



A mechanical model for FRP-strengthened beams in bending

Un modello meccanico per travi inflesse rinforzate con FRP

S. Bennati, N. Dardano, P. S. Valvo

Dipartimento di Ingegneria Civile – Strutture, Università di Pisa, Largo Lucio Lazzarino, 56126 Pisa

ABSTRACT. FRP materials are currently used to repair and strengthen existing civil engineering constructions by bonding suitably disposed FRP laminae to the external surface of the structural elements to be reinforced. The success of such interventions, however, is threatened by delamination and decohesion phenomena. In particular, for concrete structures, delamination and decohesion phenomena can occur at different levels, involving the FRP laminae, the adhesive or the superficial layers of the concrete itself.

In this paper we analyse the problem of a beam strengthened by an FRP strip bonded to its intrados and subjected to applied bending couples at its end sections. In the proposed mechanical model the beam and reinforcement strip are modelled according to classical beam theory, while the adhesive and its neighbouring layers are modelled as an interface having a tri-linear constitutive law (elastic-softening-rupture). The model is described by a set of differential equations, endowed with appropriate boundary conditions. An analytical solution to the problem is determined, including explicit expressions for the main quantities of interest (internal forces, displacements, etc.). Based on the developed model, the reinforced beam exhibits an overall nonlinear mechanical response, ranging over several stages: from linear elastic behaviour to damage, until the complete debonding of the FRP reinforcement.

SOMMARIO. I materiali FRP sono impiegati ormai correntemente per interventi di consolidamento e rinforzo di costruzioni civili esistenti, nei quali lamine di FRP, opportunamente disposte, vengono incollate sulla superficie esterna degli elementi strutturali da rinforzare. Il successo di tali interventi può essere tuttavia compromesso da fenomeni di delaminazione e distacco che, nel caso specifico delle strutture di calcestruzzo, può manifestarsi a diversi livelli, coinvolgendo le lamine di FRP, l'adesivo e/o gli strati superficiali del calcestruzzo.

Nel presente lavoro affrontiamo il problema di una trave rinforzata con una striscia di FRP incollata all'intradosso, soggetta a coppie concentrate applicate alle sue estremità. Nel modello meccanico proposto la trave e la striscia di rinforzo sono modellate secondo la teoria delle travi classica, mentre l'adesivo e gli strati adiacenti sono modellati come un'interfaccia avente una legge costitutiva di tipo tri-lineare (elastico-softening-rottura). Il modello è descritto da un sistema di equazioni differenziali, dotato di opportune condizioni al contorno, che viene risolto analiticamente, ricavando espressioni esplicite per le principali grandezze di interesse (spostamenti, caratteristiche della sollecitazione, etc.). Il modello prevede per la trave rinforzata una risposta meccanica complessiva non lineare, articolata in più fasi: da quella elastica lineare a quella danneggiata, fino ad arrivare al completo distacco del rinforzo.

KEYWORDS. FRP strengthening; Adhesive; Beam theory; Interface.

INTRODUZIONE

I materiali compositi fibro-rinforzati a matrice polimerica (FRP) sono impiegati ormai correntemente per il consolidamento ed il rinforzo di costruzioni civili esistenti. Gli elementi strutturali esistenti – realizzati con materiali tradizionali quali, ad esempio, muratura, legno, calcestruzzo, acciaio etc. – vengono rinforzati incollando sulla loro superficie esterna lamine di FRP di forma opportuna (in uno o più strati, a realizzare un laminato), a seconda del tipo di prestazione dell'elemento che si desidera migliorare [1–4].

Tra le cause che possono compromettere il successo degli interventi di cui sopra sono sicuramente da considerare i fenomeni di delaminazione e distacco tra l'elemento da rinforzare ed il rinforzo di FRP. Nel caso specifico delle strutture di calcestruzzo, la delaminazione può manifestarsi a diversi livelli, coinvolgendo le lamine di FRP, l'adesivo e/o gli strati superficiali del calcestruzzo. La delaminazione è provocata dalle tensioni tangenziali che si sviluppano tra gli elementi incollati. Per questo, sono state messe a punto apposite prove di laboratorio per valutare la resistenza degli incollaggi in diverse condizioni di esercizio.

Una tipologia di prova molto diffusa è quella in cui una striscia di FRP viene incollata su un blocco di calcestruzzo e quindi sottoposta a trazione fino al suo completo distacco [5, 6]. Sono stati proposti diversi modelli teorici di tale prova, che differiscono, principalmente, per il legame costitutivo assunto per l'interfaccia tra calcestruzzo ed FRP. I diversi modelli, in genere, considerano una risposta iniziale di tipo elastico lineare, dove le tensioni tangenziali all'interfaccia sono proporzionali agli spostamenti relativi corrispondenti. Successivamente, i modelli assumono una risposta di tipo *softening*, che intende rappresentare il progressivo danneggiamento dell'interfaccia prima della rottura. Cottone e Giambanco [7] considerano una legge di tipo lineare decrescente per la fase di softening, mentre Cornetti e Carpinteri [8] propongono una legge di tipo esponenziale decrescente.

Nel presente lavoro affrontiamo il problema di una trave inflessa rinforzata con una striscia di FRP incollata all'intradosso, soggetta a coppie concentrate applicate alle estremità. Un problema simile, ma con un carico concentrato applicato in mezzzeria, è stato considerato da Carpinteri *et al.* [9]. Il modello meccanico qui proposto si basa sulle seguenti ipotesi semplificative:

- la trave è flessibile, ma inestensibile, e presenta un comportamento indefinitamente elastico;
- la striscia di rinforzo è priva di rigidezza flessionale, dunque risulta soggetta solo a sforzi assiali;
- l'interfaccia che rappresenta lo strato di adesivo e gli strati superficiali degli elementi incollati segue una legge sforzi tangenziali-spostamenti relativi di tipo tri-lineare elastico-softening-rottura.

Il modello meccanico è descritto da un sistema di equazioni differenziali, dotato di opportune condizioni al contorno. Il problema matematico che ne risulta è risolto analiticamente, ricavando espressioni esplicite per le principali grandezze di interesse (spostamenti, caratteristiche della sollecitazione, etc.).

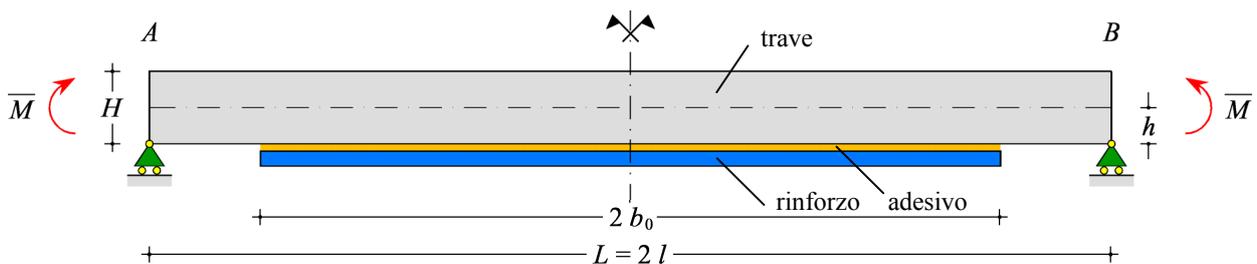


Figura 1: Trave inflessa con rinforzo di FRP.

Figure 1: FRP-strengthened beam in bending.

