



## Finite element homogenization of the debonding evolution in periodic fibre reinforced composites

## Omogeneizzazione agli elementi finiti del debonding nei compositi periodici unidirezionali

A. Caporale, R. Luciano

*Dipartimento di Meccanica, Strutture, Ambiente e Territorio, Università degli Studi di Cassino, via G. Di Biasio 43, 03043, Cassino*

---

**ABSTRACT.** In this work, a micromechanical finite element analysis is developed in order to determine the debonding evolution in periodic fibre reinforced composites. The cohesive-zone model developed by Alfano and Crisfield (2001) is used to schematize the fibre-matrix interface: the model has a linear softening, considers irreversible damage of the interface and takes into account the mixed mode of debonding by satisfying an interaction criterion. The overall behaviour of the composite is determined with a homogenization analysis, where a representative volume element of the composite is subjected to suitable boundary conditions. The periodic microstructure and the central symmetry of the composites under consideration enable the use of a very small representative volume element, which contains just one fibre or a portion of it, reducing significantly the CPU time. Composites with central symmetry are worth of interest and are frequently used in engineering applications: in the homogenization analysis of orthotropic composites with periodic microstructures, the microdisplacement field has central symmetry (Ohno et al. 2001) and the resulting damage configuration can also exhibit this symmetry. The overall behaviour depends on the load condition prescribed to the composite. In the most homogenization analysis, the load condition is a prescribed average strain and this can be considered sufficient for the characterization of the overall behaviour in time independent analysis (e.g. elasto-plasticity). In time dependent analysis (e.g. visco-elasticity and visco-plasticity), it is useful to prescribe a precise rate of the average stress as well as a precise rate of the average strain in order to characterize the overall behaviour (Caporale and Luciano 2010). These kinds of load conditions are prescribed in the proposed homogenization technique by imposing suitable boundary conditions. With respect to other existing methods able to prescribe the rate of macrostrain or macrostress, the proposed procedure results easy to use in commercial codes: it simply requires the imposition of conditions on the boundary of the finite element model of a suitable representative volume element, namely half of a unit cell, and it does not require the modification of parts of the source code that are usually not accessible to the user, e.g. the routines for the formation of the equations solving the problem. In fact, in the commercial FEM software the boundary conditions are imposed by assigning given displacements or forces to selected nodes of the finite element mesh, without entering in the system of equations solving the problem. The damage process in composites is very sensitive to the parameters that define the microstructure of the material, i.e. dimensions, shape, orientation of the heterogeneities, their volume fraction and space distribution. The proposed finite element simulations analyse the fibre-matrix debonding evolution for different types of periodic microstructures: specifically, it is evaluated how and how much the fibre volume fraction, the spatial distribution of the fibres and the load conditions affect the overall behaviour in presence of fibre-matrix debonding evolution. Numerical analyses are provided for both hexagonal and rectangular distribution of cylindrical fibres: the theoretical formulation for the rectangular distribution is

---



described in this work, the formulation for the hexagonal distribution can be found in Caporale and Luciano (2010). Different load conditions are considered: both normal and shear macrostrain or macrostress are prescribed and their effects on the debonding evolution are illustrated. The overall stress-strain curves exhibit a snap through when the macrostrain is prescribed; while they exhibit a plateau when the macrostress is prescribed. The snap through and the plateau are the numerical evidence of the same physical phenomenon, i.e. the completion of debonding at a large portion of the interface.

**SOMMARIO.** In questo lavoro, è sviluppata un'analisi micromeccanica agli elementi finiti per determinare il comportamento globale dei compositi periodici unidirezionali soggetti al danneggiamento dell'interfaccia fibra-matrice. Un modello coesivo con softening lineare è utilizzato per schematizzare il danneggiamento dell'interfaccia in modo misto. Una procedura è presentata per determinare l'evoluzione del debonding quando una qualsivoglia condizione di carico deformativa o tensionale è imposta al materiale composito.

**KEYWORDS.** Debonding evolution, cohesive-zone model, homogenization, periodic composites, FEM

## INTRODUZIONE

**N**ei materiali compositi, i processi di danneggiamento sono molto sensibili ai parametri che definiscono la microstruttura del composito, come dimensioni, forma, orientazione delle eterogeneità, loro frazione di volume e distribuzione spaziale. I modelli micromeccanici sono in grado di simulare il comportamento globale dei compositi tenendo in conto i parametri sopra definiti e l'interazione tra le inclusioni e i difetti del materiale. Le tecniche di omogeneizzazione utilizzate nelle analisi micromeccaniche determinano le proprietà di un mezzo omogeneo equivalente, da un punto di vista meccanico, al materiale composito. Se il composito è statisticamente omogeneo (Nemat-Nasser e Hori, 1999), allora la sua microstruttura può essere rappresentata tramite una parte di essa, detta elemento di volume rappresentativo (RVE), sufficientemente grande da contenere una distribuzione di eterogeneità in grado di caratterizzare l'intero composito da un punto di vista statistico.

Molti autori hanno sviluppato metodi numerici basati sul metodo degli elementi finiti (FEM) per l'omogeneizzazione dei compositi periodici o random. L'uso del FEM nelle analisi micromeccaniche dei compositi random richiede tempi di calcolo e spazio di memoria molto grandi, dato che il volume rappresentativo di tali compositi include molte eterogeneità e comporta mesh agli elementi finiti con un gran numero di gradi di libertà. Per superare tale problema, Ghosh e Moorthy (1995) e Ghosh et al. (2000) hanno proposto un modello piano agli elementi finiti basato su celle poligonali di Voronoi.

Gli inconvenienti computazionali dovuti all'uso di distribuzioni random di inclusioni e difetti possono essere evitati adottando distribuzioni periodiche di eterogeneità. Molti metodi sono stati sviluppati per l'analisi numerica del comportamento di compositi con diverse distribuzioni di eterogeneità. Ad esempio, distribuzioni esagonali di inclusioni sono state considerate dai seguenti autori: Yeh (1992), Taliercio and Coruzzi (1999), Carvelli and Taliercio (1999), Bolzon et al. (2002), Caporale et al. (2006). Mentre distribuzioni rettangolari di inclusioni sono state analizzate da Lissenden and Herakovich (1996). Michel et al. (1999) e Ohno et al. (2001) hanno considerato distribuzioni sia esagonali sia rettangolari. In Fig. 1, è rappresentata una possibile distribuzione esagonale di eterogeneità (inclusioni, vuoti e fratture), mentre in Fig. 2 è rappresentata una distribuzione rettangolare.

