



Un modello teorico per lo studio del fenomeno di imbarcamento in rivestimenti di marmo soggetti a cicli termici

A.M. Ferrero, M. Migliazza, A. Spagnoli

Università di Parma, Dipartimento di Ingegneria Civile, dell'Ambiente, del Territorio e Architettura, Viale Usberti 181/A, 43100 Parma; spagnoli@unipr.it

RIASSUNTO. E' noto come lastre di marmo utilizzate in rivestimenti di facciate possano evidenziare un fenomeno di imbarcamento (*bowing*) anche dopo un breve periodo di esposizione alle azioni ambientali. In particolare, in presenza di cicli termici si osserva l'accumulazione di deformazioni irreversibili dovute a una progressiva decoesione dei grani di calcite. Nel presente lavoro, viene presentato un modello teorico, basato su concetti di meccanica della frattura, per la stima del grado di imbarcamento della lastra e della vita a fatica in presenza di una assegnata storia ciclica di temperatura. Il modello è applicato al caso di studio di un edificio in cui sono stati osservati nei rivestimenti in marmo delle facciate alcuni fenomeni di imbarcamento.

PAROLE CHIAVE. Imbarcamento; *Bowing*; Cicli termici; Marmo; Propagazione stabile.

INTRODUZIONE

Al fine di comprendere il fenomeno dell'imbarcamento (*bowing*) nei rivestimenti di marmo, sono stati condotti numerosi studi teorici e sperimentali [1-7]. I risultati di tali studi mostrano come la resistenza del marmo dopo esposizioni ambientali anche brevi decresca a seguito di un danneggiamento del materiale, in larga parte legato alla decoesione intergranulare. In particolare, Royer [3] ha mostrato come l'azione termica produca uno stato di tensione autoequilibrato all'interfaccia fra i grani di calcite che è responsabile del progressivo danneggiamento nel materiale, danneggiamento che conduce allo sviluppo e coalescenza di fessure intergranulari.

Misure in-situ [8,9] mostrano come l'imbarcamento delle lastre di marmo, caratterizzato sia da forme concave che convesse (definite rispetto alla superficie esterna del rivestimento), è principalmente dipendente dalla microstruttura del marmo, dalla posizione e dal grado di vincolo della lastra e dalla fluttuazione termica e di umidità. In presenza di carichi termici ciclici, dovuti ad esempio a escursioni giornaliere di temperatura, si sviluppano nel materiale valori oscillanti di tensione e di deformazione. L'accumulazione di deformazioni permanenti porta a una progressiva decoesione dei grani di calcite. Analisi con SEM di tali grani in lastre di marmo soggette a carichi ciclici [10] evidenziano in modo chiaro questa decoesione progressiva.

Lo studio del comportamento meccanico macroscopico di lastre di marmo soggette ai fenomeni micromeccanici sopramenzionati può essere affrontato sulla base di concetti propri della meccanica della frattura (e.g. [11]). In questo ambito è possibile determinare lo stato di tensione e deformazione indotto dai cicli termici agenti sulla lastra di marmo, unitamente all'inflessione per imbarcamento dovuta alla deformazione della parte integra e alla presenza di fessure intergranulari. Considerando una propagazione stabile delle fessure sotto l'azione dei cicli termici, è possibile determinare il livello di imbarcamento in funzione del numero di cicli termici e la vita a fatica attesa della lastra (espressa come numero di cicli termici che determinano il collasso della lastra).

Nel presente lavoro, viene presentato un modello teorico per stimare l'imbarcamento progressivo di lastre di marmo soggette a cicli termici. Il modello è applicato al caso di studio dell'edificio sede del Tribunale di Pescara.



DESCRIZIONE DEL MODELLO TEORICO

Come noto, in accordo con concetti di meccanica della frattura elastica lineare, la propagazione instabile di una fessura in un elemento di marmo ha luogo quando il fattore di intensificazione degli sforzi (SIF) K_I all'apice della fessura raggiunge un valore critico chiamato tenacità a frattura (K_{IC}). Tuttavia, la letteratura scientifica riporta casi di fessure propaganti in lastre di marmo in presenza di valori di SIF inferiori a quello critico (si vedano i casi emblematici di Amoco Building a Chicago e di East Asian Bank a Hong Kong): questo fenomeno è caratterizzato da una propagazione subcritica, o a fatica, stabile delle fessure [12,13].