Il modello prevede per la trave rinforzata una risposta meccanica complessiva di tipo non lineare, nella quale sono riconoscibili alcune distinte fasi di comportamento. Nella prima fase, l'interfaccia è interamente in campo elastico; la soluzione analitica comprende due regioni corrispondenti, rispettivamente, alle parti di trave con e senza rinforzo. La prima fase di comportamento termina quando alle estremità del rinforzo, dove gli spostamenti relativi d'interfaccia sono massimi, si raggiungono le tensioni tangenziali corrispondenti al limite elastico. Nella seconda fase, le porzioni dell'interfaccia prossime alle estremità del rinforzo entrano nel campo di risposta softening; la soluzione analitica prevede allora tre regioni corrispondenti, rispettivamente, alla parte priva di rinforzo, a quella con interfaccia danneggiata ed a quella con interfaccia elastica. La seconda fase di comportamento termina quando alle estremità del rinforzo si



raggiungono gli spostamenti relativi ultimi, corrispondenti all'inizio della rottura. Nella terza fase di comportamento, le porzioni dell'interfaccia prossime alle estremità del rinforzo si rompono e, dunque, il rinforzo si stacca dalla trave; la soluzione analitica comprende ancora tre regioni corrispondenti, rispettivamente, alla parte di trave inizialmente priva di rinforzo con aggiunto il tratto su cui il rinforzo si è distaccato, alla parte di trave dove l'interfaccia è danneggiata ed alla parte dove l'interfaccia è ancora elastica. Al crescere dei carichi, le parti di interfaccia danneggiata e rotta si estendono fino ad interessare l'intera lunghezza della trave. Al completo distacco, la risposta complessiva del sistema diventa quella della trave inizialmente priva di rinforzo; questa ultima fase di comportamento, tuttavia, si raggiunge solo in maniera asintotica al crescere illimitato delle coppie applicate alla trave.

MODELLO MECCANICO

Consideriamo una trave *AB* di lunghezza $L = 2l$ e altezza della sezione trasversale *H*, semplicemente appoggiata e caricata alle estremità da due coppie uguali e opposte di intensità \bar{M} (Fig. 1). Una striscia di rinforzo di FRP è incollata centralmente all'intradosso della trave per una lunghezza $2b_0$. Indichiamo con *b* la distanza del baricentro della sezione della trave dal suo intradosso (nel caso di sezione rettangolare, $h = H/2$). Indichiamo, inoltre, con *E* e *J*, rispettivamente, il modulo di Young ed il momento d'inerzia della sezione della trave e con E_f e $A_f = B_f t_f$, rispettivamente, il modulo di Young e l'area della sezione trasversale della striscia di FRP (B_f e t_f indicano la larghezza e lo spessore della striscia stessa).

Considerata la simmetria del sistema, è possibile limitarne lo studio alla sola metà sinistra, introducendo opportuni vincoli in corrispondenza dell'asse di simmetria (Fig. 2). Introduciamo un'ascissa curvilinea *s* con origine all'estremo caricato della trave. Sia $a_0 = l - b_0$ la lunghezza del tratto inizialmente non rinforzato della trave. Indichiamo con *v* e ϕ , rispettivamente, lo spostamento trasversale e la rotazione (positiva se oraria) della sezione trasversale della trave; indichiamo con *w* lo spostamento assiale della sezione trasversale del rinforzo.

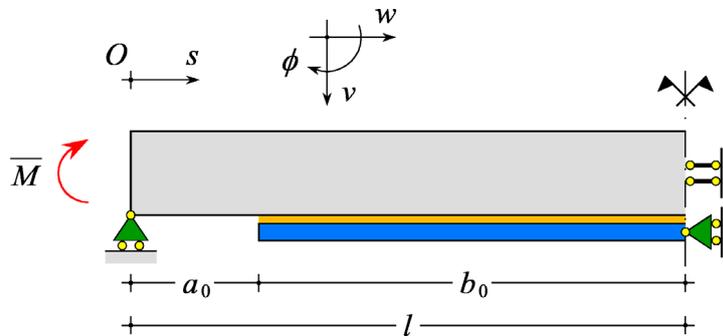


Figura 2: Modello della trave rinforzata.

Figure 2: Model of the strengthened beam.

Assumiamo che le tensioni tangenziali dell'interfaccia τ seguano la seguente legge costitutiva lineare a tratti (Fig. 3):

$$\tau(\Delta w) = \begin{cases} k \Delta w, & 0 \leq \Delta w \leq \Delta w_0 & \text{(risposta elastica),} \\ k_s (\Delta w_u - \Delta w), & \Delta w_0 < \Delta w \leq \Delta w_u & \text{(risposta softening),} \\ 0, & \Delta w_u < \Delta w & \text{(rottura),} \end{cases} \quad (1)$$

dove *k* e *k_s* sono le costanti elastiche che corrispondono, rispettivamente, ai tratti con risposta elastica e softening e

$$\Delta w = w + h \phi \quad (2)$$



è lo spostamento relativo fra trave e rinforzo in corrispondenza dell'interfaccia; Δw_0 e Δw_u sono gli spostamenti relativi che corrispondono, rispettivamente, al limite elastico ed alla rottura dell'interfaccia.

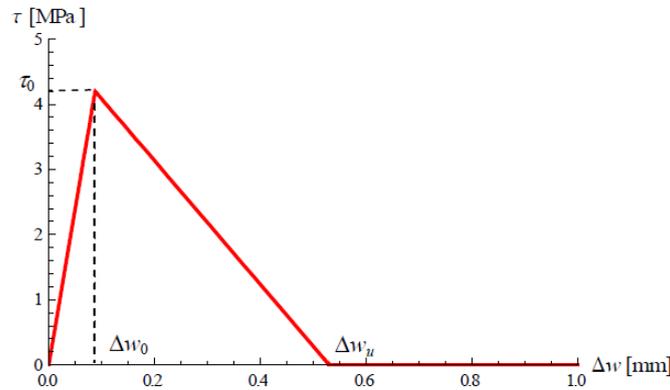


Figura 3: Legame costitutivo per l'interfaccia.

Figure 3: Constitutive law for the interface.

PROBLEMA DIFFERENZIALE

Il comportamento del sistema trave-rinforzo è differente a seconda del tipo di risposta fornita dall'interfaccia. È possibile individuare tre casi, le cui soluzioni saranno prima ricavate separatamente e successivamente impiegate per ricostruire la risposta complessiva del sistema nelle sue diverse fasi di comportamento.

Caso a) *Interfaccia elastica*

Nel caso in cui la risposta dell'interfaccia è in campo elastico, dalle equazioni di equilibrio e dal legame costitutivo si ricava il seguente sistema di equazioni differenziali che governa il problema (qui e nel seguito l'apice indica l'operazione di derivazione rispetto all'ascissa s ; le grandezze relative a questo caso sono indicate col pedice $e = \text{elastic}$):

$$\begin{cases} v_e''''(s) - \frac{kB_f h^2}{EJ} v_e''(s) - \frac{kB_f h}{EJ} w_e'(s) = 0, \\ w_e''(s) - \frac{kB_f}{E_f A_f} w_e(s) - \frac{kB_f h}{E_f A_f} v_e'(s) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Risolvendo il sistema (3) si ottiene la soluzione generale per lo spostamento trasversale della trave,

$$v_e(s) = A_1 \cosh \alpha s + A_2 \sinh \alpha s + A_3 s^3 + A_4 s^2 + A_5 s + A_6, \quad (4)$$

e per lo spostamento assiale del rinforzo,

$$w_e(s) = \frac{EJ}{E_f A_f h} \alpha (A_1 \sinh \alpha s + A_2 \cosh \alpha s) - 3A_3 h s^2 - 2A_4 h s - 6A_5 \frac{E_f A_f h}{B_f k} - A_5 h, \quad (5)$$

dove $\alpha^2 = kB_f (1/E_f A_f + h^2/EJ)$.

