

IGF6 - VI Convegno Nazionale
GRUPPO ITALIANO FRATTURA
Ancona, 7 - 8 giugno 1990

UN NUOVO METODO NUMERICO PER LA DETERMINAZIONE DI "WEIGHT FUNCTIONS"
IN PROBLEMI BIDIMENSIONALI.

M. Beghini, L. Bertini, E. Vitale

Dipartimento di Costruzioni Meccaniche e Nucleari
Via Diotisalvi, 2 - 56126 Pisa.

SOMMARIO

Il lavoro concerne lo sviluppo di un metodo numerico per la determinazione delle "Weight Function" in problemi bi-dimensionali di meccanica della frattura. Dopo una breve disamina delle più recenti tecniche numeriche, viene proposto un nuovo approccio, basato su calcoli agli Elementi Finiti condotti con "mesh" grossolani e sulla conoscenza di un limitato numero di valori del fattore di intensificazione delle tensioni per una data condizione di carico. La validità del metodo viene dimostrata con riferimento ad un particolare problema teorico, mentre la sua accuratezza ed applicabilità vengono discusse facendo uso di alcune applicazioni numeriche.

INTRODUZIONE

Il metodo della "Weight Function" (WF), introdotto per la prima volta da Bueckner [1] e Rice [2], è stato largamente impiegato nel campo della Meccanica della Frattura Lineare Elastica per la determinazione dei Fattori di Intensificazione delle Tensioni (K) in presenza di condizioni di carico variabili. Infatti, una volta nota la WF per un corpo contenente una fessura di lunghezza 'a', il K può essere valutato con una semplice integrazione su tutta la lunghezza della fessura, facendo uso della sola distribuzione di tensioni ' $\sigma_n(x)$ ' ("tensione nominale") relativa al corpo nel suo stato non fessurato ("iniziale"), soggetto alle stesse condizioni di carico e vincolo. I vantaggi derivanti dall'impiego delle WF divengono particolarmente evidenti in casi in cui si richieda di valutare il K per diverse condizioni di carico o lunghezze di fessura, come in problemi di propagazione di fessure per fatica o per "shock" termico. Nel presente lavoro si farà riferimento al solo modo I di apertura ("Crack opening"), anche se il metodo proposto può essere facilmente esteso al modo II ("Crack sliding"). In geometrie piane, il K può essere valutato con la seguente espressione:

$$K = \int_0^a \sigma(x) \cdot h(x,a) \cdot dx \quad (1)$$

dove $h(x,a)$ è la "Weight Function". La $h(x,a)$ è numericamente uguale al

valore del K nel caso in cui due forze unitarie, agenti in direzione opposta, siano applicate ai labbri della fessura in posizione 'x' ($\sigma_n(x) = \delta(x)$, $\delta(x) = \text{funzione di Dirac}$):

$$\int_0^a h(x', a) \cdot \delta(x) \cdot dx' = h(x, a) \quad (2)$$

Espressioni esatte in forma chiusa della WF sono disponibili solo per casi di fessure dalla geometria semplice inserite in corpi infiniti, mentre la risoluzione di problemi di pratico interesse richiede normalmente l'uso di tecniche numeriche.

Un metodo largamente utilizzato per la valutazione numerica delle WF si basa sull'impiego della Eq. 2 e richiede l'effettuazione di una serie di calcoli, con il metodo degli Elementi Finiti (EF) o degli Elementi di Contorno (EC), del fattore di intensificazione delle tensioni prodotto da coppie di forze unitarie poste in diverse posizioni lungo la fessura [4-6]. Questo metodo può produrre risultati accurati, ma richiede generalmente l'impiego di modelli piuttosto raffinati, contenenti una accurata discretizzazione delle zone attorno all'apice della fessura, l'uso di tecniche per la valutazione del K e l'effettuazione di un numero piuttosto elevato di analisi.

Nel tentativo di semplificare la determinazione delle WF, sono stati proposti diversi metodi approssimati. Molti di questi sono basati sulla relazione seguente, dovuta a Rice [2,7], che correla la WF con il COD ("Crack Opening Displacement"):

$$h(x, a) = \frac{H}{K(a)} \frac{\partial u(x, a)}{\partial a} \quad (3)$$

dove: $u(x, a)$ = spostamento relativo dei bordi della fessura

$H = E$ per il caso di "plane stress"

$E/(1-\mu^2)$ per il caso di "plane strain"

E = modulo di Young

μ = coefficiente di Poisson

La WF può essere ottenuta dalla (3) ove siano note le funzioni 'K(a)' e 'u(x, a)' in almeno una condizione di carico. Mentre la prima di tali funzioni è disponibile per molti casi di pratico interesse, lo stesso non può dirsi per la seconda, che risulta generalmente non nota. Per ovviare a tale inconveniente, Petroski ed Achenbach [8] hanno proposto un metodo approssimato, basato sull'ipotesi che la funzione 'u(x, a)' possa essere espressa come una serie di potenze (limitata ai primi due termini) di (a-x). I primi due coefficienti di tale serie possono essere calcolati dalla conoscenza dell'andamento asintotico in prossimità dell'apice della fessura, dove il campo di spostamenti può essere espresso dalla seguente funzione (del solo K):

$$\lim_{x \rightarrow a} u(x, a) = \frac{4 \cdot K}{H} \left[\frac{(a-x)}{2\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

e dalla condizione di auto-consistenza, che può essere ricavata dalla combinazione delle Eq.ni (1) e (3):

$$K^2 = H \int \sigma_n(x) \cdot \frac{\partial u(x,a)}{\partial a} \cdot dx \quad (5)$$

Il metodo di Petroski-Achenbach richiede la conoscenza della sola funzione 'K(a)' per una condizione di carico di riferimento. Tuttavia esso, in quanto impiega una espansione in serie limitata a due soli termini, fornisce risultati soddisfacenti soltanto se la funzione ' $\sigma_n(x)$ ' non presenta sensibili gradienti lungo la fessura [9-11]. Questo rende difficoltosa l'applicazione del metodo a molti problemi di rilevante interesse pratico, come quello delle fessure originantisi al bordo di fori [12].