In Caporale e Luciano (2010), è stata presentata una tecnica di omogeneizzazione di compositi periodici unidirezionali, formulandola e applicandola principalmente alle distribuzioni esagonali di eterogeneità, per le quali è stata determinata l'evoluzione del danneggiamento dell'interfaccia e la superficie limite (dominio), nello spazio delle macrotensioni o macrodeformazioni, di inizio del danneggiamento per i compositi polimerici con matrice viscoelastica. In questo lavoro, tale tecnica è formulata per le distribuzioni rettangolari di eterogeneità ed è applicata con la finalità di confrontare l'evoluzione del danneggiamento di interfaccia in compositi periodici caratterizzati da microstrutture differenti. Specificamente, il confronto è realizzato tra distribuzioni esagonali e rettangolari di eterogeneità con diverse frazioni di volume delle inclusioni. La tecnica presentata in Caporale e Luciano (2010) è estendibile a diverse tipologie di distribuzioni periodiche di eterogeneità (inclusioni, vuoti e fratture), di qualunque forma, ma in questo lavoro è utilizzata per lo studio dei fenomeni di debonding in compositi unidirezionali con matrice omogenea.

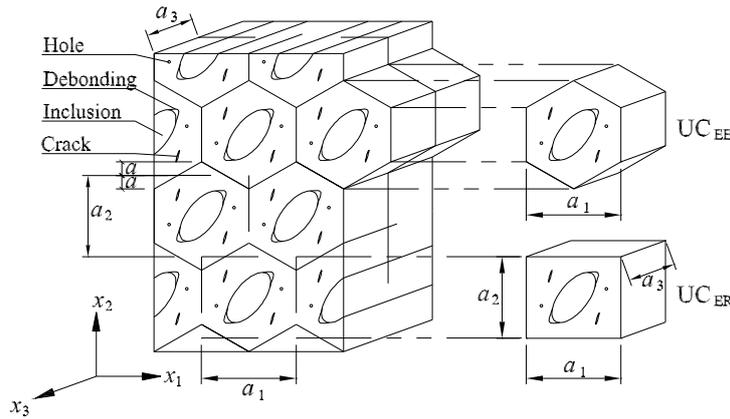


Figura 1: Distribuzione esagonale di eterogeneità e celle unitarie corrispondenti.  
 Figure 1: Hexagonal distribution of heterogeneities and the corresponding unit cells.

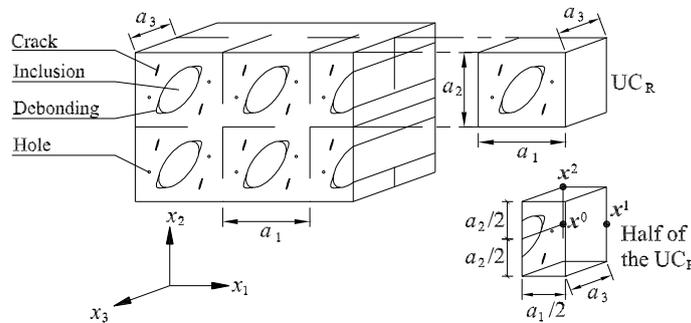


Figura 2: Distribuzione rettangolare di eterogeneità e cella unitaria corrispondente.  
 Figure 2: Rectangular distribution of heterogeneities and the corresponding unit cell.

## EQUAZIONI COSTITUTIVE DI FIBRA, MATRICE ED INTERFACCIA

Nell'ipotesi di piccoli gradienti di spostamento, le seguenti equazioni sono soddisfatte nella matrice e nelle fibre dei compositi presi in considerazione:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij,j}(\mathbf{x}, t) &= 0, \\
 2\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t) &= u_{i,j}(\mathbf{x}, t) + u_{j,i}(\mathbf{x}, t), \\
 \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) &= C_{ijkl}(\mathbf{x}, t)\varepsilon_{kl}(\mathbf{x}, t).
 \end{aligned} \tag{1}$$

Il modello coesivo di Alfano and Crisfield (2001) è utilizzato per schematizzare l'interfaccia fibra-matrice: nel modello è definita una relazione non lineare tra la tensione all'interfaccia  $\mathbf{t} = (t_n, t_s)$  ed il corrispondente salto dello spostamento  $[\mathbf{u}] = ([u_n], [u_s])$ , dove  $[u_n]$  e  $[u_s]$  sono i salti nella direzione normale e tangenziale dell'interfaccia, rispettivamente. I due modi puri di debonding sono rappresentati in Fig. 3, dove  $[u_{n0}]$  e  $[u_{s0}]$  sono i salti corrispondenti all'inizio del debonding nel primo e secondo modo, rispettivamente, mentre  $[u_{nc}]$  e  $[u_{sc}]$  sono i salti corrispondenti al completamento del debonding nel primo e secondo modo, rispettivamente. Dunque, il modello è caratterizzato da danno irreversibile con softening lineare nel modo puro ed è in grado di considerare anche il modo misto di debonding; per maggiori dettagli si veda Alfano e Crisfield (2001) e Caporale e Luciano (2010). I parametri di ingresso del modello sono  $\{t_{n0}, t_{s0}, k_n, k_s, [u_{nc}], [u_{sc}]\}$ , dove  $t_{n0} = k_n[u_{n0}]$  e  $t_{s0} = k_s[u_{s0}]$ . Per rendere trascurabile la compenetrazione dei costituenti, sono assegnati valori elevati al modulo elastico  $k_n$ , che in pratica è considerato un parametro penalty nelle analisi numeriche. La compenetrazione dei costituenti è impedita anche dopo il completo debonding.

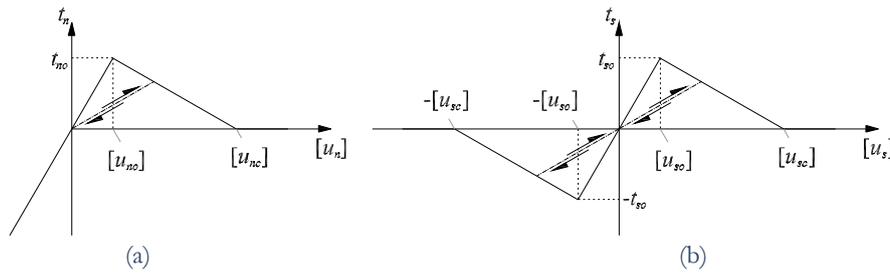


Figura 3: Legame costitutivo dell'interfaccia: a) primo modo; b) secondo modo.

Figure 3: Bilinear pure-mode interface laws: a) first mode; b) second mode.

