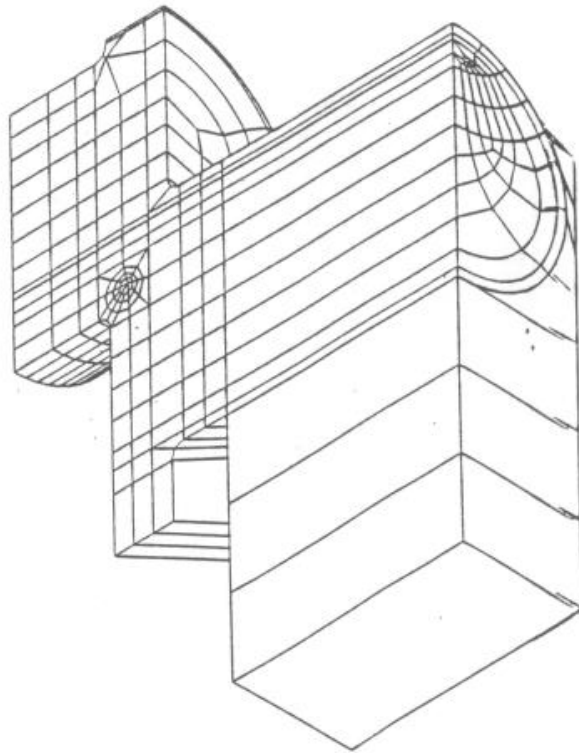


Fig.3. Modello ad elementi finiti dell'albero a gomiti con la cricca piu' corta.

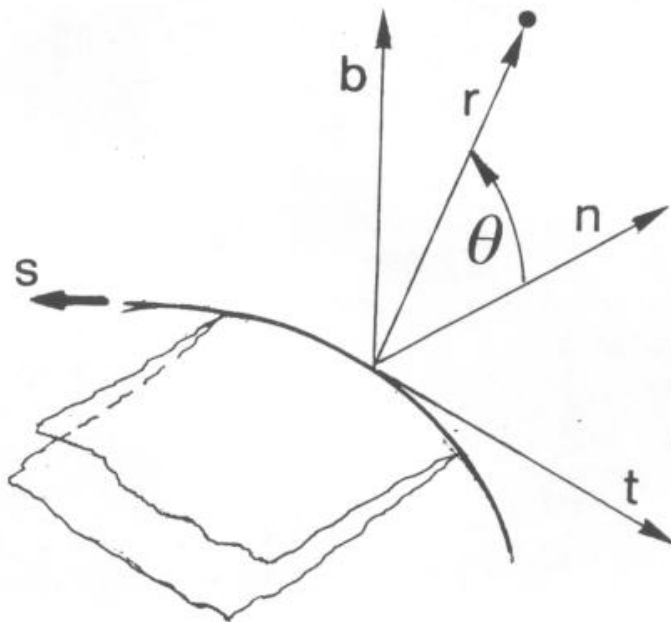


Fig.4. Sistema di coordinate locali sul fronte della frattura.