Moravietz et al. [13] hanno proposto un metodo, basato sul calcolo della ' $u(x,a)$ ' tramite analisi agli EF, per mezzo del quale la WF può essere ottenuta anche senza la funzione 'K(a)'. Questo metodo presenta restrizioni sulla distribuzione di tensione di riferimento simili a quelle del metodo di Petroski-Achenbach, se applicato facendo uso di modelli agli EF di tipo semplice e privi di una dettagliata discretizzazione dell'apice della fessura, in quanto si rende necessario ipotizzare a priori la forma analitica della funzione ' $u(x,a)$ '. In alcuni lavori recenti, Fett ed i suoi collaboratori hanno esteso il metodo di Petroski-Achenbach utilizzando un numero maggiore di termini nello sviluppo in serie (si veda [14] per una panoramica abbastanza esauriente).

Molti metodi basati su analisi agli EF del campo di spostamenti associato con la presenza di una fessura sono stati applicati per la valutazione numerica delle WF. Tutti questi metodi richiedono una accurata discretizzazione della zona attorno all'apice della fessura [3] e l'impiego di elementi speciali [15,16]. Recentemente il metodo degli EC ha permesso una più efficiente applicazione di queste tecniche a problemi di maggiore complessità, comprendenti sia modi misti di apertura che fessure tri-dimensionali [17-19].

Il metodo presentato nel presente lavoro è basato su alcune proprietà particolari delle WF e non richiede la formulazione di alcuna ipotesi circa la forma della ' $u(x,a)$ '. Esso fa uso di distribuzioni di tensione valutate con mesh EF o EC grossolani, privi di ogni dettaglio dell'apice della fessura, e di un numero molto limitato di valori di K. La WF è espressa come una doppia serie di potenze avente un numero arbitrario di termini, che può essere fissato in modo da ottenere la necessaria accuratezza. Uno dei vantaggi più importanti del metodo è il fatto che esso produce la WF per ogni lunghezza di fessura entro il campo prescelto per l'analisi, e questo risulta particolarmente utile in casi in cui si intenda seguire l'evoluzione di un difetto.

FONDAMENTI TEORICI

Il metodo si basa sull'osservazione che, facendo riferimento all'Eq. (1), il K relativo ad una data lunghezza di fessura può essere valutato sia facendo uso della tensione σ_n relativa al corpo "iniziale" non fessurato, sia impiegando la distribuzione di tensione che si produce in un corpo recante una fessura di lunghezza minore. Si consideri ad esempio il caso di una fessura superficiale di lunghezza 'a' inserita in

un corpo semi-infinito, soggetto ad uno stato uniforme di tensione ' σ_∞ '. In tali condizioni (Fig. 1), lo stato di tensione nominale risulta ovviamente costante su tutta la lunghezza di fessura ($\sigma_n(x) = \sigma_\infty$). Si consideri adesso lo stesso corpo semi-infinito, ma contenente un difetto di dimensione 'b' ($b < a$). Il relativo stato di tensione ' $\sigma(x, b)$ ' è nullo per $0 < x < b$ e presenta una singolarità del tipo $1/\sqrt{(x-b)}$ per $x \rightarrow b$. L'applicazione della Eq. (1), sia al caso del corpo "iniziale" non fessurato, che a quello del corpo fessurato, permette di ricavare la seguente relazione:

$$\int_b^a \sigma(x, b) \cdot h(x, a) \cdot dx = \int_0^a \sigma(x, 0) \cdot h(x, a) \cdot dx \quad (6)$$

valida per qualsiasi valore di b minore di a.

La validità dell'Eq. (5) può essere facilmente verificata per il caso di un corpo infinito contenente una fessura di lunghezza '2a' e soggetto ad uno stato uniforme di tensione ' σ_∞ '. In questo caso sono infatti disponibili, sia per la WF che per la distribuzione di tensione all'apice del difetto, le seguenti espressioni analitiche:

$$\sigma(x, b) = \frac{\sigma_\infty \cdot x}{\sqrt{x^2 - b^2}} \quad ; \quad h(x, a) = 2 \cdot \left[\frac{a}{\pi \cdot (a^2 - x^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

Sostituendo le (7) nella (6) ed integrando si ottiene facilmente:

$$2 \cdot \int_b^a \frac{\sigma_\infty \cdot x}{\sqrt{x^2 - b^2}} \cdot \left[\frac{a}{\pi \cdot (a^2 - x^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot dx = \sigma_\infty \sqrt{\pi a} \quad (8)$$

Disponendo della distribuzione di tensione in un corpo fessurato per un certo numero di lunghezze di fessura ' a_k ' ($k=1 \div N_a$), per ciascuna di esse e per ogni lunghezza di fessura ' b_k ' ($b = a_m, m < k$) disponibile è possibile scrivere una equazione del tipo (6). Assumendo una opportuna espressione matematica generale per la WF (ad esempio una espansione in serie) tali equazioni possono essere combinate per formare un sistema avente per incognite i coefficienti dell'espressione stessa.

Equazioni addizionali possono poi essere ottenute dalla conoscenza di alcuni valori di $K(a)$, sia da espressioni in forma chiusa che da calcoli di tipo numerico.

La soluzione del sistema permette la valutazione della WF per l'intero insieme di fessure aventi lunghezza minore od uguale ad ' a_{Na} '.

L'espressione della funzione $\sigma(x, b)$, necessaria per la valutazione degli integrali presenti nella Eq. (6), è stata ottenuta nel presente lavoro combinando i risultati di analisi agli EF condotte con "mesh" grossolani, con il comportamento asintotico della tensione in prossimità dell'apice della fessura, che dipende solo dal valore di ' $K(b)$ '.

Le tecniche matematiche utilizzate per la pratica applicazione del metodo sono presentate in maggiore dettaglio nel paragrafo seguente. Esso è stato sinora sviluppato sotto le seguenti ipotesi: Modo I di apertura in corpi piani, fessure interne in posizione simmetrica con carichi simmetrici oppure fessure superficiali. Tali assunzioni non limitano tuttavia la generalità del metodo, che può essere facilmente

esteso per coprire altri casi.