Quindi, si possono ricavare la rotazione della sezione della trave,

$$\phi_e(s) = v_e'(s) = \alpha (A_1 \sinh \alpha s + A_2 \cosh \alpha s) + 3A_3 s^2 + 2A_4 s + A_5, \quad (6)$$

lo spostamento relativo all'interfaccia,



$$\Delta w_e(s) = w_e(s) + h \phi_e(s) = \frac{EJ}{B_f kh} \alpha^3 (A_1 \sinh \alpha s + A_2 \cosh \alpha s) - 6A_3 \frac{E_f A_f h}{B_f k}, \quad (7)$$

la tensione tangenziale all'interfaccia,

$$\tau_e(s) = k \Delta w_e(s) = \frac{EJ}{B_f h} \alpha^3 (A_1 \sinh \alpha s + A_2 \cosh \alpha s) - 6A_3 \frac{E_f A_f h}{B_f}, \quad (8)$$

il momento flettente nella trave,

$$M_e(s) = -EJ v_e''(s) = -EJ [\alpha^2 (A_1 \cosh \alpha s + A_2 \sinh \alpha s) + 6A_3 s + 2A_4], \quad (9)$$

la forza di taglio nella trave,

$$T_e(s) = -EJ v_e'''(s) + h B_f \tau_e(s) = -6A_3 (EJ + E_f A_f h^2), \quad (10)$$

ed, infine, la forza normale nel rinforzo,

$$N_e(s) = EA w_e'(s) = \frac{EJ}{h} \alpha^2 (A_1 \cosh \alpha s + A_2 \sinh \alpha s) - 2E_f A_f h (3A_3 s + A_4). \quad (11)$$

Caso b) *Interfaccia softening*

Nel caso in cui l'interfaccia risponde in campo softening, dalle equazioni di equilibrio e dal legame costitutivo si ricava il seguente sistema di equazioni differenziali (le grandezze relative a questo caso sono indicate col pedice $s = \textit{softening}$):

$$\begin{cases} v_s''''(s) + \frac{k_s B_f h^2}{EJ} v_s''(s) + \frac{k_s B_f h}{EJ} w_s'(s) = 0, \\ w_s''(s) + \frac{k_s B_f}{E_f A_f} w_s(s) + \frac{k_s B_f h}{E_f A_f} v_s'(s) - \frac{k_s B_f}{E_f A_f} \Delta w_u = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Risolviendo il sistema (12) si ottiene la soluzione generale per lo spostamento trasversale della trave,

$$v_s(s) = B_1 \cos \beta s + B_2 \sin \beta s + B_3 s^3 + B_4 s^2 + B_5 s + B_6 \quad (13)$$

e per lo spostamento assiale del rinforzo,

$$w_s(s) = \frac{EJ}{E_f A_f h} \beta (-B_1 \sin \beta s + B_2 \cos \beta s) - 3B_3 h s^2 - 2B_4 h s + 6B_3 \frac{E_f A_f h}{B_f k_s} - B_5 h + \Delta w_u, \quad (14)$$

dove $\beta^2 = k_s B_f (1/E_f A_f + h^2/EJ)$.

Quindi, si possono ricavare la rotazione della sezione della trave,

$$\phi_s(s) = v_s'(s) = \beta (-B_1 \sin \beta s + B_2 \cos \beta s) + 3B_3 s^2 + 2B_4 s + B_5, \quad (15)$$

lo spostamento relativo all'interfaccia,

$$\Delta w_s(s) = w_s(s) + h \phi_s(s) = \frac{EJ}{B_f k_s h} \beta^3 (-B_1 \sin \beta s + B_2 \cos \beta s) + 6B_3 \frac{E_f A_f h}{B_f k_s} + \Delta w_u, \quad (16)$$

la tensione tangenziale all'interfaccia,

$$\tau_s(s) = k_s [\Delta w_u - \Delta w_s(s)] = \frac{EJ}{B_f h} \beta^3 (B_1 \sin \beta s - B_2 \cos \beta s) - 6B_3 \frac{E_f A_f h}{B_f}, \quad (17)$$



il momento flettente nella trave,

$$M_s(s) = -EJv_s''(s) = EJ[\beta^2(B_1 \cos \beta s + B_2 \sin \beta s) - 6B_3s - 2B_4], \quad (18)$$

la forza di taglio nella trave,

$$T_s(s) = -EJv_s'''(s) + hB_f\tau_s(s) = -6B_3(EJ + E_fA_fh^2), \quad (19)$$

ed, infine, la forza normale nel rinforzo,

$$N_s(s) = EA_w v_s'(s) = -\frac{EJ}{h} \beta^2(B_1 \cos \beta s + B_2 \sin \beta s) - 2E_fA_fh(3B_3s + B_4). \quad (20)$$

Caso c) Interfaccia rotta (o rinforzo assente)

Nel caso in cui l'interfaccia è rotta (o il rinforzo è assente perché mancante fin dall'inizio), l'equazione differenziale per la trave è la seguente (le grandezze relative a questo caso sono indicate col pedice $d = debonded$):

$$EJv_d''''(s) = 0. \quad (21)$$

Lo spostamento trasversale della trave ha la seguente espressione

$$v_d(s) = C_1s^3 + C_2s^2 + C_3s + C_4. \quad (22)$$

Quindi, si possono ricavare la rotazione della sezione della trave,

$$\phi_d(s) = v_d'(s) = 3C_1s^2 + 2C_2s + C_3, \quad (23)$$

il momento flettente nella trave,

$$M_d(s) = -EJv_d''(s) = -EJ(6C_1s + 2C_2), \quad (24)$$

ed, infine, la forza di taglio nella trave,

$$T_d(s) = -EJv_d'''(s) = -6C_1EJ. \quad (25)$$

SOLUZIONE NELLE DIVERSE FASI DI COMPORTAMENTO

Fase 1) Interfaccia elastica

Nella fase 1 di comportamento, l'interfaccia fra trave e rinforzo è tutta in fase elastica. La trave rinforzata può essere suddivisa in due regioni: la regione priva di rinforzo, di lunghezza a_0 , e la regione con interfaccia elastica, di lunghezza $b_0 = l - a_0$ (Fig. 4).

Imponendo le condizioni al contorno,

$$\begin{aligned} v_d(0) &= 0, & M_d(0) &= \bar{M}, \\ v_d(a_0) &= v_e(a_0), & \phi_d(a_0) &= \phi_e(a_0), & M_d(a_0) &= M_e(a_0), & T_d(a_0) &= T_e(a_0), & N_e(a_0) &= 0, \\ \phi_e(l) &= 0, & T_e(l) &= 0, & w_e(l) &= 0, \end{aligned} \quad (26)$$

si ricavano le costanti di integrazione per questa fase. Le loro espressioni analitiche, tuttavia, essendo piuttosto lunghe, vengono omesse in questa sede e saranno presentate in una versione estesa del presente lavoro.

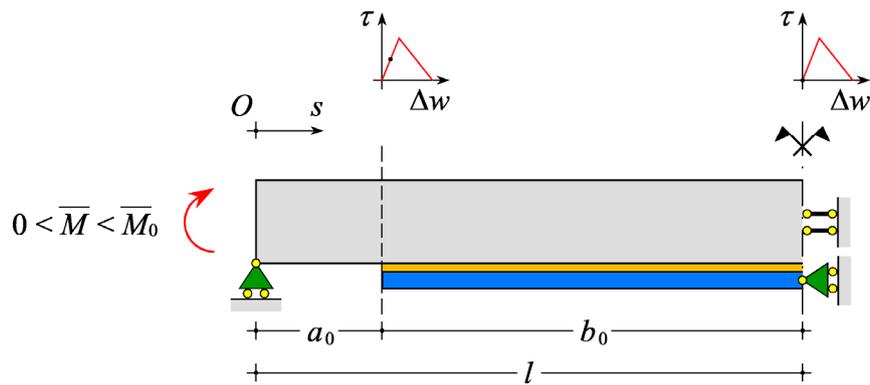


Figura 4: Fase 1) Interfaccia elastica.

Figure 4: Stage 1) Elastic interface.

La fase 1 ha termine quando lo spostamento relativo (massimo) all'estremo della striscia di FRP raggiunge il valore al limite elastico, ovvero quando

$$\Delta w(a_0) = \Delta w_0. \quad (27)$$

A tale condizione corrisponde il seguente valore della coppia applicata alla trave:

$$\bar{M}_0 = \Delta w_0 \frac{EJ}{h} \alpha \coth \alpha b_0. \quad (28)$$

Fase 2) Interfaccia elastica-danneggiata

Nella fase 2 di comportamento, l'interfaccia fra trave e rinforzo è in parte in campo elastico (interfaccia elastica), in parte in campo softening (interfaccia danneggiata). La trave rinforzata può essere suddivisa in tre regioni: la regione priva di rinforzo, di lunghezza a_0 , la regione con interfaccia danneggiata, di lunghezza c (da determinare), e la regione con interfaccia elastica, di lunghezza $d = b_0 - c$ (Fig. 5).