Il modello teorico proposto è in grado di descrivere la propagazione a fatica di fessure in lastre di marmo soggette a cicli termici. Il modello descrive la progressiva inflessione per imbarcamento delle lastre usate come rivestimenti nelle facciate di edifici. Tale fenomeno di imbarcamento è causato da una serie di fattori concomitanti, quali:

- (i) Gradiente termico lungo lo spessore della lastra dovuto a differenti valori di temperature fra la superficie esterna (legata alle condizioni ambientali esterne) e la superficie interna;
- (ii) Tale gradiente termico determina un campo tensionale agente nella lastra;
- (iii) In presenza di microfessurazione nella lastra, il livello tensionale tende ad intensificarsi in prossimità delle fessure;
- (iv) Andamenti ciclici di temperatura sulla superficie esterna (ed interna) della lastra producono un campo tensionale ciclico nella lastra e quindi una propagazione a fatica delle fessure;
- (v) La propagazione delle fessure nella lastra determina una inflessione progressiva che è somma della componente relativa alla parte integra e di quella relativa alla presenza di microfessure propaganti. Quest'ultima componente di inflessione tende ad aumentare nel tempo.

Il campo termico all'interno della lastra è valutato in accordo con la legge di Fourier per la propagazione del calore, mentre l'imbarcamento è valutato sulla base di concetti classici di meccanica della frattura elastica lineare. In questo modo è possibile stimare la durabilità della lastra di marmo con microfessurazione soggetta a cicli termici. Le storie temporali di temperatura sulle superfici esterne ed interne della lastra e le sue condizioni di vincolo all'estremità sono i principali dati di ingresso richiesti dal modello. L'inflessione della lastra è quindi valutata sulla base del campo tensionale legato alla distribuzione di temperatura presente.

Un'analisi monodimensionale di conduzione del calore è condotta al fine di ottenere la distribuzione di temperatura lungo lo spessore della lastra per assegnate condizioni iniziali e al contorno. La lastra ha uno spessore h ed è soggetta ad assegnati valori di temperatura sulla superficie interna ($x = 0$, Fig. 1) ed esterna ($x = h$, Fig. 1).

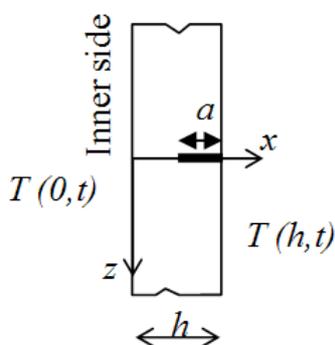


Figura 1: Lastra di marmo con una fessura singola esterna di lunghezza a soggetta a carico termico.

Solidale con la lastra di spessore h si considera un sistema di riferimento con asse x lungo lo spessore e asse longitudinale z (Fig. 1). Assumendo un comportamento lineare elastico per materiale omogeneo ed isotropo, possono essere utilizzate classiche relazioni per determinare lo stato di tensione indotto dalla variazione termica.

La propagazione della fessura è simulata considerando la fessura esterna di Fig. 1 soggetta a una sollecitazione ciclica di Modo I dovuta alla tensione termica σ_z agente nella lastra. Il SIF della fessura può essere calcolato usando la soluzione analitica per carichi concentrati P agenti sulle facce della fessura ad una profondità c ($c = h - x$) dalla superficie esterna, e il principio di sovrapposizione degli effetti.

Per un campo di tensione termico $\sigma_z(x,t)$ ($\sigma_z(x,t)$ è la componente normale di tensione agente nella lastra integra lungo la linea in cui si assume presente la fessura) usando il principio di sovrapposizione degli effetti, si ottiene la seguente espressione del SIF [14]



$$K_I(a,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi a}} \frac{1}{\left(1 - \frac{a}{h}\right)^{3/2}} \int_0^a \sigma_z(c,t) \frac{G\left(\frac{c}{a}, \frac{a}{h}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2}} dc \quad (1)$$

E' noto come in presenza di carichi ciclici sia stato osservato per numerosi materiali strutturali una propagazione stabile delle fessure, la cui la velocità di propagazione può essere messa in relazione con l'ampiezza del SIF nella fessura durante un ciclo di carico. Più precisamente, la velocità di propagazione (espresso come derivata da/dN della lunghezza di fessura a rispetto al numero di cicli N , assunto come variabile continua) risulta essere una funzione dell'ampiezza del SIF in un ciclo di carico $\Delta K_I(a)$ (dove $\Delta K_I(a) = K_{I,max}(a) - K_{I,min}(a)$). L'andamento sperimentale della relazione $da/dN - \Delta K_I$ anche per materiali quasi-fragili quali il calcestruzzo permette di identificare una zona intermedia dove tale relazione in un piano bilogarithmico è lineare (ad esempio si veda [15]). Nel presente lavoro viene utilizzata la seguente classica legge di Paris [16]

$$\frac{da}{dN} = C (\Delta K_I)^m \quad (2)$$

dove C e m sono costanti del materiale.