FORMULAZIONE MATEMATICA

Per lo studio del caso del corpo piano recante una fessura superficiale (Fig. 1) è stata assunta la seguente espressione generale per la WF:

$$\begin{aligned}
 h(x,a) &= \left[\frac{2}{\pi \cdot (a-x)} \right]^{\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} \cdot a^{i-1} \cdot (1-x/a)^{(j-1)/p} = \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} \cdot F_{ij}(x,a)
 \end{aligned} \tag{9}$$

dove 'n' ed 'm' sono i numeri di termini della doppia serie di potenze e 'p' può assumersi pari a 1 o 2 allo scopo di produrre due distinte sequenze per gli esponenti dei termini in $(1-x/a)$. Il valore di alcuni dei coefficienti ' α_{ij} ' può essere fissato in modo da soddisfare le seguenti condizioni ai limiti:

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x,a) = \left[\frac{2}{\pi \cdot (a-x)} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{10}$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} h(x,a) = \left[\frac{2}{\pi \cdot (a-x)} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[1 + \mu_{10} \cdot (1-x/a) + \mu_{20} \cdot (1-x/a)^2 \right] \tag{11}$$

le quali richiedono rispettivamente che, per 'x' che tende ad 'a', la WF assuma la forma tipica di una fessura in un corpo infinito e che, allorché la lunghezza della fessura diventa molto piccola, essa venga a coincidere con la WF di una fessura superficiale in un corpo semi-infinito, ottenuta da Bueckner [21] (vedi Appendice).

Sostituendo 'h(x,a)' ricavato dall'Eq. (9) nelle (10) ed (11):

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x,a) = \sum_{i=1}^n \alpha_{i1} \cdot a^{i-1} = 1 \tag{12}$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} h(x,a) = \sum_{j=1}^m \alpha_{1j} \cdot (1-x/a)^{(j-1)/p} = 1 + \mu_{10} \cdot (1-x/a) + \mu_{20} \cdot (1-x/a)^2. \tag{13}$$

Per poter soddisfare le Eq.ni (12) e (13), rispettivamente per ogni lunghezza 'a' di fessura e per ogni 'x', si richiede che:

$$\alpha_{11} = 1; \quad \alpha_{i1} = 0 \quad [i = 2, 3, \dots, n] \tag{14}$$

$$\alpha_{1,p+1} = \mu_{10}; \quad \alpha_{1,2p+1} = \mu_{20}; \quad \alpha_{1,j} = 0 \quad [j \neq p+1, 2p+1] \quad (15)$$

Combinando le Eq.ni (6) e (9) si ottiene poi la seguente relazione:

$$\int_b^a \sigma(x,b) \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} \cdot F_{ij}(x,a) dx = \int_0^a \sigma(x,0) \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} \cdot F_{ij}(x,a) dx \quad (16)$$

che può scriversi nella forma seguente:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} \cdot C_{ij}(a,b) = 0 \quad (17)$$

dove:

$$C_{ij}(a,b) = \int_b^a \sigma(x,b) \cdot F_{ij}(x,a) \cdot dx - \int_0^a \sigma(x,0) \cdot F_{ij}(x,a) \cdot dx \quad (18)$$

La distribuzione di tensioni ' $\sigma(x,0)$ ' può essere generalmente ottenuta in modo agevole per mezzo di considerazioni legate alla teoria dell'elasticità, oppure, per corpi di forma più complessa, tramite semplici analisi numeriche agli EF. La ' $\sigma(x,b)$ ', che presenta una singolarità, non può invece essere ottenuta tramite analisi agli EF condotte con "mesh" grossolani. Pertanto, allo scopo di valutare il primo degli integrali contenuti nella Eq. (18), il campo di tensioni fornito dagli EF è stato sostituito, in prossimità dell'apice della fessura, con l'andamento asintotico teorico (vedi Fig.2), che dipende dal solo valore di ' $K(b)$ ':

$$\sigma(x,b) = \begin{cases} \sigma_{FE} \text{ (given by FE)} & \text{for } x > x_* \\ K(b) \cdot [2 \cdot \pi \cdot (x-b)]^{-\frac{1}{2}} & \text{for } x < x_* \end{cases} \quad (19)$$

dove ' x_* ' è l'ascissa del punto di intersezione tra l'andamento della tensione valutato con gli EF e quello asintotico. Sulla base di tale ipotesi, può derivarsi la seguente relazione:

$$\begin{aligned} & \int_b^a \sigma(x,b) \cdot F_{ij}(x,a) \cdot dx = \\ & = \int_b^{x_*} \frac{K(b)}{[2 \cdot \pi \cdot (x-b)]^{\frac{1}{2}}} \cdot F_{ij}(x,a) \cdot dx + \int_{x_*}^a \sigma_{FE}(x,b) \cdot F_{ij}(x,a) \cdot dx \end{aligned} \quad (20)$$

Gli integrali contenuti nelle Eq.ni (13) e (15) possono a questo punto essere valutati in modo piuttosto semplice, sia per via numerica che, sotto alcune ipotesi semplificative (es. approssimando la variazione della tensione con la coordinata ' x ' tramite una spezzata), in forma chiusa (esatta), almeno per $j \leq 5$.

TECNICHE RISOLUTIVE

Il primo passo della soluzione consiste nella valutazione del campo di tensioni agente nel corpo "iniziale" non fessurato per una condizione di carico di riferimento. In seguito, per una data geometria di fessura, vengono condotte una serie di analisi agli EF per N_a fessure di lunghezza crescente, allo scopo di ottenere le relative distribuzioni di tensioni σ_{FE} . Per ciascuna di tali fessure di lunghezza $a = a_f$ ($2 \leq f \leq N_a$) e per ciascun valore $b = a_g$ ($1 \leq g \leq f$), può scriversi una Eq. del tipo (17). Questo permette di ottenere un insieme di $(N_a - 1) \cdot N_a / 2$ equazioni:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} \cdot C_{ij}(a_f, a_g, K(a_g)) = 0 \quad (21a)$$

che, unitamente alle condizioni ottenute dall'Eq. (1):

$$K(a_g) = \int_0^{a_g} \sigma(x, 0) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} \cdot F_{ij} \cdot dx \quad (21b)$$

formano un sistema nelle incognite α_{ij} ($i, j > 1$).

E' da notare come il valore dei coefficienti C_{ij} nella Eq. (21a) dipenda da quello di $K(a_g)$, che può essere esso stesso incognito; infatti, per quanto concerne la funzione $K(b)$, possono darsi due situazioni:

- 1) il valore di K è disponibile per ciascuna delle lunghezze a_f , sia tramite soluzioni teoriche che numeriche;
- 2) il valore di K è noto solo per alcune delle lunghezze a_f , generalmente tramite calcoli numerici.

Nel primo caso, le Eq.ni (21) formano un sistema lineare nelle incognite α_{ij} . Tale sistema, avendo generalmente un numero di equazioni superiore a quello delle incognite, deve essere risolto tramite appropriate tecniche di regressione, come ad esempio il "normal equation method".