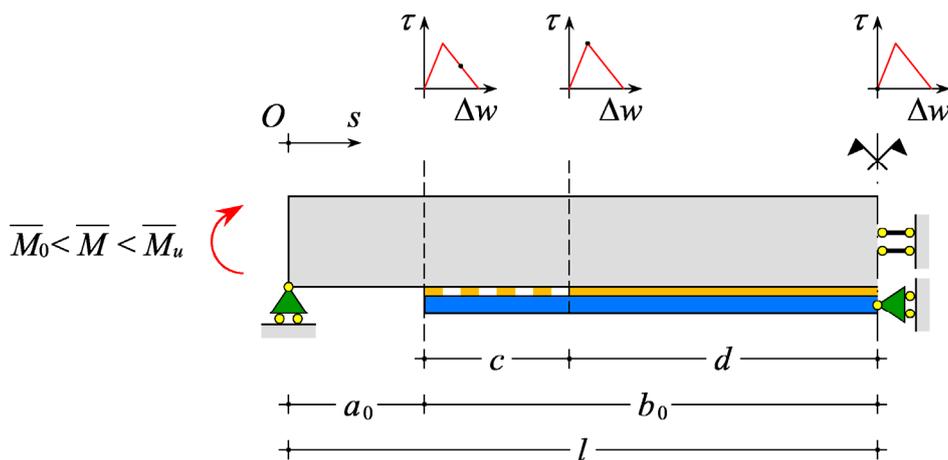


Figura 5: Fase 2) Interfaccia elastica-danneggiata.

Figure 5: Stage 2) Elastic-damaged interface.

Imponendo le condizioni al contorno,



$$\begin{aligned}
 v_d(0) &= 0, \quad M_d(0) = \bar{M}, \\
 v_d(a_0) &= v_s(a_0), \quad \phi_d(a_0) = \phi_s(a_0), \quad M_d(a_0) = M_s(a_0), \quad T_d(a_0) = T_s(a_0), \quad N_s(a_0) = 0, \\
 v_s(a_0 + c) &= v_e(a_0 + c), \quad \phi_s(a_0 + c) = \phi_e(a_0 + c), \quad M_s(a_0 + c) = M_e(a_0 + c), \\
 T_s(a_0 + c) &= T_e(a_0 + c), \quad w_s(a_0 + c) = w_e(a_0 + c), \quad N_s(a_0 + c) = N_e(a_0 + c), \\
 \phi_e(l) &= 0, \quad T_e(l) = 0, \quad w_e(l) = 0,
 \end{aligned} \tag{29}$$

si ricavano le costanti di integrazione per questa fase. Le loro espressioni analitiche, tuttavia, essendo piuttosto lunghe, vengono omesse in questa sede e saranno presentate in una versione estesa del presente lavoro.

La lunghezza c , che risulta incognita, può essere determinata imponendo che lo spostamento relativo nella sezione di raccordo tra la regione danneggiata e quella elastica sia uguale al valore corrispondente al limite elastico, ovvero che sia

$$\Delta w(a_0 + c) = \Delta w_0. \tag{30}$$

Esplicitando l'Eq. (30) e tenendo conto delle espressioni delle costanti di integrazione, ricavate dalle Eq. (29), si ottiene il valore della coppia applicata corrispondente a un dato valore di c ,

$$\bar{M} = \bar{M}_0 \left\{ \cos \beta c \coth[\alpha(b_0 - c)] + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta c \right\} \tanh \alpha b_0. \tag{31}$$

Viceversa, risolvendo (per via numerica) l'Eq. (31) rispetto a c , se ne può ricavare il valore in funzione di un dato \bar{M} .

La lunghezza c cresce con \bar{M} durante tutta la fase 2, che ha termine quando lo spostamento relativo (massimo) all'estremo della striscia di FRP raggiunge il valore corrispondente alla rottura dell'interfaccia, ovvero quando

$$\Delta w(a_0) = \Delta w_u. \tag{32}$$

Esplicitando l'Eq. (32), dopo alcune semplificazioni, si ricava l'equazione che (risolta numericamente) fornisce il valore massimo di c , indicato con c_u , corrispondente al termine della fase 2:

$$\alpha \tanh[\alpha(b_0 - c_u)] = \beta \tan \beta c_u. \tag{33}$$

Si osserva che poiché il primo membro dell'Eq. (33) è sempre positivo, deve esserlo anche il secondo. Pertanto, deve essere rispettata la condizione

$$c_u \leq c_c = \frac{\pi}{2\beta}, \tag{34}$$

dove c_c è una lunghezza caratteristica. Peraltro, poiché per valori numerici corrispondenti a problemi correnti la tangente iperbolica che compare nell'Eq. (33) assume valori prossimi all'unità, invece che risolvere per via numerica l'Eq. (33) è anche possibile utilizzare l'espressione approssimata

$$c_u \cong \frac{1}{\beta} \arctan \frac{\alpha}{\beta}. \tag{35}$$

Il valore della coppia applicata corrispondente al termine della fase 2, indicato con \bar{M}_u , si ottiene sostituendo il valore di c_u nell'Eq. (31).

Fase 3) Interfaccia elastica-danneggiata-rotta

Al termine della fase 2, l'interfaccia comincia a rompersi dall'estremo più sollecitato ed il rinforzo si stacca dalla trave. Nella fase 3, la trave rinforzata può essere suddivisa in tre regioni: la regione priva di rinforzo (comprendente quella inizialmente non rinforzata e quella su cui il rinforzo si è staccato), di lunghezza a (da determinare), la regione con interfaccia danneggiata, di lunghezza c (anch'essa da determinare), e la regione con interfaccia elastica, di lunghezza $d = l - a - c$ (Fig. 6).

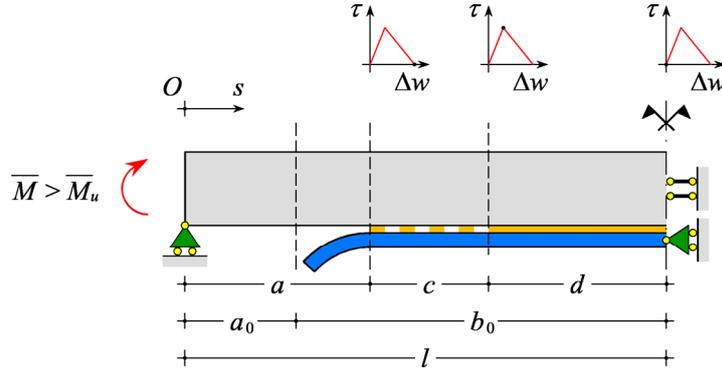


Figura 6: Fase 3) Interfaccia elastica-danneggiata-rotta.

Figure 6: Stage 3) Elastic-damaged-broken interface.

Imponendo le condizioni al contorno,

$$\begin{aligned}
 v_d(0) &= 0, & M_d(0) &= \bar{M}, \\
 v_d(a) &= v_s(a), & \phi_d(a) &= \phi_s(a), & M_d(a) &= M_s(a), & T_d(a) &= T_s(a), & N_s(a) &= 0, \\
 v_s(a+c) &= v_e(a+c), & \phi_s(a+c) &= \phi_e(a+c), & M_s(a+c) &= M_e(a+c), \\
 T_s(a+c) &= T_e(a+c), & w_s(a+c) &= w_e(a+c), & N_s(a+c) &= N_e(a+c), \\
 \phi_e(l) &= 0, & T_e(l) &= 0, & w_e(l) &= 0,
 \end{aligned} \tag{36}$$

si ricavano le costanti di integrazione per questa fase. Le loro espressioni analitiche, tuttavia, essendo piuttosto lunghe, vengono omesse in questa sede e saranno presentate in una versione estesa del presente lavoro.