### VOLUME RAPPRESENTATIVO E CONDIZIONI AL CONTORNO

**N**ei compositi periodici è definibile una cella unitaria (UC) tale che il composito infinitamente esteso può essere ottenuto come la ripetizione nello spazio della UC. Alcune celle unitarie sono rappresentate nelle Figure 1 e 2: la UC delle distribuzioni rettangolari di eterogeneità è indicata con  $UC_R$ . Nelle analisi di omogeneizzazione, è possibile adottare una cella unitaria in qualità di RVE. A tal fine, opportune condizioni al contorno devono essere imposte alla cella unitaria. La scelta della cella unitaria non è univoca e la soluzione del problema non dipende dal tipo di cella adottato (Xia et al., 2006). L'obiettivo è quello di ridurre il più possibile le dimensioni della cella unitaria e quindi i gradi di libertà del suo modello agli elementi finiti, col fine di ridurre i tempi di calcolo delle analisi micromeccaniche. Nelle analisi di omogeneizzazione in presenza di simmetria centrale (Ohno et al., 2001), è possibile adottare metà della cella unitaria mostrata in Fig. 2 e Fig. 4a.

In questo lavoro, è determinata l'evoluzione del danno nei compositi con distribuzione rettangolare di fibre cilindriche imponendo a metà della  $UC_R$  opportune condizioni al contorno, che definiscono il tipo di carico agente sul composito: nel primo approccio è imposta una macrodeformazione  $\mathbf{E}$ , nel secondo approccio è imposta una macro tensione  $\mathbf{\Sigma}$ . Nel seguito sono descritte le condizioni al contorno nei due approcci.

È assunto un sistema di riferimento cartesiano con origine nel centro della cella unitaria, come rappresentato in Fig. 4a. Il contorno  $\partial V_{UC}$  della cella  $UC_R$  è definito dall'unione delle seguenti sei facce: la base superiore  $\Gamma_{sup}$  appartenente al piano  $x_3 = a_3/2$ , la base inferiore  $\Gamma_{inf}$  appartenente al piano  $x_3 = -a_3/2$  e le quattro facce laterali  $\Gamma_i$  e  $\Gamma'_i$   $i = 1, 2$  parallele all'asse  $x_3$ , i.e.  $\partial V_{UC} = \Gamma_{inf} \cup \Gamma_{sup} \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma'_1 \cup \Gamma'_2$ . Una sezione trasversale delle quattro facce laterali della cella unitaria è rappresentata in Fig. 4b.

Il contorno  $\partial V_{hUC}$  di metà della cella  $UC_R$  è definito dall'unione delle seguenti facce: la base superiore  $\Gamma_{sup,h}$  appartenente al piano  $x_3 = a_3/2$ , la base inferiore  $\Gamma_{inf,h}$  appartenente al piano  $x_3 = -a_3/2$  e le quattro facce laterali  $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_{2+}$  e  $\Gamma_{2-}$  parallele all'asse  $x_3$ , i.e.  $\partial V_{hUC} = \Gamma_{inf,h} \cup \Gamma_{sup,h} \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_{2+} \cup \Gamma_{2-}$ . Una sezione trasversale delle quattro facce laterali di metà della cella unitaria è rappresentata in Fig. 4c.

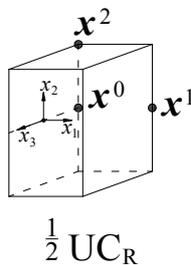


Figura 4a: Punti caratteristici su metà della  $UC_R$ .

Figure 4a: Characteristic points on the boundary of half of the  $UC_R$ .

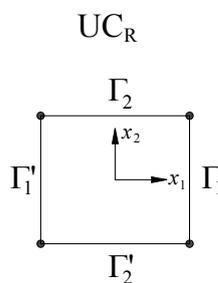


Figura 4b: Sezione trasversale della  $UC_R$ .

Figure 4b: Transverse section of the  $UC_R$ .

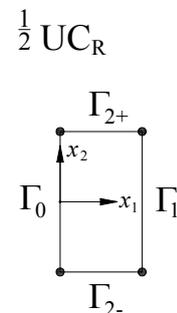


Figura 4c: Sezione trasversale di metà della  $UC_R$ .

Figure 4c: Transverse section of half of the  $UC_R$ .



*Primo approccio*

Nelle analisi di omogeneizzazione di compositi periodici, il microspostamento è definito da (Suquet 1987)

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}\mathbf{x} + \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad (2)$$

dove  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  rappresenta la perturbazione indotta dalla presenza delle eterogeneità ed è un campo periodico, i.e.  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{d})$  con  $d_i = m_i a_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) e  $m_i$  sono interi arbitrari. Nei compositi con simmetria centrale, anche il microspostamento ha simmetria centrale, i.e.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = -\mathbf{u}(-\mathbf{x}). \quad (3)$$

Dalle (2)-(4) si ha

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = -\mathbf{v}(-\mathbf{x}). \quad (4)$$

Tenendo conto delle (2) e (3), è possibile esprimere tutti gli spostamenti del contorno in funzione delle sei componenti di spostamento  $u_3(\mathbf{x}^0)$ ,  $u_1(\mathbf{x}^1)$ ,  $u_2(\mathbf{x}^1)$ ,  $u_3(\mathbf{x}^1)$ ,  $u_2(\mathbf{x}^2)$  e  $u_3(\mathbf{x}^2)$ , dove i punti  $\mathbf{x}^0 = (0, 0, -a_3/2)$ ,  $\mathbf{x}^1 = (a_1/2, 0, -a_3/2)$ ,  $\mathbf{x}^2 = (0, a_2/2, -a_3/2)$  sono rappresentati in Fig. 4a.