Nel secondo caso, alcuni dei valori di $K(a_g)$ sono incogniti e, pertanto, vengono valutati nel corso della soluzione. Questa situazione viene discussa in maggiore dettaglio, a causa della sua maggiore generalità ed in quanto può permettere l'ottenimento della WF con un numero ridotto di valutazioni di K , solitamente piuttosto costose. In questo caso, il sistema (21) non è più lineare, poiché i coefficienti C_{ij} dipendono dai valori (incogniti) di $K(a_g)$, che, a sua volta, dipende dagli α_{ij} . Di conseguenza, il sistema (21) deve essere trattato con una tecnica di soluzione non lineare.

Nell'ambito di questo lavoro è stato usato un algoritmo di soluzione iterativo che implica i seguenti passi:

- a) i valori degli α_{ij} vengono inizializzati in base a qualche soluzione nota (ad es. fessura in corpo infinito)
- b) i valori incogniti K vengono calcolati tramite l'Eq. (21b)
- c) i C_{ij} vengono calcolati per mezzo delle Eq.ni (19) e (20)

d) il sistema formato dalle Eq.ni (21a) e da quelle tra le Eq.ni (21b) che corrispondono ad un valore noto di K , viene risolto per gli ' a_{ij} ' con il "normal equation method".

I punti da b) a d) vengono ripetuti fino a che le variazioni degli ' a_{ij} ' e dei valori di ' K ' tra iterazioni successive diventano sufficientemente piccole. La procedura può essere messa in atto, anche su un "personal computer", tramite un programma che utilizzi come dati di ingresso i risultati di una analisi agli EF di tipo "coarse mesh".

APPLICAZIONI E DISCUSSIONE

Il metodo proposto è stato applicato per valutare la WF in due geometrie per le quali si conoscono le soluzioni teoriche: il caso della fessura laterale in una lastra di larghezza finita (Fig. 3a) ed il caso dell'insieme periodico di fessure collineari ed equispaziate in un corpo infinito (Fig. 3b).

Per queste applicazioni è stato usato un modello agli EF (Fig. 4) particolarmente semplice e grossolano al fine di dimostrare la capacità del metodo di fornire una determinazione della WF in modo molto economico.

Il "mesh" è stato realizzato con elementi quadrilateri a quattro nodi di tipo "plane stress", con condizioni al contorno opportune per i due casi. Il numero totale di gradi di libertà era approssimativamente 850. La presenza della fessura è stata simulata svincolando i nodi compresi nella sua lunghezza; non sono stati usati elementi speciali all'apice.

Nel caso della fessura laterale sono state analizzate lunghezze fino ad $a/W=0.7$ con un passo costante pari a $0.05W$. Si è supposto di conoscere i valori di ' K ' per quattro posizioni dell'apice della fessura ($N_k=4$), equispaziate all'interno del campo di indagine. Per questo caso, i parametri ' n ', ' m ' e ' p ' nell'Eq. (9) sono stati assunti uguali a 4, 5 e 2 rispettivamente e sono state imposte le due condizioni asintotiche (14) e (15). I coefficienti della serie di potenze ottenuti sono riportati in Tab. 1, mentre la Fig. 5 mostra i valori di ' K ' calcolati a confronto con le corrispondenti soluzioni teoriche (vedi Appendice e [21]) e con la soluzione della fessura in un corpo infinito. L'accordo è buono in tutto il campo analizzato.

La Fig. 6 riporta il confronto delle WF valutate in base al metodo proposto con quelle teoriche ricavate da Bueckner [21] per due lunghezze di fessura. L'accordo è ancora soddisfacente, con errori massimi inferiori al 7%.

E' stata effettuata una analisi tesa a determinare l'effetto di alcuni parametri sulla accuratezza della soluzione. L'effetto del numero di termini ' n ' è mostrato in Fig. 7, dove sono stati assunti quattro valori noti di ' K ' in posizioni equispaziate. L'effetto del numero ' N_k ' di valori imposti di ' K ' (assunti sempre equispaziate) è mostrato in Fig. 8, dove le soluzioni numeriche sono calcolate con $n=N_k$. In base a questa analisi, si possono dedurre le seguenti conclusioni generali:

a) N_k dovrebbe essere scelto abbastanza grande da definire il percorso della curva ' $K(a)$ ' per la condizione di carico di riferimento. Per molti problemi di pratico interesse, quando deve essere considerato un ampio campo di lunghezze di fessura, può risultare adeguata la scelta di una curva cubica con quattro valori imposti di ' K ', mentre valori di ' N_k ' da due a tre possono essere sufficienti per campi non

- molto estesi. L'accuratezza può essere alquanto migliorata da una scelta delle posizioni appropriata al caso in esame, concentrando i valori imposti in corrispondenza delle zone in cui la curva 'K(a)' ha i massimi gradienti. Una volta che la curva 'K(a)' è stata descritta da un numero appropriato di valori imposti, un ulteriore incremento di 'N_k' non ha significativi effetti sulla soluzione.
- b) Il numero di termini 'n' deve essere scelto in relazione al numero di valori di 'K' imposti ('N_k'); un miglioramento dell'accuratezza è ottenuto aumentando 'n' fino ad (N_k+1), mentre per 'n' maggiore di (N_k+1) la procedura numerica tende a diventare instabile.
 - c) Il numero di termini 'm' deve essere fissato sulla base del numero 'N_a' delle fessure analizzate, al fine di assicurare la ridondanza del sistema (21).

Nel caso dell'insieme periodico di fessure, sono state analizzate lunghezze di fessura fino ad $a/W=0.9$, usando lo stesso passo pari a $0.05W$. Per questo problema sono state imposte soltanto le condizioni asintotiche (14), non essendo più applicabili le condizioni (15). I valori scelti per i parametri 'n', 'm' e 'p' sono stati, rispettivamente, 4, 4 e 2. Sono stati assunti quattro valori di 'K' in posizioni equispaziate. I coefficienti ' α_{ij} ' calcolati sono riportati in Tab. 2, mentre i valori di 'K' in funzione della lunghezza di fessura sono posti a confronto nella Fig. 9 con le soluzioni teoriche. Le WF per due lunghezze di fessura sono mostrate in Fig. 10. Anche in questo caso si osserva un accordo soddisfacente con le soluzioni esatte (errori minori del 5%), sebbene la serie di potenze (5) non sia particolarmente adatta a riprodurre la tipica forma simmetrica assunta dalla WF in presenza di carichi simmetrici.