E' possibile determinare una lunghezza critica di fessura a_c per la quale il massimo SIF $K_{I,max}(a_c)$ in un ciclo di carico è uguale alla tenacità a frattura del materiale. Integrando Eq. 2 fra una lunghezza iniziale a_0 della fessura e a_c è possibile determinare il numero di cicli N_c (vita a fatica) corrispondente alla condizione di propagazione instabile (istantanea) della fessura.

IMBARCAMENTO DELLA LASTRA SOGGETTA A CARICO TERMICO

Imbarco dovuto alla deformazione della parte integra

L'inflessione per imbarco della lastra soggetta ad un assegnato campo di temperatura e dovuta alla deformazione della parte integra può essere calcolato con il teorema di reciprocità termoelastico [17]. Tale inflessione, $f_{bulk}(t)$, dipende dall'andamento del momento flettente lungo l'asse longitudinale ξ (ottenuto assumendo un modello semplificato a trave per la lastra) [18]. Nel caso di vincoli di estremità della lastra ad incastro tale inflessione della lastra risulterebbe identicamente nulla.

Imbarco dovuto alla presenza di fessura singola

Il teorema di Castigliano può essere applicato per calcolare l'inflessione (in mezzeria) per imbarco della lastra dovuta alla presenza di una fessura di lunghezza a . Considerando la lastra con fessura esterna soggetta al reale campo di temperatura $T(x,t)$, il SIF $K_I^{(T)}(a,t)$ può essere calcolato tramite Eq. 1. Quindi applicando una forza centrale unitaria diretta verso la superficie interna della lastra (Fig. 2), può essere calcolato il SIF $K_I^{(P)}(a)$ [14]. Si noti che adottando la direzione verso l'interno della forza unitaria in Fig. 2, una inflessione positiva indica un imbarco concavo. Sfruttando il principio di sovrapposizione, il SIF totale è

$$K_I(a,t) = K_I^{(T)}(a,t) + K_I^{(P)}(a) \quad (3)$$

L'applicazione del teorema di Castigliano permette quindi di determinare l'inflessione f_{1crack} nella lastra in presenza di una singola fessura esterna

$$f_{1crack}(a,t) = \int_0^a \left(\frac{\partial G}{\partial P} \right)_{P=0} da = \frac{2}{E} \int_0^a K_I^{(T)}(a,t) \left(\frac{\partial K_I^{(P)}(a)}{\partial P} \right)_{P=0} da \quad (4)$$

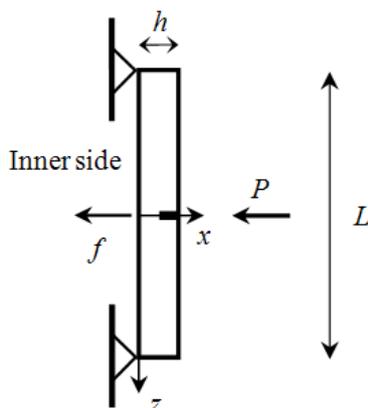


Figura 2: Schema statico per il calcolo dell'inflessione di imbarcamento nella lastra di marmo di lunghezza L.