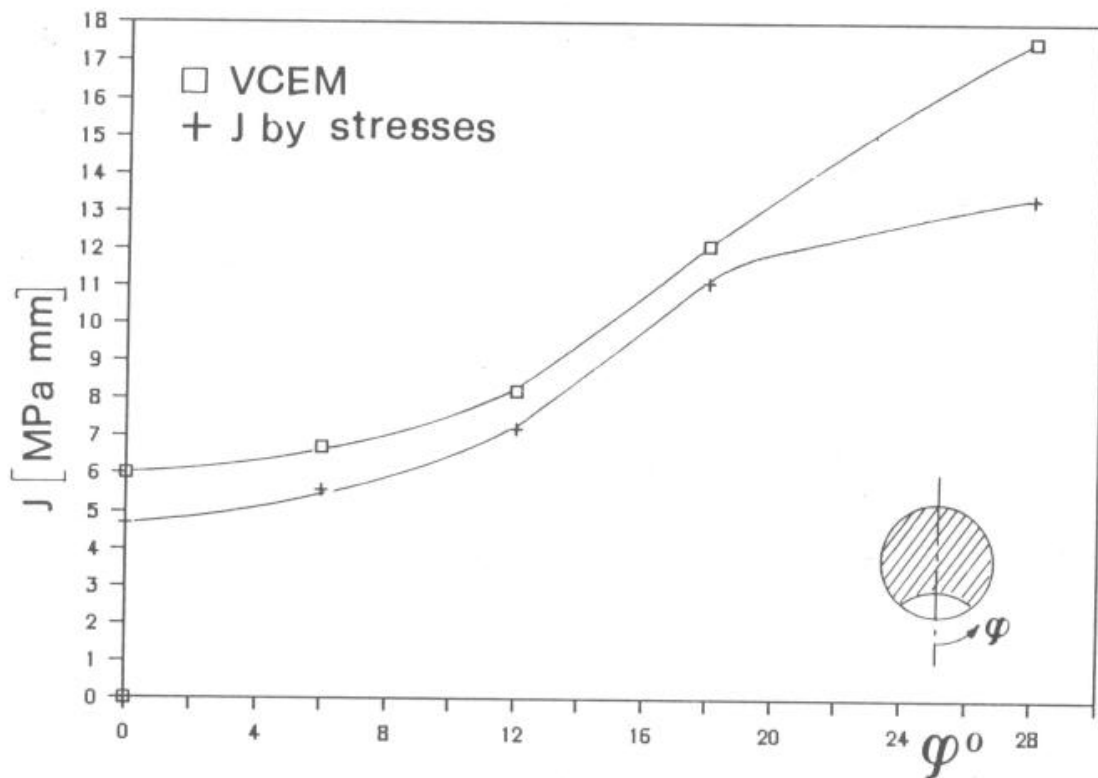


Fig.5. Andamento dell'integrale J lungo il fronte della cricca di estensione minore: □ sono i valori calcolati con la tecnica di estensione virtuale della cricca, + sono invece i valori ricavati dagli sforzi ottenuti numericamente.