L'accordo tra i risultati numerici e teorici mostrati nelle Figg. 6 e 10 indica che le WF calcolate con il metodo proposto sono suscettibili di fornire risultati soddisfacenti anche per condizioni di carico diverse da quelle prese a riferimento per la valutazione dei coefficienti (tensione uniforme). Al fine di verificare la veridicità questa affermazione per tutto il campo di lunghezze di fessura esaminato, sono state considerate tre diverse condizioni nominali di carico: variazioni di tensione lineare, sinusoidale e cosinusoidale. Il confronto tra i valori di 'K' numerici e teorici corrispondenti alle tre condizioni di carico è mostrato in Fig. 11, per entrambe le geometrie e per l'intero campo di lunghezze di fessura. Si può osservare che, anche in questo caso, l'errore massimo è inferiore al 5%.

CONCLUSIONI

Nel lavoro è stata proposta ed applicata una procedura per la valutazione numerica delle WF in problemi piani. Il metodo permette la valutazione delle WF tramite i risultati di analisi agli EF "coarse mesh" e facendo uso di alcuni valori di 'K' per una condizione di carico di riferimento. Non è richiesta alcuna ipotesi sulla forma della WF, che si assume espressa da una serie di potenze di forma piuttosto generale. La WF viene ottenuta direttamente per ogni fessura compresa nel campo di lunghezze analizzato.

Il metodo è stato applicato alla soluzione di due problemi per i quali erano disponibili delle WF valutate indipendentemente da altri autori. I necessari calcoli agli EF e la successiva elaborazione sono

stati condotti su di un semplice "personal computer" in poche ore di CPU. I risultati hanno mostrato un soddisfacente accordo con le soluzioni teoriche, per quanto riguarda sia la forma della WF, che quella della funzione 'K(a)'. Nei casi analizzati, si sono osservati errori nella valutazione del 'K' inferiori al 7%, valore che può essere ritenuto adeguato per molti casi di pratico interesse.

Ringraziamenti

Nel lavoro si è fatto uso di una subroutine tratta dalla "Harwell Library" per la soluzione del sistema lineare ridondante tramite il metodo "normal equation". Gli autori desiderano ringraziare i Proff. C. Carmignani ed E. Manfredi per le utili discussioni e suggerimenti.

APPENDICE

Sesondo l'analisi condotta da Bueckner [21], per una fessura superficiale di lunghezza 'a' inserita in una lastra di larghezza 'W', si può assumere la seguente forma per la WF:

$$h(x,a) = \left[\frac{2}{\pi \cdot (a-x)} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[1 + m_1 \cdot (1-x/a) + m_2 \cdot (1-x/a)^2 \right] \quad (A1)$$

Ponendo $\epsilon = a/W$, valgono le seguenti espressioni per i coefficienti 'm_i':

$$\begin{aligned} m_1 &= \mu_{10} + \mu_{11} \epsilon^2 + \mu_{13} \epsilon^6 = 0.6147 + 17.1844 \cdot \epsilon^2 + 8.7822 \cdot \epsilon^6 \\ m_2 &= \mu_{20} + \mu_{21} \epsilon^2 + \mu_{23} \epsilon^6 = 0.2502 + 3.2889 \cdot \epsilon^2 + 70.0444 \cdot \epsilon^6 \end{aligned} \quad (A2)$$

BIBLIOGRAFIA

1. H.F.Bueckner, 'A Novel Principle for the Computation of Stress Intensity Factors', Zeitschrift, fur Angewandte Mathematik und Mechanik 50, 529-546 (1970).
2. J.R.Rice, 'Some Remarks on Elastic Crack Tip Stress Fields', Int.J.of Solid & Struc. 8, 751-758 (1972).
3. P.C.Paris, R.M.McMeeking and H.Tada, 'The Weight Function Method for Determining Stress Intensity Factors', ASTM STP 601, 471-489 (1976).
4. R.C.Labbens, J.Heliot and A.Pellissier-Tanon, 'Weight Function for Three Dimensional Symmetrical Crack Problems', ASTM STP 601, 448-470 (1976).
5. M.Beghini and L.Bertini, 'Analytical and Numerical Evaluation of Residual Stress Effects on Fatigue Crack Propagation', Computer & Experiments in Stress Analysis, Springer-Verlag, (187-197), 1989.
6. M.Beghini and E.Vitale, 'Analysis of cracked plates subjected to thermal shock loadings', Proc. of 9th Conf. of Italian Society Theoretical and Applied Mechanics, AIMETA, Bari, (1988) 181-184, (in italian).
7. X.R.Wu and J.Carlsson, 'The generalized weight function method for crack problems with mixed boundary conditions', J. Mech. Phys.

- Solids 31, 485-497 (1983).
8. H.J.Petroski and J.D.Achenbach, 'Computation of the Weight function from a Stress Intensity Factor', *Eng.Fract.Mech.* 10, 257-266 (1978).
 9. F.Gorner, C.Mattheck and P.Morawietz, 'Limitations of the Petroski-Achenbach crack opening displacement approximation for the calculation of weight function', *Eng.Fract.Mech.* 22, 269-277 (1985).
 10. X.Niu and G.Glinka, 'On the "limitations of the Petroski-Achenbach crack opening Displacement approximation for the calculation of Weight Function" - do they really exist?', *Eng.Fract.Mech.* 26, 701-706 (1987).
 11. T.Fett, 'Limitations of the Petroski-Achenbach Procedure Demonstrated for a Simple Load Case', *Eng.Fract.Mech.* 29, 713-716 (1988).
 12. T.G.Sha and C.T.Yang, 'Weight Functions of radial cracks emanating from a circular hole in a plate', *ASTM STP 905*, 573-600 (1986).
 13. P.Morawietz, C.Mattheck and D.Munz, 'Calculation of Approximate Weight Functions in Fracture Mechanics by FEM', *Int.J.Num.Meth.Eng.* 21, 1487-1497 (1985).
 14. T.Fett, C.Mattheck and D.Munz, 'Approximate Weight Function for 2D and 3D problems', *Eng.Analysis with Boundary Elements* 6, 48-63 (1989).
 15. T.G.Sha, 'Stiffness derivative finite element technique to determine nodal weight functions with singularity elements', *Eng.Fract.Mech.* 19, 685-699 (1984).
 16. T.L.Sham, 'A unified finite element method for determining weight functions in two and three dimensions', *Int. J. Solids Structures* 23, 1357-1372 (1987).
 17. M.H.Aliabadi, D.P.Rooke and D.J.Cartwright, 'Mixed-mode Bueckner weight functions using boundary element analysis' *Int. J. Fracture* 34, 131-147 (1987).
 18. H.Rajiah and S.N.Alturi, 'Evaluation of K-factor and weight functions for 2-D mixed-mode multiple cracks by the boundary element alternating method', *Eng.Fract.Mech.* 32, 911-922 (1989).
 19. D.P.Rooke and M.H.Aliabadi, 'Weight Functions for Crack Problems Using Boundary Element Analysis', *Eng.Analysis with Boundary Elements* 6, 19-29 (1989).
 20. M.K.Kanninen and C.H.Popelar, Advanced fracture mechanics, Oxford Engineering Science Series (1985).
 21. H.F.Bueckner, 'Field singularities and related integral representations', Mechanics of Fracture I - Methods of Analysis and Solution of Crack Problems, (Ed. G.C.Sih), Nordhoff Int. Leyden (1979).