Nella Fig. 5, i punti  $A$  e  $B$  appartengono al lato  $\Gamma_i \cap \Gamma_{inf}$  per  $i = 0, 1, 2$  e sono gli estremi di un segmento il cui punto medio è  $\mathbf{x}^i$ . Applicando (2) ad un punto  $A \in \Gamma_i$  ed al punto opposto  $A'$ , si ha

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}^A) = \mathbf{E}\mathbf{x}^A + \mathbf{v}(\mathbf{x}^A), \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}^{A'}) = \mathbf{E}\mathbf{x}^{A'} + \mathbf{v}(\mathbf{x}^{A'}). \quad (5)$$

Sottraendo membro a membro le (5), osservando che  $\mathbf{x}^{A'} = -\mathbf{x}^A$  e tenendo conto della (3), si ha

$$2\mathbf{u}(\mathbf{x}^A) = 2\mathbf{E}\mathbf{x}^A + \mathbf{v}(\mathbf{x}^A) - \mathbf{v}(-\mathbf{x}^A). \quad (6)$$

In modo analogo, lo spostamento del punto  $B$  soddisfa la seguente relazione:

$$2\mathbf{u}(\mathbf{x}^B) = 2\mathbf{E}\mathbf{x}^B + \mathbf{v}(\mathbf{x}^B) - \mathbf{v}(-\mathbf{x}^B). \quad (7)$$

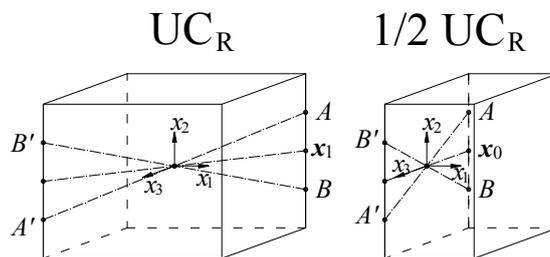


Figura 5: Punti caratteristici sulle basi della  $UC_R$ .

Figure 5: Characteristic points on the bases of half the  $UC_R$ .

Per la periodicità di  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ , si ha

$$\mathbf{v}(-\mathbf{x}^A) = \mathbf{v}(\mathbf{x}^{A'}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}^B), \quad \mathbf{v}(-\mathbf{x}^B) = \mathbf{v}(\mathbf{x}^{B'}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}^A). \quad (8)$$

Sommando membro a membro (6) e (7) e tenendo conto della (8) si ha



$$\mathbf{u}(\mathbf{x}^A) + \mathbf{u}(\mathbf{x}^B) = \mathbf{E}(\mathbf{x}^A + \mathbf{x}^B), \text{ dove } A, B \in \Gamma_i \cap \Gamma_{inf}, \frac{1}{2}(\mathbf{x}^A + \mathbf{x}^B) = \mathbf{x}^i, i = 0, 1, 2. \quad (9)$$

La seguente relazione è ricavata ponendo  $\mathbf{x}^A = \mathbf{x}^B = \mathbf{x}^i$  nella (9)

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}^i) = \mathbf{E}\mathbf{x}^i, i = 0, 1, 2, \quad (10)$$

sicché dalla (9) si ha

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}^A) + \mathbf{u}(\mathbf{x}^B) = 2\mathbf{u}(\mathbf{x}^i), \text{ dove } A, B \in \Gamma_i \cap \Gamma_{inf,h}, \frac{1}{2}(\mathbf{x}^A + \mathbf{x}^B) = \mathbf{x}^i, i = 0, 1. \quad (11)$$

Vista l'arbitrarietà della dimensione  $a_3$  della UC, una relazione simile alla (11) sussiste per i punti  $A$ ,  $B$  e  $C$  rappresentati in Fig. 6. Facendo ulteriori passaggi si ricavano le seguenti condizioni al contorno sulle facce  $\Gamma_0$  e  $\Gamma_1$ :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}^A) + \mathbf{u}(\mathbf{x}^B) = 2\mathbf{u}(\mathbf{x}^C), \text{ dove } A, B, C \in \Gamma_i - \Gamma_{sup,h}, \frac{1}{2}(\mathbf{x}^A + \mathbf{x}^B) = \mathbf{x}^C, \quad (12)$$

$$\mathbf{x}^C = \mathbf{x}^i \text{ or } \frac{\mathbf{x}^C - \mathbf{x}^i}{\|\mathbf{x}^C - \mathbf{x}^i\|} = \mathbf{e}_3 \text{ if } \mathbf{x}^C \neq \mathbf{x}^i, (\mathbf{x}^A - \mathbf{x}^B) \cdot \mathbf{e}_3 = 0, i = 0, 1.$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}^C) - \mathbf{u}(\mathbf{x}^i) = -\mathbf{u}(\mathbf{x}^0) \frac{\|\mathbf{x}^C - \mathbf{x}^i\|}{a_3/2}, \text{ dove } C \in \Gamma_i - \Gamma_{sup,h} - \Gamma_{inf,h}, \frac{\mathbf{x}^C - \mathbf{x}^i}{\|\mathbf{x}^C - \mathbf{x}^i\|} = \mathbf{e}_3, i = 0, 1. \quad (13)$$

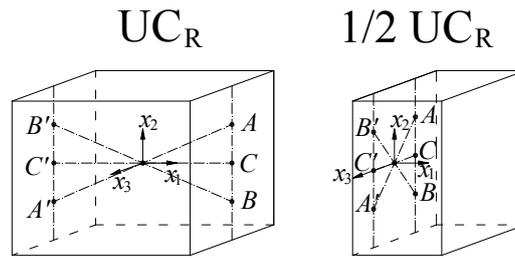


Figura 6: Punti caratteristici sulle facce laterali della  $UC_R$ .

Figure 6: Characteristic points on the lateral faces of half the  $UC_R$ .

Le condizioni al contorno sulle basi sono date da

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}^{P'}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}^P) = -2\mathbf{u}(\mathbf{x}^0), \text{ dove } P \in \Gamma_{inf,h}, P' \in \Gamma_{sup,h}, \mathbf{x}^{P'} = \mathbf{x}^P + a_3\mathbf{e}_3; \quad (14)$$

si veda Caporale e Luciano (2010) o Carvelli e Taliercio (1999) per maggiori dettagli. Le condizioni al contorno sulle facce  $\Gamma_{2-}$  e  $\Gamma_{2+}$  sono ottenute applicando la (2) ai punti  $P$  e  $P'$ , appartenenti alle facce  $\Gamma_{2-}$  e  $\Gamma_{2+}$  e simmetrici rispetto al piano  $x_1 - x_3$ , i.e.  $x_1^P = x_1^{P'}$ ,  $x_2^P = -x_2^{P'} = -a_2/2$  e  $x_3^P = x_3^{P'}$ :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}^P) = \mathbf{E}\mathbf{x}^P + \mathbf{v}(\mathbf{x}^P), \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}^{P'}) = \mathbf{E}\mathbf{x}^{P'} + \mathbf{v}(\mathbf{x}^{P'}). \quad (15)$$

Sottraendo membro a membro le due equazioni in (15), si ha

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}^{P'}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}^P) = \mathbf{E}(\mathbf{x}^{P'} - \mathbf{x}^P), \text{ dove } P \in \Gamma_{2-}, P' \in \Gamma_{2+}, \mathbf{x}^{P'} = \mathbf{x}^P + a_2\mathbf{e}_2 \quad (16)$$

e si è tenuto conto della periodicità di  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ , che comporta  $\mathbf{v}(\mathbf{x}^P) = \mathbf{v}(\mathbf{x}^{P'})$ . Osservando che  $\mathbf{x}^{P'} - \mathbf{x}^P = 2(\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^0)$  e tenendo conto della (10), si ha