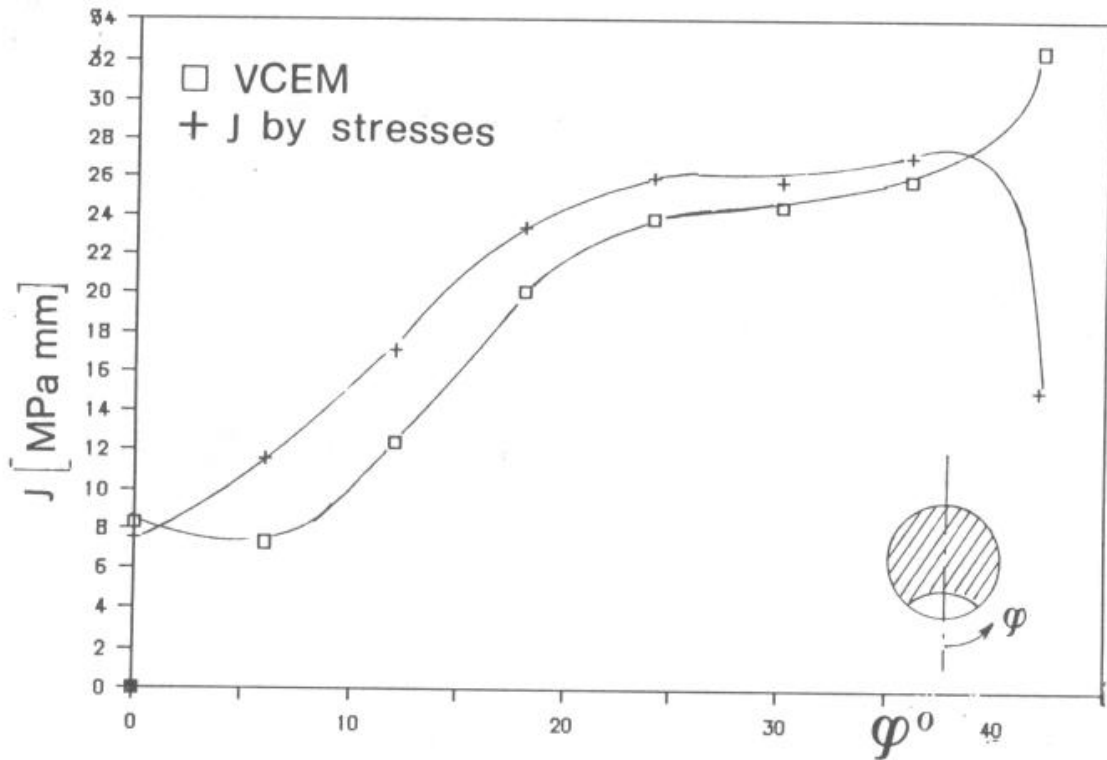


Fig.6. Andamento dell'integrale J lungo il fronte della cricca di estensione maggiore: □ sono i valori calcolati con la tecnica di estensione virtuale della cricca, + sono invece i valori ricavati dagli sforzi ottenuti numericamente.

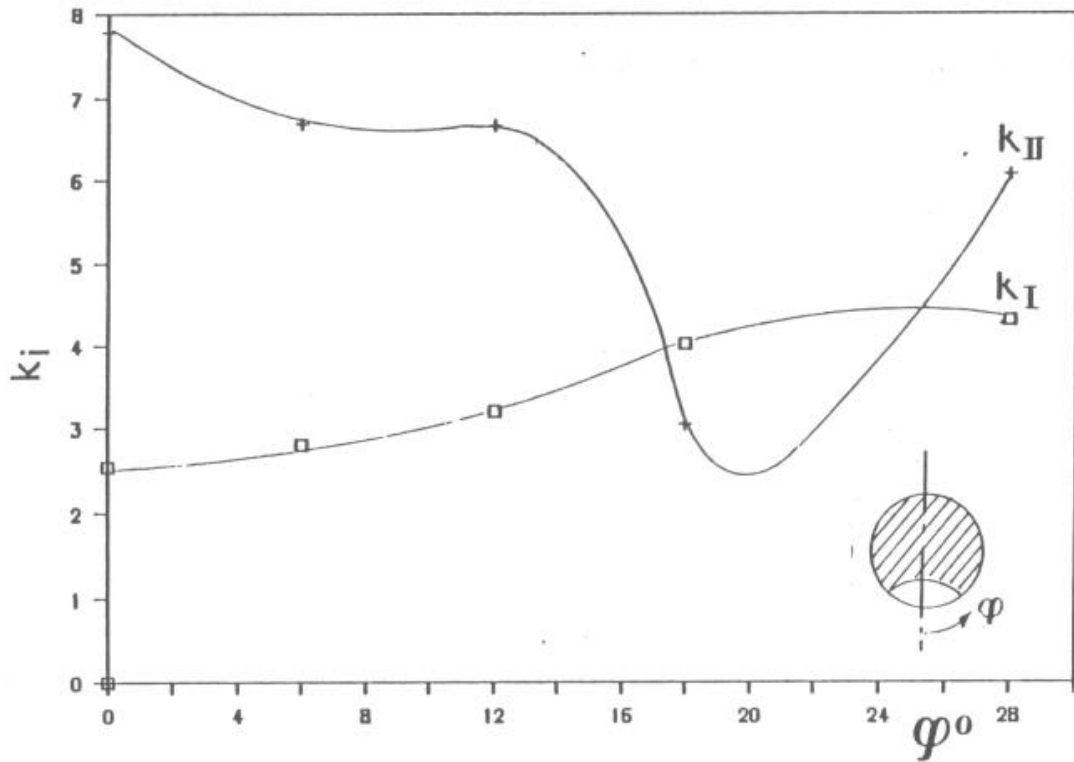


Fig.7. Andamento dei fattori di intensificazione degli sforzi normalizzati lungo il fronte per la cricca di minore estensione.