Le lunghezze a e c , che risultano entrambe incognite, possono essere determinate imponendo che lo spostamento relativo nella sezione di raccordo tra la regione danneggiata e quella elastica sia uguale al valore corrispondente al limite elastico e che lo spostamento relativo all'estremità della striscia sia quello che corrisponde alla incipiente rottura dell'interfaccia, ovvero che siano

$$\Delta w(a) = \Delta w_u \quad \text{e} \quad \Delta w(a+c) = \Delta w_0. \tag{37}$$

Sostituendo nelle Eq. (37) le espressioni che tengono conto delle costanti di integrazione fornite dalla soluzione del sistema (36), dopo alcune semplificazioni, si ottengono

$$\begin{cases}
 EJ\alpha\beta \Delta w_u - h\bar{M} \{ \alpha \sin \beta c + \beta \cos \beta c \tanh[\alpha(l-a-c)] \} = 0, \\
 EJ\alpha\beta \Delta w_0 \cos \beta c + (h\bar{M} \beta + EJ\alpha^2 \Delta w_0 \sin \beta c) \tanh[\alpha(l-a-c)] = 0.
 \end{cases} \tag{38}$$

Dalla prima delle Eq. (38) si ricava

$$\tanh[\alpha(l-a-c)] = \frac{\alpha}{\cos \beta c} \left(\frac{\Delta w_u}{\bar{M}} \frac{EJ}{h} - \frac{\sin \beta c}{\beta} \right) \tag{39}$$

che sostituito nella seconda fornisce

$$(EJ\alpha^2 \Delta w_0 - h\bar{M} \beta \sin \beta c) [EJ(\alpha^2 + \beta^2) \Delta w_0 \sin \beta c - h\bar{M} \beta] = 0. \tag{40}$$

L'Eq. (40) ha due possibili soluzioni, una delle quali, tuttavia, viene scartata poiché conduce a valori complessi di a . Pertanto, tenendo anche conto che $\Delta w_u / \Delta w_0 = 1 + \alpha^2 / \beta^2$, si trovano



$$a = l - c - \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctanh}\left(\frac{\beta}{\alpha} \tan \beta c\right) \quad \text{e} \quad \bar{M} = \Delta w_0 \frac{EJ}{h} \frac{\alpha^2}{\beta \sin \beta c}. \quad (41)$$

Poiché, per motivi fisici, la lunghezza a può solo aumentare, consideriamo la sua derivata rispetto a c . Si osserva che affinché a sia crescente è necessario che nella fase 3 di comportamento c decresca dal valore c_u fino a zero. Contemporaneamente, a cresce dal valore a_0 al valore l , cioè fino al completo distacco del rinforzo. Tale situazione, in realtà, si raggiunge solo asintoticamente. Infatti, dalle Eq. (41) si vede che al tendere a zero di c , la lunghezza a tende ad l e la coppia applicata \bar{M} cresce illimitatamente.

Fase 4 – Interfaccia rotta

Nella fase 4, in realtà raggiunta solo asintoticamente, l'interfaccia fra trave e rinforzo è interamente rotta, ad eccezione della sezione di mezzeria dove, per motivi di simmetria, lo spostamento relativo d'interfaccia e la corrispondente tensione tangenziale sono sempre nulli. La trave si comporta come una trave priva di rinforzo (Fig. 7).

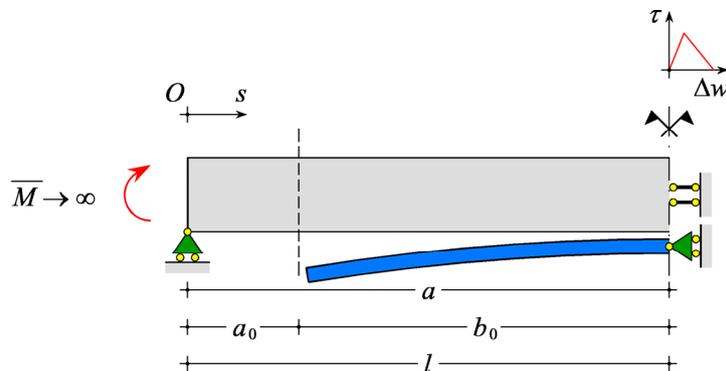


Figura 7: Fase 4) Interfaccia rotta.

Figure 7: Stage 4) Broken interface.

Imponendo le condizioni al contorno,

$$\begin{aligned} v_d(0) = 0, \quad M_d(0) = \bar{M}, \\ \phi_d(l) = 0, \quad T_d(l) = 0, \end{aligned} \quad (42)$$

si ricavano le costanti di integrazione per questa fase

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{\bar{M}}{2EJ}, \quad C_3 = \frac{\bar{M}l}{EJ}, \quad C_4 = 0. \quad (43)$$

APPLICAZIONE NUMERICA

A titolo di esempio si considera una trave di calcestruzzo di lunghezza $L = 6$ m e sezione trasversale rettangolare di dimensioni $B = 30$ cm e $H = 40$ cm. La striscia di FRP di rinforzo ha larghezza $B_f = 25$ cm e spessore $t_f = 0.5$ cm. I moduli di Young della trave e dell'FRP valgono, rispettivamente, $E = 30000$ MPa e $E_f = 256000$ MPa. Le costanti che definiscono il legame dell'interfaccia sono $k = 48$ N/mm³, $\tau_0 = 4.2$ MPa e $\Delta w_u = 0.53$ mm.

Utilizzando l'Eq. (28) si ricava il valore della coppia applicata al limite elastico, $\bar{M}_0 = 144.73$ kN m. Inoltre, dall'Eq. (34) si ricava il valore della lunghezza caratteristica della regione danneggiata, $c_c = 512.5$ mm, mentre risolvendo per via numerica l'Eq. (33) si determina il valore $c_u = 376.0$ mm (Fig. 8). Da quest'ultimo, tramite l'Eq. (31), si ricava $\bar{M}_u = 356.21$ kN m.

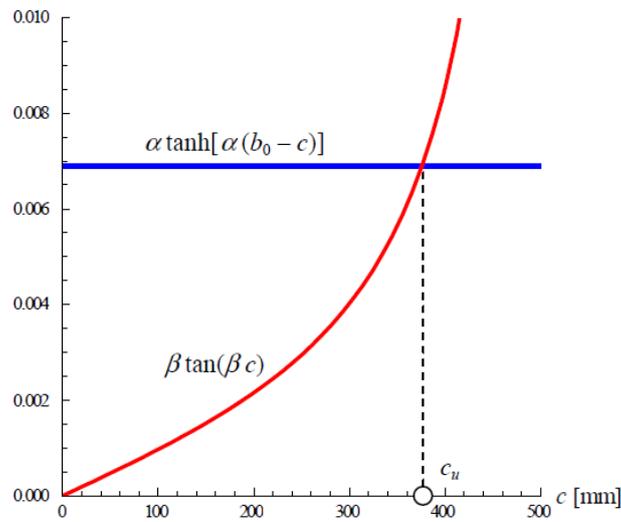


Figura 8: Determinazione di c_u .

Figure 8: Determination of c_u .

La Fig. 9 mostra l'andamento dello spostamento trasversale della trave v in funzione dell'ascissa curvilinea s , per quattro valori della coppia applicata \bar{M} corrispondenti alle quattro fasi di comportamento descritte nel paragrafo precedente.