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}^{P'}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}^P) = 2(\mathbf{u}(\mathbf{x}^2) - \mathbf{u}(\mathbf{x}^0)), \text{ dove } P \in \Gamma_{2-}, P' \in \Gamma_{2+}, \mathbf{x}^{P'} = \mathbf{x}^P + a_2\mathbf{e}_2. \quad (17)$$



Le condizioni al contorno da imporre nei codici agli elementi finiti devono essere linearmente indipendenti. La condizione (17) per  $\mathbf{x}^{P'} = \mathbf{x}^2$  dipende linearmente dalla (11) o (12) per  $i = 0$ ; **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.** per  $\mathbf{x}^{P'} \in \Gamma_{sup,h}$  dipende linearmente dalla (14) e da alcune equazioni della (17) scritte per  $\mathbf{x}^P \in \Gamma_{inf,h}$ . I punti nei quali si ha la dipendenza devono essere esclusi dalla (17). Le condizioni linearmente indipendenti sulle facce  $\Gamma_{2-}$  e  $\Gamma_{2+}$  sono dunque date da

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}^{P'}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}^P) = 2(\mathbf{u}(\mathbf{x}^2) - \mathbf{u}(\mathbf{x}^0)), \text{ dove } P \in \Gamma_{2-} - \Gamma_0 - \Gamma_{sup,h}, P' \in \Gamma_{2+} - \Gamma_0 - \Gamma_{sup,h}, \mathbf{x}^{P'} = \mathbf{x}^P + a_2 \mathbf{e}_2. \quad (18)$$

Il sistema lineare definito dalle seguenti nove equazioni scalari

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}^0) = \mathbf{E}\mathbf{x}^0, \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}^1) = \mathbf{E}\mathbf{x}^1, \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}^2) = \mathbf{E}\mathbf{x}^2, \quad (19)$$

è risolto assumendo come incognite le componenti del tensore  $\mathbf{E}$ . Dopo aver risolto il sistema (19), le componenti di  $\mathbf{E}$  sono funzioni note delle componenti  $u_i(\mathbf{x}^j)$ . Le tre condizioni  $E_{23} = E_{32}$ ,  $E_{31} = E_{13}$  e  $E_{12} = E_{21}$  definiscono un nuovo sistema lineare che è risolto assumendo come incognite  $u_1(\mathbf{x}^0)$ ,  $u_2(\mathbf{x}^0)$  e  $u_3(\mathbf{x}^0)$ :

$$\begin{aligned} u_1(\mathbf{x}^0) &= \frac{a_3}{a_1} (u_3(\mathbf{x}^0) - u_3(\mathbf{x}^1)), \\ u_2(\mathbf{x}^0) &= \frac{a_3}{a_2} (u_3(\mathbf{x}^0) - u_3(\mathbf{x}^2)), \\ u_1(\mathbf{x}^2) &= \frac{1}{a_1} (a_2 u_2(\mathbf{x}^1) - a_3 u_3(\mathbf{x}^1) + a_3 u_3(\mathbf{x}^2)). \end{aligned} \quad (20)$$

Le componenti di spostamento (20) e quelle sul contorno della mezza cella unitaria dipendono linearmente dalle seguenti componenti, ottenute dalla (19):

$$\begin{aligned} u_3(\mathbf{x}^0) &= -E_{33} \frac{a_3}{2}, \\ u_1(\mathbf{x}^1) &= E_{11} \frac{a_1}{2} - E_{13} \frac{a_3}{2}, \\ u_2(\mathbf{x}^1) &= E_{21} \frac{a_1}{2} - E_{23} \frac{a_3}{2}, \\ u_3(\mathbf{x}^1) &= E_{31} \frac{a_1}{2} - E_{33} \frac{a_3}{2}, \\ u_2(\mathbf{x}^2) &= E_{22} \frac{a_2}{2} - E_{23} \frac{a_3}{2}, \\ u_3(\mathbf{x}^2) &= E_{32} \frac{a_2}{2} - E_{33} \frac{a_3}{2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Le relazioni (12)-(14), (18), (20) e (21) rappresentano le condizioni al contorno da imporre su metà della cella unitaria affinché essa subisca una deformazione media definita dal tensore  $\mathbf{E}$ . Le relazioni (21) sono dette condizioni assolute, mentre (12)-(14), (18) e (20) sono dette condizioni relative. A tale macrodeformazione corrisponde una macro tensione definita dal tensore

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{V_{hUC}} \int_{V_{hUC}} \sigma_{ij}(\mathbf{x}) dV = \frac{1}{V_{hUC}} \int_{\partial V_{hUC}} x_i t_j(\mathbf{x}) dS \quad (22)$$

dove  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  è la (micro)tensione nel generico punto  $\mathbf{x}$  della mezza cella unitaria. Il legame costitutivo del composito è definito dalla relazione che lega  $\mathbf{E}$  e  $\boldsymbol{\Sigma}$ . Si nota che la macrodeformazione  $\mathbf{E}$  può essere imposta applicando le



condizioni (12)-(14), (18), (20) e (21) oppure applicando opportune forze  $\mathbf{R}^j$  ai punti  $\mathbf{x}^j$  della mezza cella unitaria soggetta alle sole condizioni relative (12)-(14), (18) e (20). In Caporale e Luciano (2010), è stata ricavata la relazione lineare esistente tra  $\mathbf{R}^j$  e  $\Sigma$  per le distribuzioni esagonali di eterogeneità. Una tale relazione può essere ricavata anche per le distribuzioni rettangolari utilizzando lo stesso metodo ivi presentato. Specificamente, applicando il Principio dei Lavori Virtuali alla mezza cella unitaria si ha

$$\int_{V_{huc}} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^b dV = R_3^0 u_3^b(\mathbf{x}^0) + R_1^1 u_1^b(\mathbf{x}^1) + R_2^1 u_2^b(\mathbf{x}^1) + R_3^1 u_3^b(\mathbf{x}^1) + R_2^2 u_2^b(\mathbf{x}^2) + R_3^2 u_3^b(\mathbf{x}^2), \quad (23)$$

dove  $\mathbf{u}^b$  è uno spostamento cinematicamente ammissibile. Il primo membro della (23) può essere facilmente calcolato scegliendo opportunamente  $\mathbf{u}^b$ ; infatti, si ha

$$\int_{V_{huc}} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^b dV = \Sigma_{kl} V_{huc} \quad \text{se} \quad \varepsilon_{ij}^b = (\delta_{ik} \delta_{lj} + \delta_{il} \delta_{kj}) / 2. \quad (24)$$