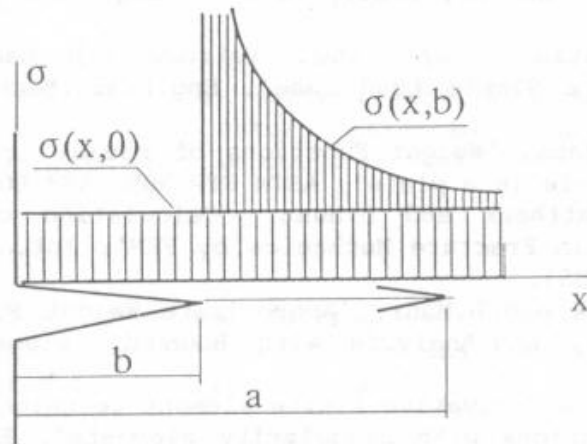


Fig. 1 - Geometrie di fessura e distribuzioni di tensione.

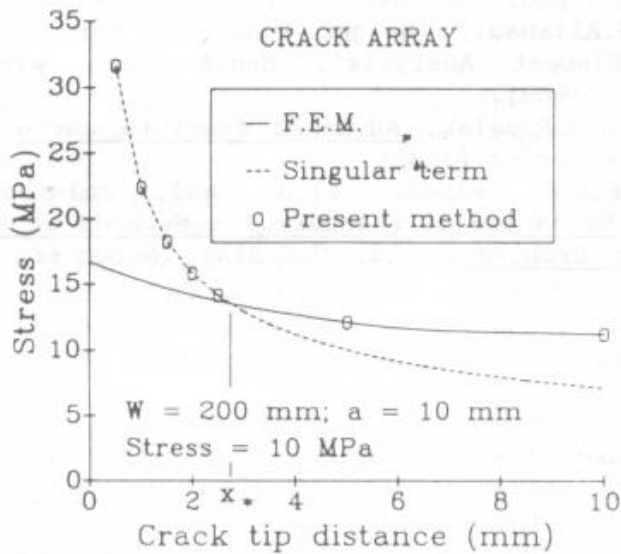


Fig. 2 - Distribuzione di tensione all'apice della fessura utilizzata per il calcolo della WF.

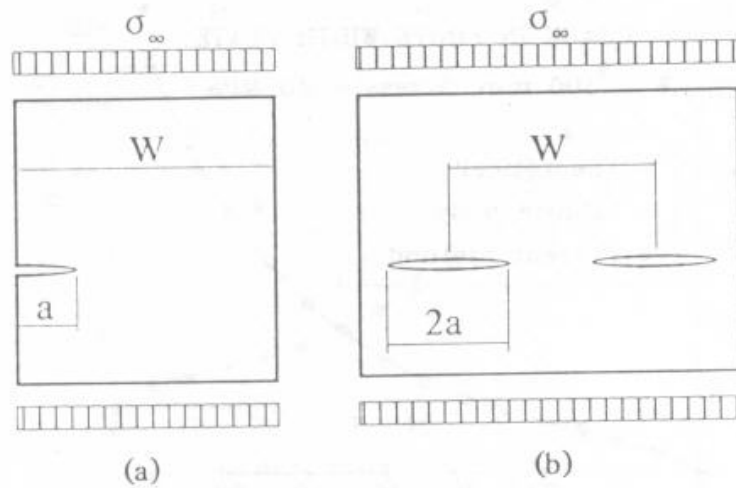


Fig. 3 - Schemi dei problemi analizzati:
 (a) fessura superficiale in lastra di larghezza $W=100$ mm ("Edge crack");
 (b) insieme periodico (passo $W=100$ mm) di fessure equispaziate in corpo infinito ("Crack array").

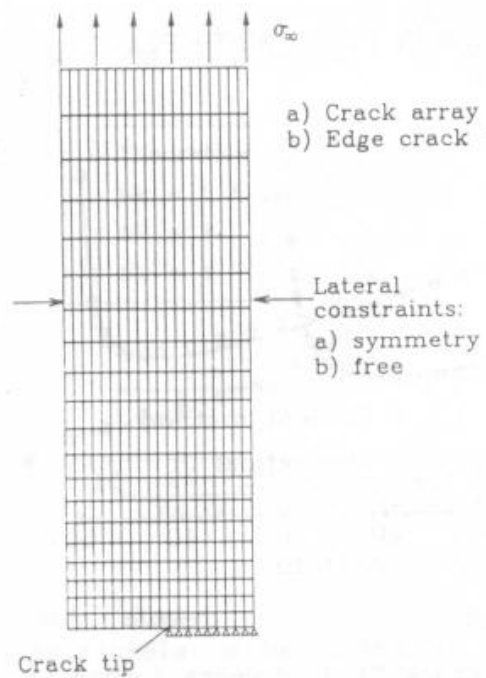


Fig. 4 - Modello agli Elementi Finiti utilizzato per l'analisi.