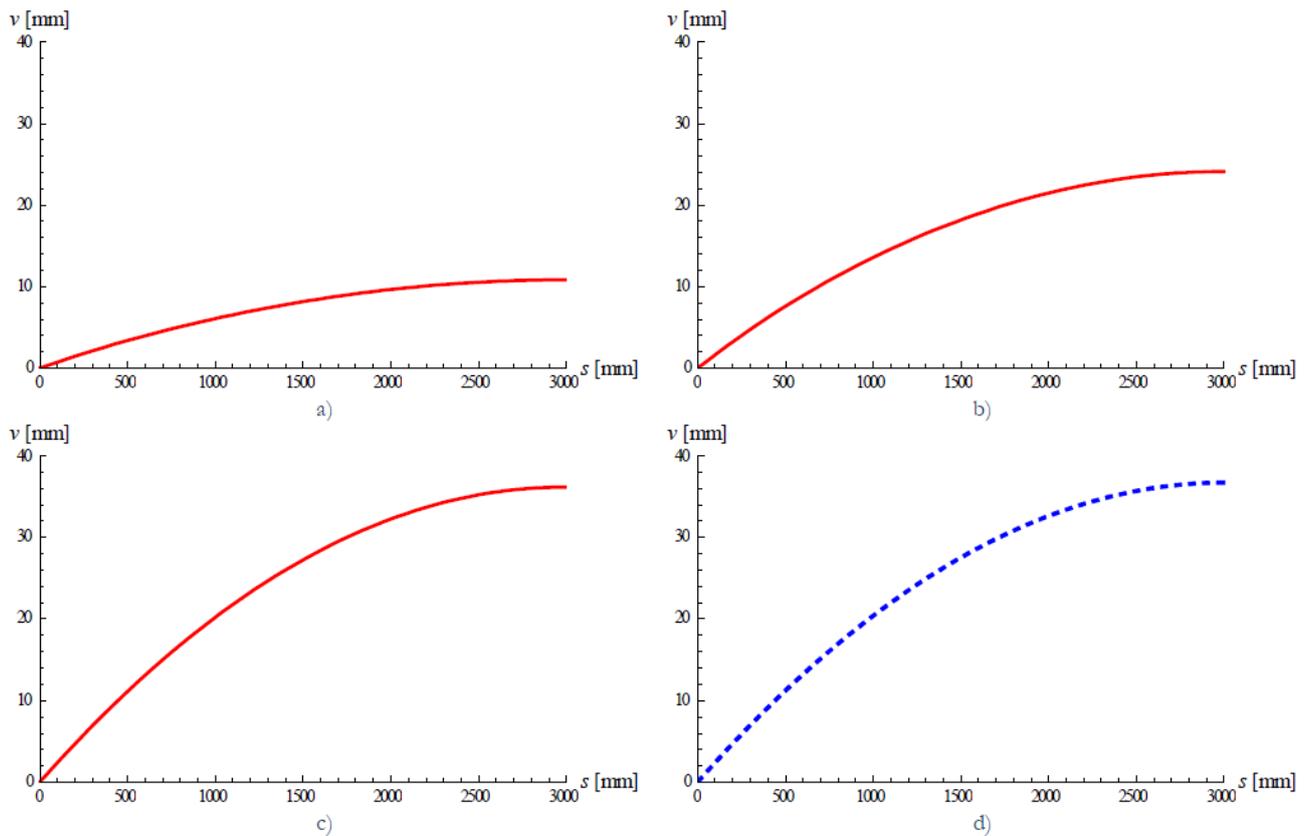


Figura 9: Spostamento trasversale v : a) fase 1: $\bar{M} = \bar{M}_0$; b) fase 2: $\bar{M} = 0.9\bar{M}_u$; c) fase 3: $\bar{M} = 1.1\bar{M}_u$; d) fase 4: $\bar{M} = 1.1\bar{M}_u$.

Figure 9: Transverse displacement v : a) stage 1: $\bar{M} = \bar{M}_0$; b) stage 2: $\bar{M} = 0.9\bar{M}_u$; c) stage 3: $\bar{M} = 1.1\bar{M}_u$; d) stage 4: $\bar{M} = 1.1\bar{M}_u$.



La Fig. 10 mostra l'andamento dello spostamento relativo Δw e della tensione tangenziale all'interfaccia τ in funzione dell'ascissa curvilinea s , per tre valori della coppia applicata \bar{M} corrispondenti alle prime tre fasi di comportamento descritte nel paragrafo precedente. Come si può osservare, al crescere di \bar{M} , lo spostamento relativo nella sezione di estremità del rinforzo aumenta: quando tale spostamento supera i valori Δw_0 e Δw_u , si manifestano, rispettivamente, l'inizio del comportamento softening dell'interfaccia ed il distacco del rinforzo dal supporto.

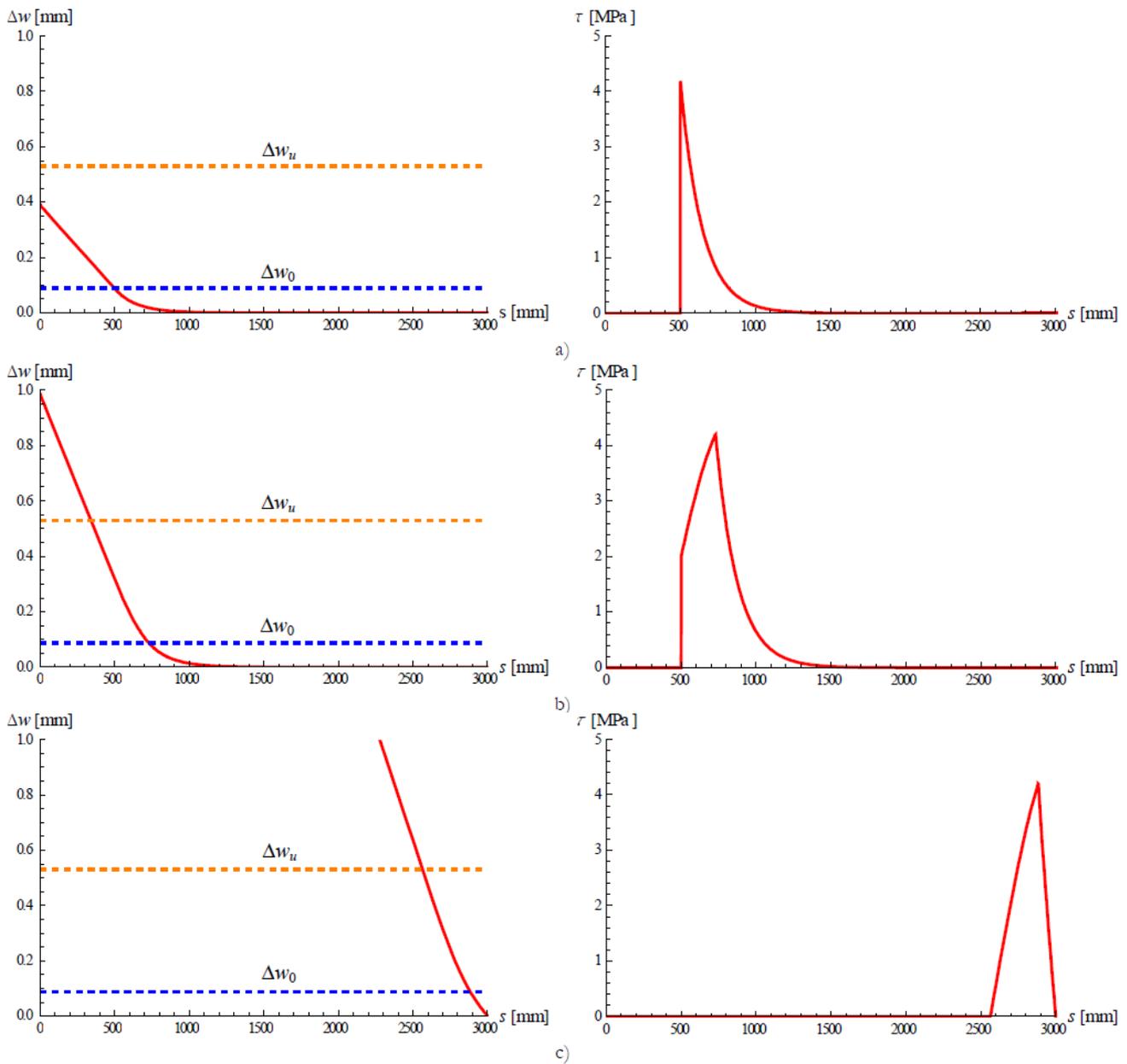


Figura 10: Spostamento relativo Δw e tensione tangenziale all'interfaccia τ . a) fase 1: $\bar{M} = \bar{M}_0$; b) fase 2: $\bar{M} = 0.9\bar{M}_u$; c) fase 3: $\bar{M} = 1.1\bar{M}_u$.