Quindi, dalle (23) e (24) si ha

$$\begin{aligned} \Sigma_{11} &= \frac{R_1^1}{a_2 a_3}, & \text{se } \varepsilon_{ij}^b &= \delta_{i1} \delta_{1j}; \\ \Sigma_{22} &= \frac{R_2^2}{a_1 a_3}, & \text{se } \varepsilon_{ij}^b &= \delta_{i2} \delta_{2j}; \\ \Sigma_{33} &= -\frac{R_3^0 + R_3^1 + R_3^2}{a_1 a_2}, & \text{se } \varepsilon_{ij}^b &= \delta_{i3} \delta_{3j}; \\ \Sigma_{23} &= \frac{R_3^2}{2a_1 a_3} - \frac{R_2^1 + R_2^2}{2a_1 a_2}, & \text{se } \varepsilon_{ij}^b &= (\delta_{i2} \delta_{3j} + \delta_{i3} \delta_{2j}) / 2; \\ \Sigma_{13} &= -\frac{R_1^1}{2a_1 a_2} + \frac{R_3^1}{2a_2 a_3}, & \text{se } \varepsilon_{ij}^b &= (\delta_{i3} \delta_{1j} + \delta_{i1} \delta_{3j}) / 2; \\ \Sigma_{12} &= \frac{R_2^1}{2a_2 a_3}, & \text{se } \varepsilon_{ij}^b &= (\delta_{i1} \delta_{2j} + \delta_{i2} \delta_{1j}) / 2. \end{aligned} \quad (25)$$

### Secondo approccio

Invertendo (25), si ottengono le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} R_1^1 &= a_2 a_3 \Sigma_{11}, \\ R_2^1 &= 2a_2 a_3 \Sigma_{12}, \\ R_3^1 &= \frac{a_2 a_3}{a_1} (a_3 \Sigma_{11} + 2a_1 \Sigma_{13}), \\ R_2^2 &= a_1 a_3 \Sigma_{22}, \\ R_3^2 &= \frac{a_3}{a_2} (a_1 a_3 \Sigma_{22} + 2a_1 a_2 \Sigma_{23} + 2a_2 a_3 \Sigma_{12}), \\ R_3^0 &= -\frac{1}{a_1 a_2} (a_2^2 a_3^2 \Sigma_{11} + a_1^2 a_3^2 \Sigma_{22} + a_1^2 a_2^2 \Sigma_{33} + 2a_1^2 a_2 a_3 \Sigma_{23} + 2a_1 a_2^2 a_3 \Sigma_{13} + 2a_1 a_2 a_3^2 \Sigma_{12}). \end{aligned} \quad (26)$$

Le formule (26) forniscono le reazioni  $\mathbf{R}^j$  che bisogna applicare ai punti  $\mathbf{x}^j$  della mezza cella unitaria, soggetta alle condizioni relative, affinché la tensione media nella mezza cella sia pari a  $\Sigma$ . Concludendo, le condizioni al contorno nel secondo approccio sono date dalle condizioni relative (12)-(14), (18), (20) e dalle forze applicate (26).



## IL MODELLO FEM

In virtù della simmetria unidirezionale del composito, è possibile adottare la mesh illustrata in Fig. 7 per la discretizzazione della mezza cella unitaria della distribuzione rettangolare. Nella mesh sono adottate le dimensioni  $a_1 = a_2 = 1$ ; la dimensione  $a_3$ , arbitraria, è assunta pari a 0.02.  $c_f$ , la frazione di volume delle fibre, è assunta pari a 0.4 o 0.6. Nel modello FEM, le condizioni al contorno definite nella sezione precedente sono imposte solo nei punti nodi della mesh e quindi le condizioni relative definite nei punti interni delle facce laterali della mezza UC<sub>R</sub>, e.g. (13), non sono applicate. Nel seguito sono forniti risultati numerici anche per le distribuzioni esagonali di eterogeneità. Per la geometria, le condizioni al contorno e la discretizzazione di tali distribuzioni si veda Caporale e Luciano (2010). La matrice e la fibra sono considerate elastiche lineari con le costanti definite nella Tab. 1. I parametri normali di interfaccia sono definiti da  $t_{no} = 10$  MPa e  $k_n = 50$  GPa/ $a_1$ . I parametri tangenziali sono invece dati da  $k_s = k_n$ ,  $t_{so} = 2t_{no}$  e  $[u_{sc}] = 2[u_{nc}]$ . Il parametro  $\alpha$  del modello di Alfano e Crisfield (2001) è assunto pari a 2.

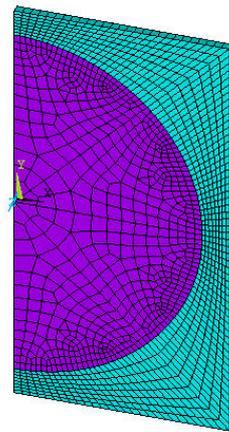


Figura 7: Discretizzazione di metà della UC<sub>R</sub>.

Figure 7: Discretization of half the UC<sub>R</sub>.

Young's modulus of the matrix $E_0^{(m)}$	3.27 GPa
Poisson's ratio of the matrix $\nu^{(m)}$	0.38
Young's modulus of the fibre $E^{(f)}$	68.67 GPa
Poisson's ratio of the fibre $\nu^{(f)}$	0.21

Tabella 1: Proprietà elastiche dei costituenti.

Table 1: Elastic properties of the constituents.