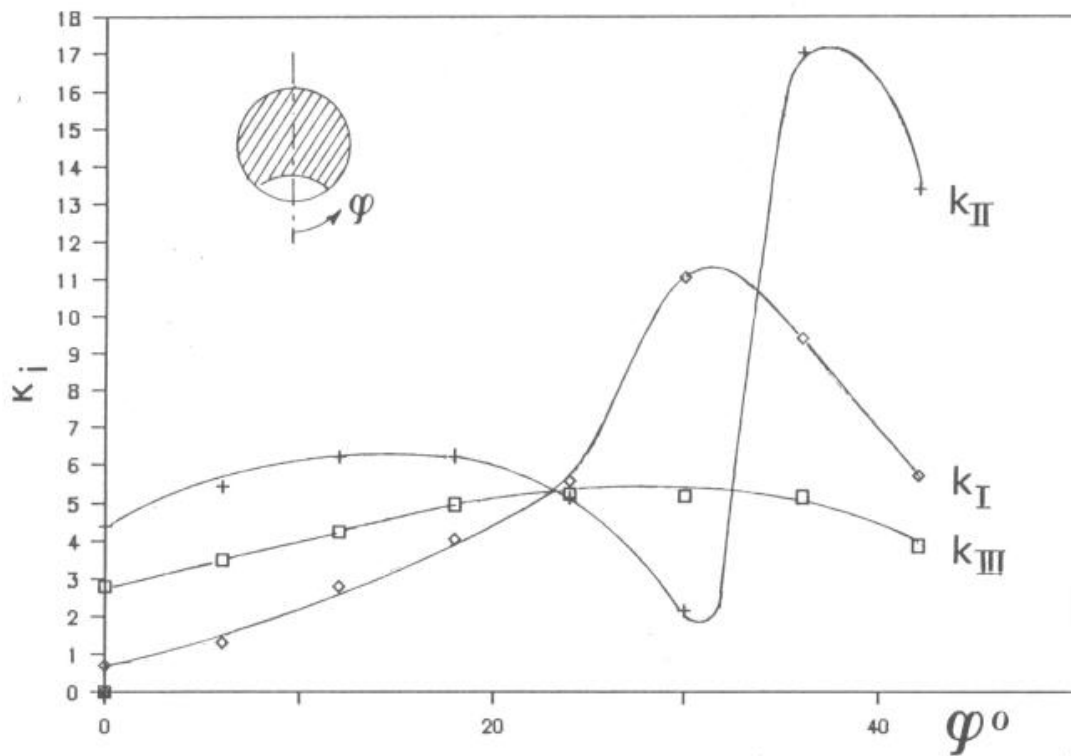


Fig.8. Andamento dei fattori di intensificazione degli sforzi normalizzati lungo il fronte per la cricca di maggiore estensione.