Figure10: Interfacial relative displacement Δw and shear stress τ : a) stage 1: $\bar{M} = \bar{M}_0$; b) stage 2: $\bar{M} = 0.9\bar{M}_u$; c) stage 3: $\bar{M} = 1.1\bar{M}_u$.

La Fig. 11 mostra l'andamento del momento flettente nella trave M in funzione dell'ascissa curvilinea s , per quattro valori della coppia applicata \bar{M} corrispondenti alle quattro fasi di comportamento descritte nel paragrafo precedente. Si osserva che, al crescere di \bar{M} ed al conseguente progressivo distacco del rinforzo, la risposta della trave rinforzata tende a quella della trave priva di rinforzo.

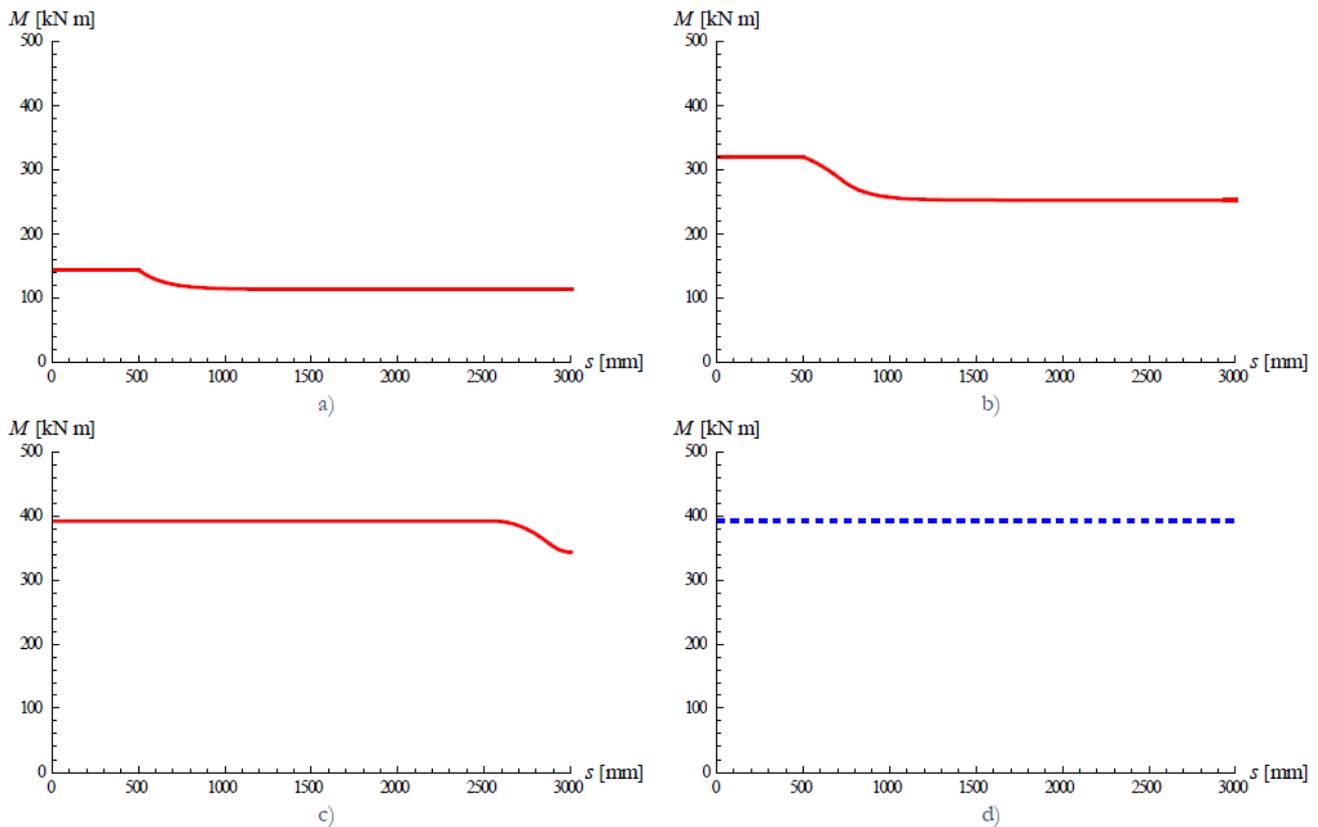


Figura 11: Momento flettente M : a) fase 1: $\bar{M} = \bar{M}_0$; b) fase 2: $\bar{M} = 0.9\bar{M}_u$; c) fase 3: $\bar{M} = 1.1\bar{M}_u$; d) fase 4 (trave priva di rinforzo): $\bar{M} = 1.1\bar{M}_u$.

Figure 11: Bending moment M : a) stage 1: $\bar{M} = \bar{M}_0$; b) stage 2: $\bar{M} = 0.9\bar{M}_u$; c) stage 3: $\bar{M} = 1.1\bar{M}_u$; d) stage 4 (no strengthening): $\bar{M} = 1.1\bar{M}_u$.

La Fig. 12 mostra l'andamento della forza normale nella striscia di rinforzo N in funzione dell'ascissa curvilinea s , per tre valori della coppia applicata \bar{M} corrispondenti alle prime tre fasi di comportamento descritte nel paragrafo precedente. Si osserva che, al crescere di \bar{M} ed al conseguente progressivo distacco del rinforzo, la lunghezza della parte attiva del rinforzo si riduce progressivamente (tendendo a zero nel limite per $\bar{M} \rightarrow \infty$).

La Fig. 13 mostra l'andamento della coppia applicata \bar{M} in funzione dello spostamento trasversale in mezzzeria $\delta = v(l)$ nelle diverse fasi di comportamento. La curva blu tratteggiata si riferisce alla trave priva di rinforzo (Fase 4).

La Fig. 14 mostra la lunghezza della regione danneggiata c in funzione della lunghezza della zona priva di rinforzo a . Durante la fase 2, c cresce da 0 a c_u , mentre la coppia applicata passa da \bar{M}_0 a \bar{M}_u ; durante la fase 3, c decresce da c_u a 0, mentre a aumenta dal valore iniziale a_0 fino alla semi-lunghezza della trave l (completo distacco del rinforzo).