## RISULTATI

L'evoluzione del debonding è analizzata per compositi con distribuzione rettangolare ed esagonale di eterogeneità nel primo approccio, dove è imposta una macrodeformazione, e nel secondo approccio, dove è imposta una macrotensione. La macrodeformazione assegnata nel primo approccio è definita da  $E_{ij} = \gamma \delta_{i1} \delta_{1j}$ , dove  $\gamma$  è un parametro di carico. Tale macrodeformazione è imposta con incrementi positivi, i.e.  $E_{11}^{n+1} > E_{11}^n$ , dove  $E_{11}^n$  è la macrodeformazione imposta alla fine del passo di carico ennesimo. In Fig. 8, la macrotensione  $\Sigma_{11}$  è diagrammata in funzione della macrodeformazione imposta  $E_{11}$  per differenti valori del parametro  $d = [u_{nc}]/a_1$ . La figura rappresenta il comportamento (globale) del composito quando è imposta una macrodeformazione assiale. Il comportamento globale è

elastico lineare fino alla macrodeformazione  $\mathbf{E}^o$ , in corrispondenza della quale comincia il danneggiamento del legame fibra-matrice. Nel processo di carico successivo al raggiungimento di  $\mathbf{E}^o$ , diminuisce la tangente alle curve  $\Sigma_{11} - E_{11}$  di Fig. 8 per effetto del ramo di softening delle curve in Fig. 3. Le curve  $\Sigma_{11} - E_{11}$  di Fig. 8 presentano anche snap-through, dove il completamento del debonding (i.e.  $[u_n] \geq [u_{nc}]$  e/o  $[[u_s]] \geq [u_{sc}]$ ) avviene su una porzione di interfaccia sempre più estesa. All'inizio del tratto con snap-through, la generica curva  $\Sigma_{11} = \Sigma_{11}(E_{11})$  di Fig. 8 ha un massimo locale nel punto  $E_{11}^d$ : la macrodeformazione corrispondente a  $E_{11}^d$  è indicata con  $\Sigma_{11}^d$ , i.e.  $\Sigma_{11}^d = \Sigma_{11}(E_{11}^d)$ . Il parametro  $d$  influisce molto sull'andamento delle curve  $\Sigma_{11} - E_{11}$ ; il valore  $\Sigma_{11}^d$  diminuisce al diminuire del parametro  $d$ . Il tipo di distribuzione (rettangolare o esagonale) delle fibre cilindriche influisce lievemente sul comportamento globale.

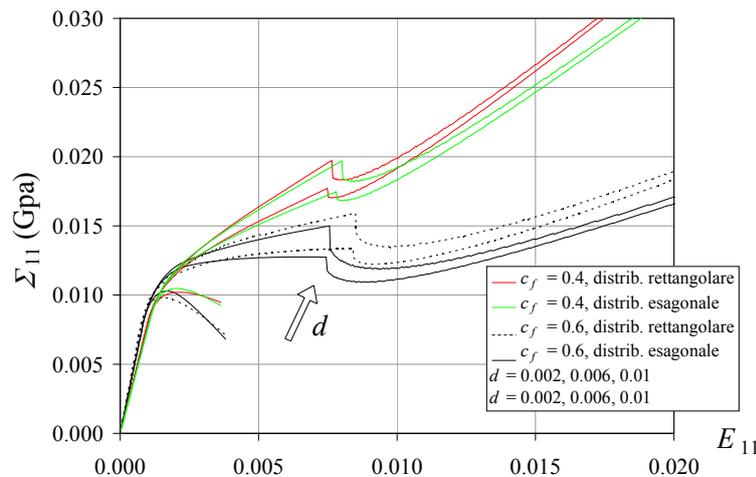


Figura 8: Curve  $\Sigma_{11} - E_{11}$  del composito soggetto a macrodeformazione uniassiale  $E_{11}$ .

Figure 8:  $\Sigma_{11} - E_{11}$  curves of the composite subjected to uni-axial macrostrain  $E_{11}$ .

La macrodeformazione assegnata nel secondo approccio è definita da  $\Sigma_{ij} = \gamma(\delta_{ik}\delta_{lj} + \delta_{il}\delta_{kj})$ , dove  $\gamma$  è un parametro di carico. Tale macrodeformazione è imposta con incrementi positivi, i.e.  $\Sigma_{ij}^{n+1} > \Sigma_{ij}^n$ , dove  $\Sigma_{ij}^n$  è la macrodeformazione imposta alla fine del passo di carico ennesimo. In Fig. 9, la macrodeformazione  $\Sigma_{kl}$  è diagrammata in funzione della macrodeformazione imposta  $E_{kl}$  ( $kl = 11, 22, 12$ ) per  $c_f = 0.6$ . Per le distribuzioni esagonali, è assunto  $d = [u_{nc}]/a_1 = 0.02, 0.05$ , mentre per quelle rettangolari è  $d = [u_{nc}]/a_1 = 0.02$ . La figura rappresenta il comportamento (globale) del composito quando è imposta una macrodeformazione assiale ( $kl = 11, 22$ ) o di taglio puro ( $kl = 12$ ). Come nel primo approccio, il comportamento globale è elastico lineare fino alla macrodeformazione  $\mathbf{E}^o$ , in corrispondenza della quale comincia il danneggiamento del legame fibra-matrice. Nel processo di carico successivo al raggiungimento di  $\mathbf{E}^o$ , diminuisce la tangente alle curve  $\Sigma_{kl} - E_{kl}$  di Fig. 9 per effetto del ramo di softening delle curve in Fig. 3. Le curve  $\Sigma_{kl} - E_{kl}$  di Fig. 9 presentano anche un plateau (i.e. un segmento orizzontale), dove il completamento del debonding (i.e.  $[u_n] \geq [u_{nc}]$  e/o  $[[u_s]] \geq [u_{sc}]$ ) avviene su una porzione di interfaccia sempre più estesa. La macrodeformazione all'inizio del plateau è denotata con  $E_{kl}^d$ : la macrodeformazione corrispondente a  $E_{kl}^d$  è indicata con  $\Sigma_{kl}^d$ , i.e.  $\Sigma_{kl}^d = \Sigma_{kl}(E_{kl}^d)$ , e diminuisce al diminuire del parametro  $d$ . Per  $\Sigma_{ij} = \gamma\delta_{i1}\delta_{1j}$ , il tipo di distribuzione (rettangolare o esagonale) delle fibre cilindriche influisce lievemente sul comportamento globale. Una maggiore influenza del tipo di distribuzione si osserva se sono imposti altri percorsi di carico, ad esempio  $\Sigma_{ij} = \gamma\delta_{i2}\delta_{2j}$ .