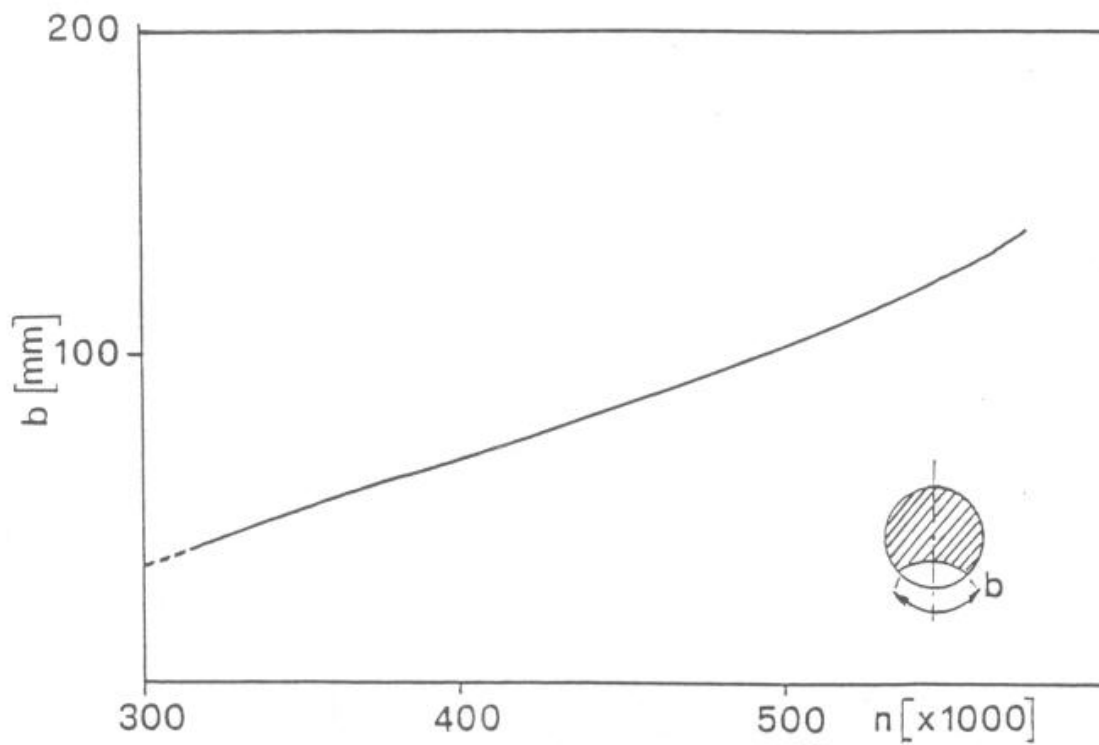


Fig.9. Andamento della propagazione superficiale della cricca in funzione del numero di cicli.

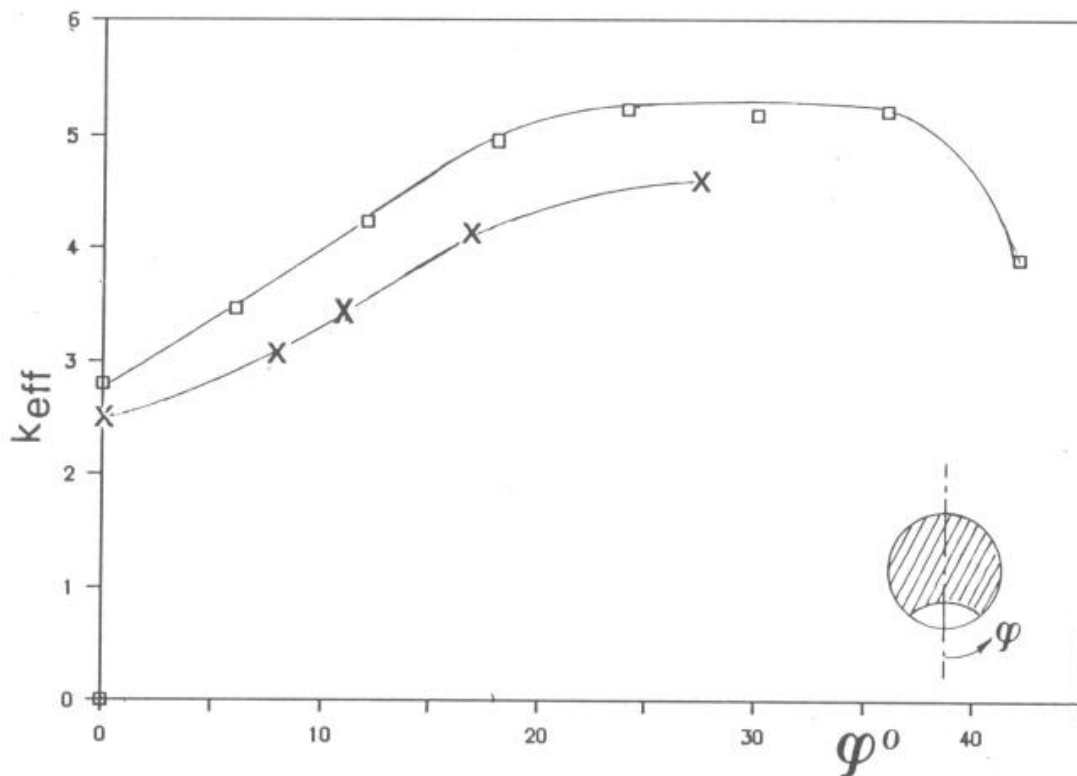


Fig.10. Andamento del fattore di intensificazione degli sforzi effettivo normalizzato:  
 □  $k_{eff}$  per la cricca piu'estesa, X  $k_{eff}$  per la cricca piu' corta.