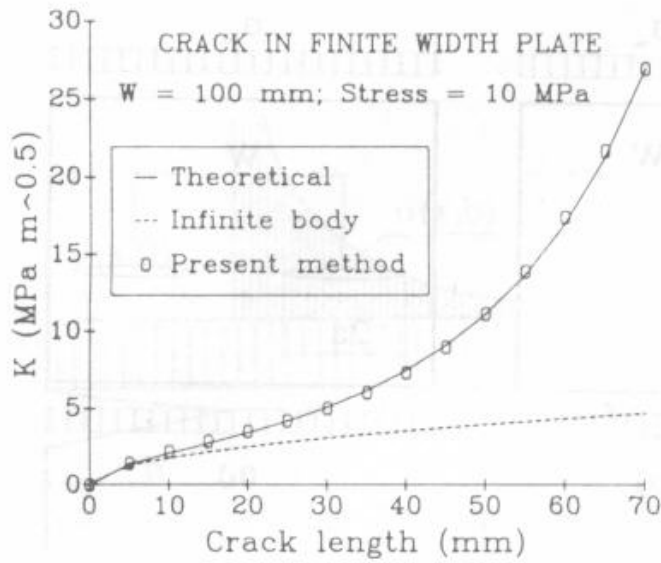


Fig. 5 - Andamento di $K(a)$ per la fessura superficiale in lastra di larghezza finita ("Edge crack").

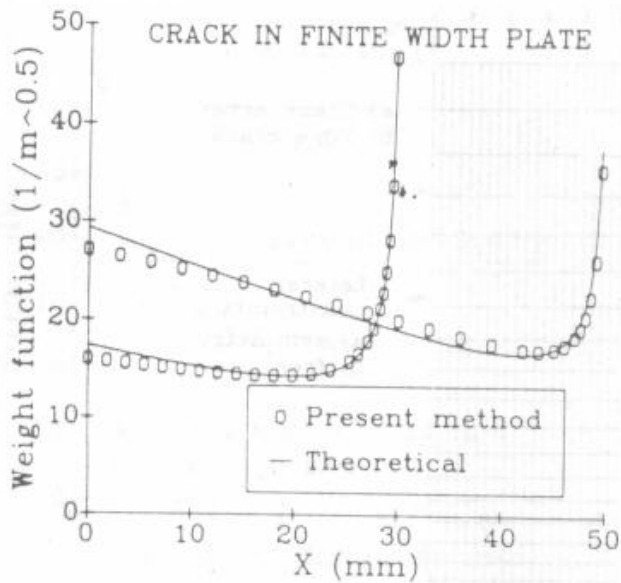


Fig. 6 - WF per due ("Edge cracks") di diversa lunghezza.

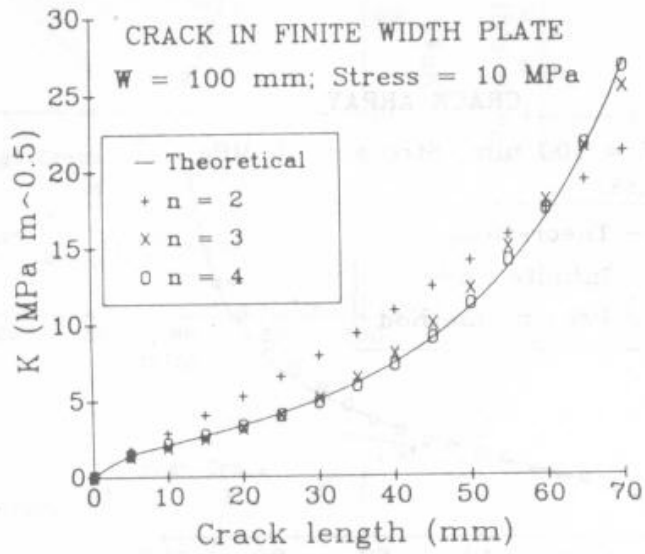


Fig. 7 - Effetto del numero 'n' di termini della serie di potenze per il caso della fessura superficiale nella lastra di larghezza finita ("Edge crack").

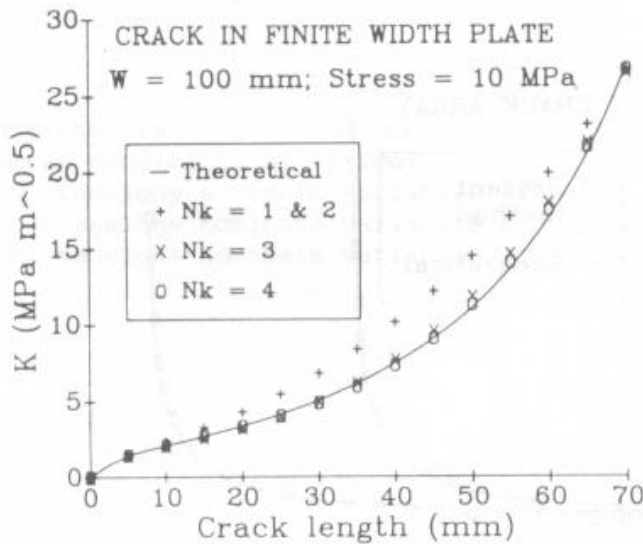


Fig. 8 - Effetto del numero di valori imposti di K nel caso della fessura superficiale nella lastra di larghezza finita ("Edge crack").

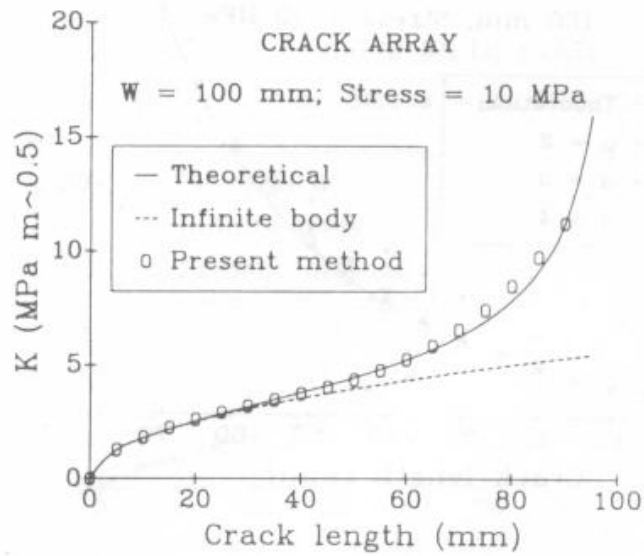


Fig. 9 - Andamento di $K(\dot{a})$ per l'insieme periodico di fessure in corpo infinito ("Crack array").