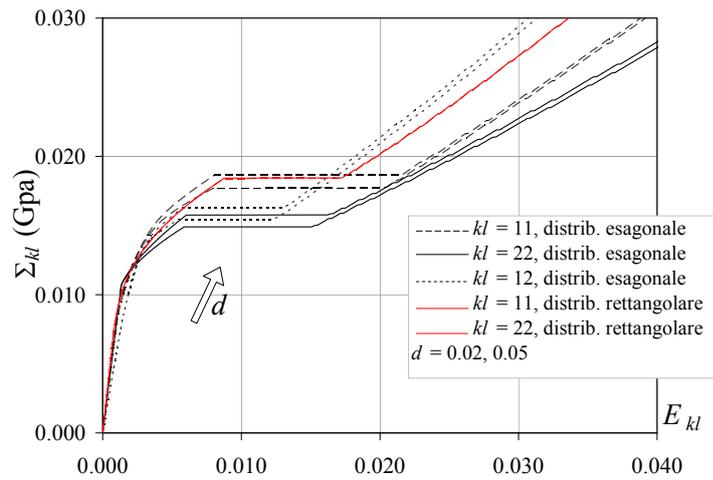
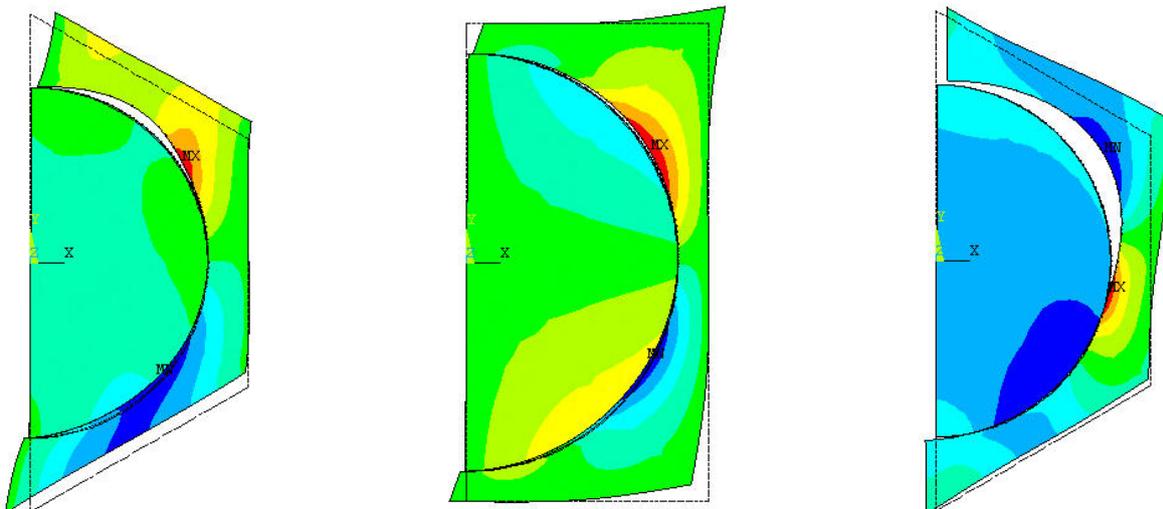


Figura 9: Curve  $\Sigma_{kl} - E_{kl}$  ( $kl = 11, 22, 12$ ) del composito soggetto a macrostress  $\Sigma_{kl}$ .

Figure 9:  $\Sigma_{kl} - E_{kl}$  curves ( $kl = 11, 22, 12$ ) of the composite subjected to macrostress  $\Sigma_{kl}$ .

Il tratto con snap-through che si manifesta nel primo approccio e il plateau nelle curve del secondo approccio sono le evidenze sperimentali dello stesso fenomeno, i.e. il completamento del debonding su una superficie di interfaccia sempre più estesa. Analoghe considerazioni possono essere fatte quando sono applicati carichi monotoni di macrodeformazione  $E_{ij} = \gamma(\delta_{ik}\delta_{lj} + \delta_{il}\delta_{kj})$  o macrostress  $\Sigma_{ij} = \gamma(\delta_{ik}\delta_{lj} + \delta_{il}\delta_{kj})$ , per  $k, l = 1, 2, 3$ . Nella Fig. 10, è illustrato lo stato tensionale  $\sigma_{22}$  sulle configurazioni deformate delle mezze celle unitarie quando è imposta la macrostress di taglio puro  $\Sigma_{ij} = \gamma(\delta_{i1}\delta_{2j} + \delta_{i2}\delta_{1j})$ . Nelle Fig. 10a e Fig. 10b, è rappresentato lo stato tensionale all'inizio del processo di debonding, mentre nella Fig. 10c è rappresentato lo stato alla fine del processo. Nella parte di interfaccia aperta in Fig. 10a non è avvenuto il debonding e si ha un trasferimento di sforzi tra fibra e matrice. Si nota come al termine del processo di debonding (Fig. 10c) una estesa parte di interfaccia è completamente aperta senza trasferimento di sforzi mentre sulla restante parte dell'interfaccia si ha contatto con trasferimento degli sforzi.



a: Inizio del debonding nella distribuzione esagonale. b: Inizio del debonding nella distribuzione rettangolare. c: Completamento del debonding nella distribuzione esagonale.

Figura 10: Microtensione  $\sigma_{22}$  sulle mezze celle unitarie nella configurazione deformata.

Figure 10: Microstress  $\sigma_{22}$  and deformed shape of half of the unit cell.



## BIBLIOGRAFIA

- [1] G. Alfano, M.A. Crisfield, *Int J Numer Methods Eng*, 50 (2001) 1701.
- [2] G. Bolzon, D. Ghilotti, G. Maier, *Eur J Mech A/Solids*, 21 (2002) 355.
- [3] A. Caporale, R. Luciano, E. Sacco, *Comput Struct*, 84 (2006) 2200.
- [4] Caporale, R. Luciano, *Annals of Solid and Structural Mechanics*, 1 (2010) 117.
- [5] V. Carvelli, A. Taliercio, *Mech Res Commun*, 26 (1999) 547.
- [6] S. Ghosh, S. Moorthy, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 121 (1995) 373.
- [7] S. Ghosh, Y. Ling, B. Majumdar, R. Kim, *Mechanics of Materials*, 32 (2000) 561.
- [8] J. Lissenden, C. T. Herakovich, *Mech Mater*, 22 (1996) 279.
- [9] J. C. Michel, H. Moulinec, P. Suquet, *Comput Methods, Appl Mech Eng*, 172 (1999) 109.
- [10] S. Nemat-Nasser, M. Hori, *Micromechanics: overall properties of heterogeneous materials*, Amsterdam: Elsevier (1999).
- [11] N. Ohno, T. Matsuda, X. Wu, *Int J Solids Struct*, 38 (2001) 2867.
- [12] P.M. Suquet, In: Sanchez-Palencia, E., Zaoui, A. (Eds.), *Homogenization Techniques for Composite Media*, Lecture Notes in Physics, 272. Springer-Verlag, New York (1987).
- [13] A. Taliercio, R. Coruzzi, *Int J Solids Struct*, 36 (1999) 3591.
- [14] Z. Xia, C. Zhou, Q. Yong, X. Wang, *Int J Solids Struct*, 43 (2006) 266.
- [15] J.R. Yeh, *Int J Solids Struct*, 29 (1992) 2493.