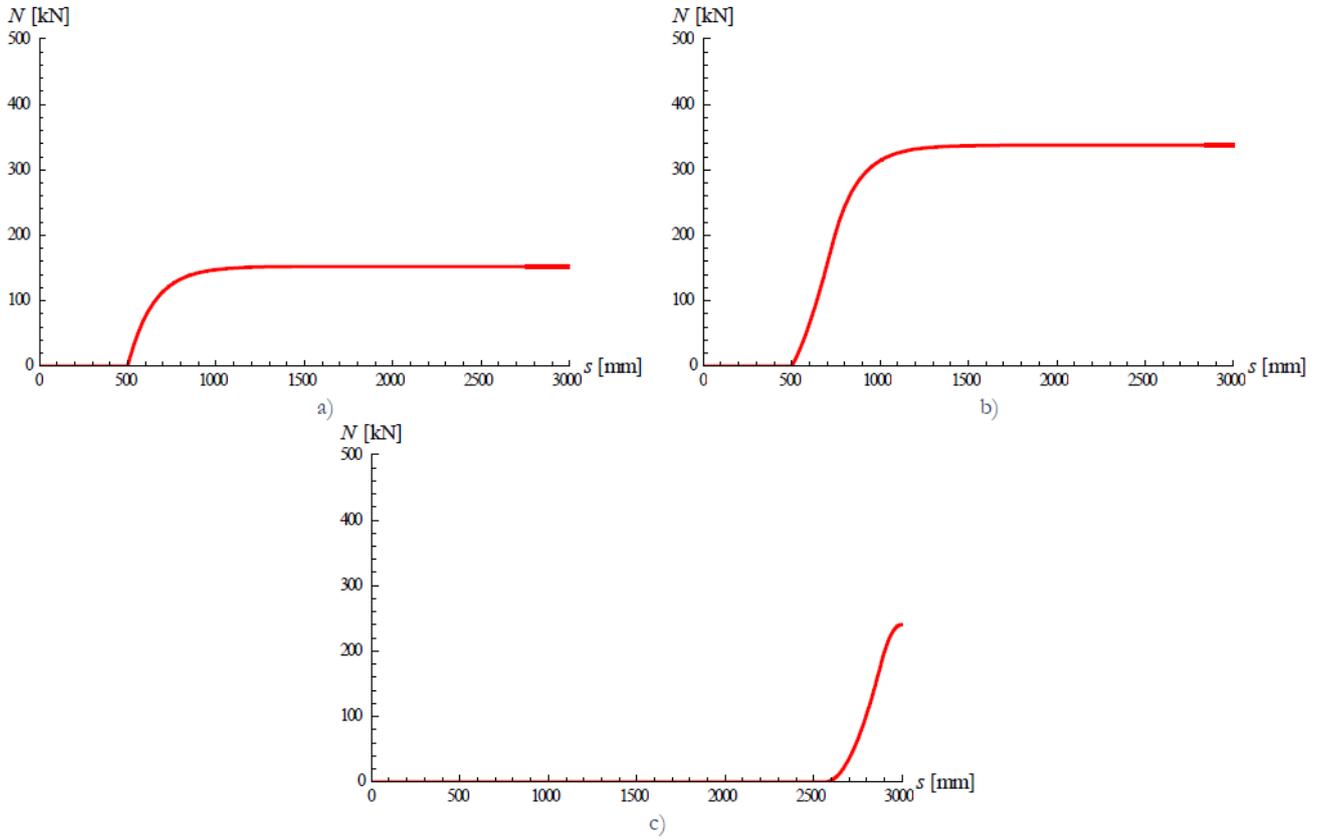


Figura 12: Forza normale N : a) fase 1: $\bar{M} = \bar{M}_0$; b) fase 2: $\bar{M} = 0.9\bar{M}_u$; c) fase 3: $\bar{M} = 1.1\bar{M}_u$.

Figure 12: Axial force N : a) stage 1: $\bar{M} = \bar{M}_0$; b) stage 2: $\bar{M} = 0.9\bar{M}_u$; c) stage 3: $\bar{M} = 1.1\bar{M}_u$.

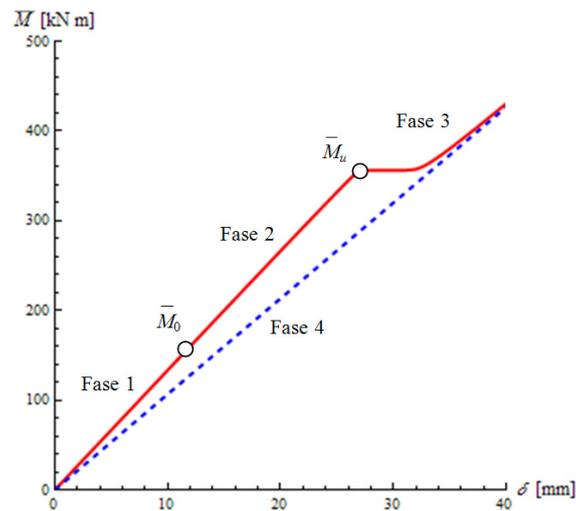


Figura 13: Coppia applicata \bar{M} in funzione dello spostamento trasversale in mezzeria δ .

Figure 13: Applied couple \bar{M} as a function of the transverse displacement of the mid-span section δ .

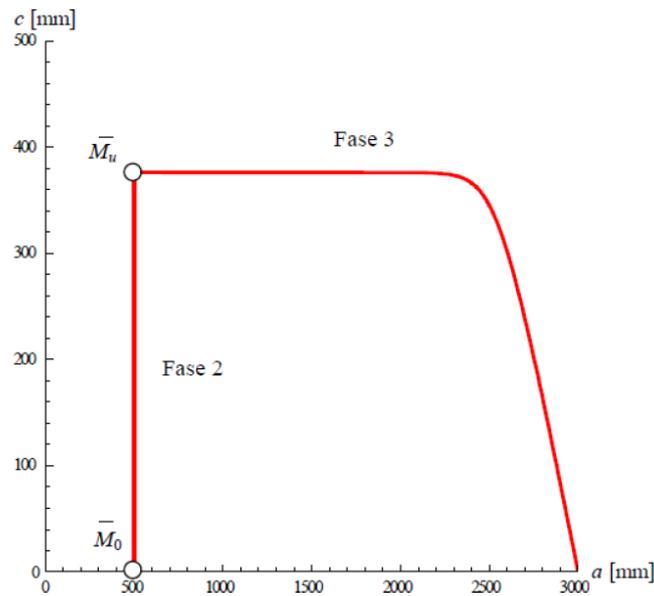


Figura 14: Lunghezza della regione danneggiata c in funzione della lunghezza della regione distaccata a .

Figure 14: Length of damaged region c as a function of the length of the debonded region a .

CONCLUSIONI

Nell'articolo è stato analizzato il problema di una trave rinforzata con una striscia di FRP incollata all'intradosso, soggetta a coppie concentrate applicate alle sue estremità. È stato messo a punto un modello meccanico dove la trave e la striscia di rinforzo sono modellate secondo la teoria delle travi classica, mentre l'adesivo e gli strati adiacenti sono modellati come un'interfaccia avente una legge costitutiva di tipo tri-lineare (elastico-softening-rottura). Il problema differenziale che descrive il modello è stato risolto analiticamente, ricavando espressioni esplicite per le principali grandezze di interesse (spostamenti, caratteristiche della sollecitazione, etc.). Il modello prevede per la trave rinforzata una risposta meccanica complessiva non lineare, articolata in più fasi: da quella elastica lineare a quella danneggiata, fino ad arrivare al completo distacco del rinforzo.

Il presente lavoro costituisce, comunque, un "work in progress", di cui sono stati presentati i primi parziali risultati. Ulteriori studi sono in corso per chiarire la dipendenza del tipo di risposta del sistema dai principali parametri del problema. Inoltre, per validare il modello sarà indispensabile effettuare un confronto con le previsioni di altri modelli simili, sia analitici sia numerici, e con i risultati di prove sperimentali.

BIBLIOGRAFIA

- [1] L. Hollaway, M. Leeming, *Strengthening of reinforced concrete structures*, Woodhead Publishing, UK (1999).
- [2] V. Zerbo, A. Di Tommaso, L. Ceriolo, In: *Proceedings of structural analysis of historical constructions*, Balkema (2004).
- [3] L. C. Bank, *Composites for Construction*, John Wiley & Sons, New Jersey (2006).
- [4] CNR-DT 200/2004, *Istruzioni per la Progettazione, l'Esecuzione ed il Controllo di Interventi di Consolidamento Statico mediante l'utilizzo di Compositi Fibrorinforzati*, rev. 7 (2008).
- [5] J. Yao, J. G. Teng, J. F. Chen, *Compos. Part B-Eng.*, 36 (2005) 99.
- [6] C. Mazzotti, M. Savoia, B. Ferracuti, *Constr. Build. Mater.*, 23 (2009) 1529.
- [7] A. Cottone, G. Giambanco, *Eng. Fract. Mech.*, 76 (2009) 1957.
- [8] P. Cornetti, A. Carpinteri, *Eng. Struct.*, 33 (2011) 1988.
- [9] A. Carpinteri, P. Cornetti, N. Pugno, *Eng. Struct.*, 31 (2009) 2436.