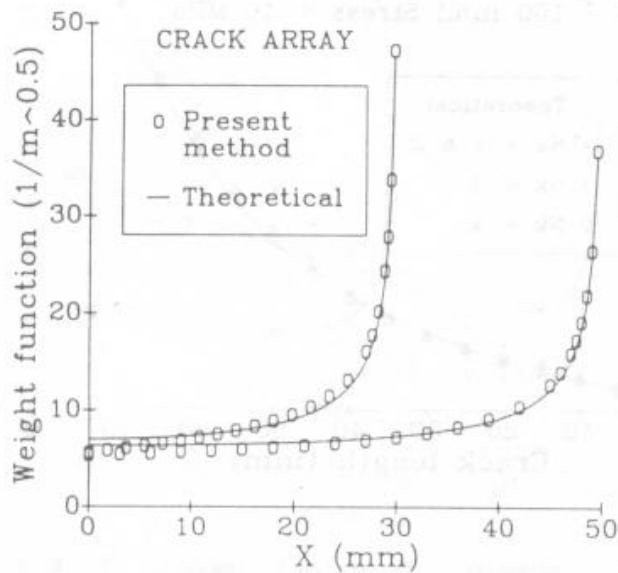


Fig. 10 - WF per due insiemi periodici di fessure di diversa lunghezza.

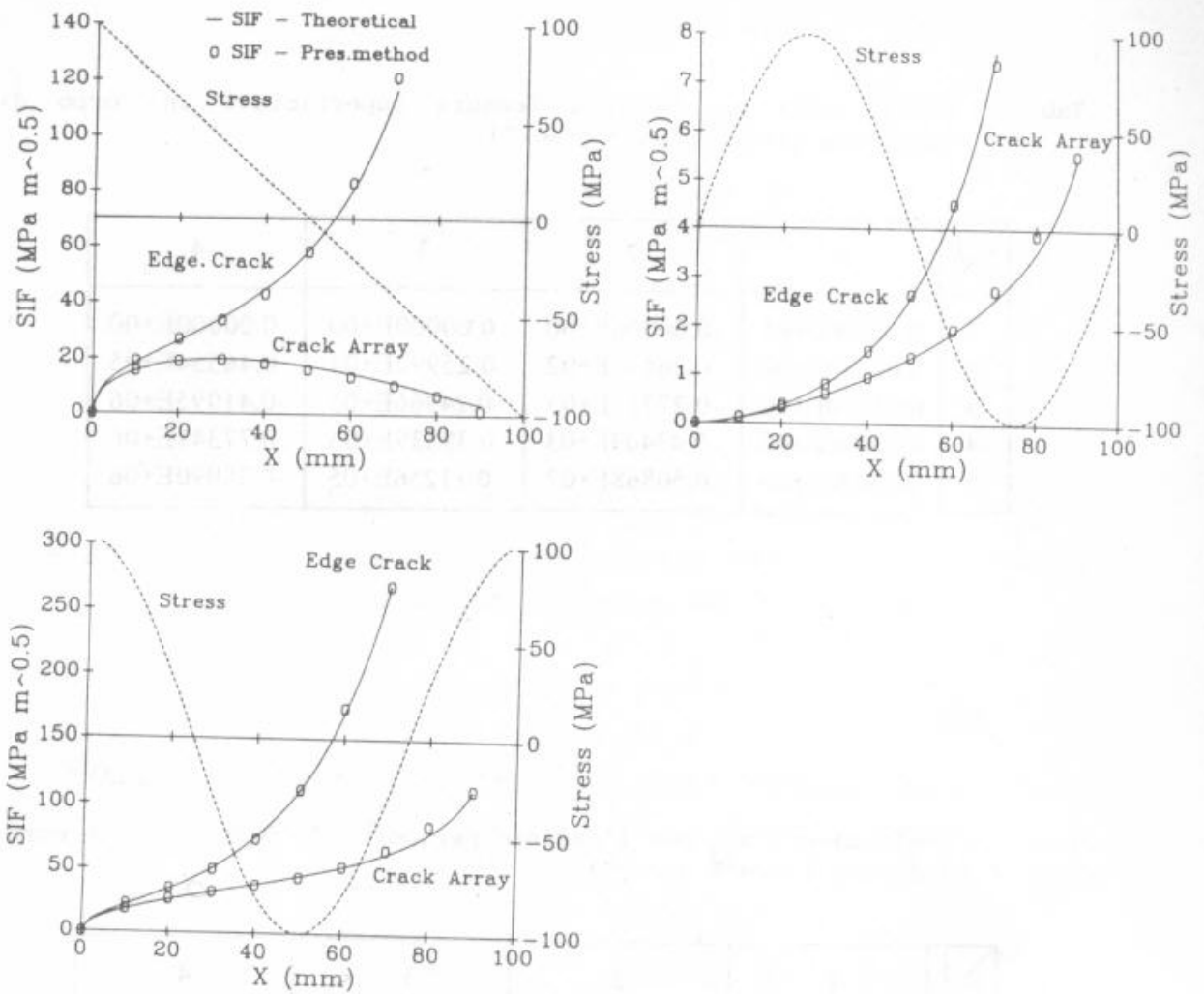


Fig. 11 - Confronto tra i valori teorici e numerici di K (SIF) per tre diverse condizioni di carico:
 a) tensione nominale variabile linearmente
 b) tensione nominale variabile sinusoidalmente
 c) tensione nominale variabile cosinusoidalmente.

Tab. 1 - Coefficienti α_{ij} per la fessura superficiale in corpo di larghezza finita ("Edge crack").

$i \backslash j$	1	2	3	4
1	0.10000E+01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
2	0.00000E+00	0.26497E+02	-0.25992E+04	-0.46554E+05
3	0.61470E+00	-0.27713E+03	0.24966E+05	-0.41095E+06
4	0.00000E+00	0.43403E+03	-0.39539E+05	0.77341E+06
5	0.25020E+00	-0.50868E+02	0.11256E+05	-0.30090E+06

Tab. 2 - Coefficienti α_{ij} per l'insieme periodico di fessure in un corpo infinito ("Crack array").

$i \backslash j$	1	2	3	4
1	0.10000E+01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
2	0.20632E+01	-0.13434E+03	0.30023E+04	-0.20378E+05
3	-0.24462E+01	0.28790E+03	-0.83896E+04	0.74455E+05
4	-0.56007E+00	-0.80395E+02	0.38467E+04	-0.41007E+05