Imbarcamento dovuto alla presenza di fessure multiple

Nelle condizioni ambientali in opera, le lastre di marmo di rivestimento possono sviluppare sulla loro superficie esterna una fessurazione diffusa. Nel presente modello teorico viene considerato l'effetto di tale fessurazione sull'inflessione della lastra dovuta ai carichi termici. A tal fine, viene definito il parametro di densità di fessurazione n , corrispondente ad un numero di fessure esterne equivalenti [18]. Assumendo che abbia luogo una fessurazione intergranulare, il parametro di densità di fessurazione può essere messo in relazione con la superficie specifica S_s dei grani (pari all'area totale della superficie dei grani per unità di volume di materiale) secondo la relazione seguente per una lastra di lunghezza L

$$n = \frac{S_s L}{2} \quad (5)$$

Nel caso di fessurazione multipla (diffusa), Eq. 4 può essere scritta nel modo seguente [18]

$$f_{ncracks}(a,t) = \frac{2}{E} \sum_{i=1}^n \int_0^a K_I^{(T)}(a,t) \left(\frac{\partial K_{I,i}^{(P)}(a)}{\partial P} \right)_{P=0} da \quad (6)$$

dove $K_{I,i}^{(P)}$ è il SIF per la i -sima fessura dovuto ad un carico centrale P diretto verso l'interno della lastra ($K_{I,i}^{(P)}$ dipende dalla coordinata z_i per la quale è calcolato). Il massimo valore in un ciclo di temperatura dell'inflessione totale (dovuta alla deformazione della parte integra ed alla presenza della fessurazione) per una fessurazione di lunghezza a è dato da

$$f_{\max}(a) = f_{bulk,\max} + f_{ncracks,\max}(a) \quad (7)$$

Si noti che $f_{\max}(a)$, per le ipotesi alla base del presente modello, rappresenta uno spostamento elastico, anche se nel seguito tale spostamento è confrontato con misure in-situ di imbarcamento caratterizzate da spostamenti permanenti.

APPLICAZIONE AD UN CASO DI STUDIO

Il presente modello teorico è stato utilizzato per analizzare il caso di studio dell'edificio sede del Tribunale di Pescara. In tale edificio, numerose lastre di marmo, usate come rivestimento in facciata, hanno mostrato significativi fenomeni di imbarcamento.

La facciata dell'edificio è rivestita con lastre rettangolari ventilate di marmo bianco di Carrara aventi spessore di 3cm. Ciascuna lastra ha dimensioni di 118cm in larghezza e 103cm in altezza. Le lastre sono fissate al muro retrostante tramite 4 supporti disposti a 30cm dall'asse di simmetria verticale della lastra. I due supporti superiori sono disposti ad una distanza dal lato superiore della lastra pari a 20.5cm mentre i due supporti inferiori sono disposti ad una distanza dal lato inferiore pari a 21.5cm.

Il sistema di ancoraggio metallico delle lastre agisce come vincolo puntuale rotazionalmente libero in corrispondenza dei 4 supporti, come evidenziato dalle analisi numeriche condotte e riportate in [18]. Inoltre, i 2 supporti superiori vincolano



tutti i gradi di libertà traslazionali, mentre i 2 supporti inferiori impediscono solo lo spostamento fuori dal piano della lastra. Pertanto, nel modello monodimensionale a trave della lastra è stata considerata la condizione vincolare di doppio appoggio.

Le sequenze temporali di temperatura sulle superfici esterna e interna della lastra sono state registrate nel periodo 8-13 agosto 2007. Si assume che gli andamenti di temperature registrati descrivano le escursioni giornaliere di temperature nel corso dell'anno per la località considerata (Pescara). Attraverso la legge di Fourier è stata determinata la distribuzione di temperatura lungo lo spessore della lastra.

Nel modello teorico è stata assunta una distribuzione uniforme di fessurazione sulla superficie esterna della lastra. Differenti valori di densità di fessurazione sono stati assunti, mentre la lunghezza iniziale della fessura a_0 è stata assunta essere costante ed uguale a 250 μm (tale valore corrisponde ad una dimensione media dei grani di calcite nel marmo). È stato quindi calcolato il valore del SIF per ciascuna lunghezza di fessura conseguente allo stato tensionale indotto dalla distribuzione di temperatura. In presenza di cicli termici, la velocità di propagazione della fessura è stata valutata in accordo con la legge di Paris.

Le proprietà meccaniche del marmo in esame [19] sono riportate in Tab. 1.

Modulo di Young	E	52.4 GPa
Coefficiente di Poisson	ν	0.16
Coefficiente di diffusione	k	0.0118 cm^2/s
Coefficiente di espansione termica	α	$5.9 \cdot 10^{-6} \text{ C}^{-1}$
Tenacità a frattura	K_{IC}	0.93 $\text{MPa m}^{1/2}$

Tabella 1: Proprietà meccaniche del marmo di Carrara.

È stato quindi calcolato lo stato tensionale indotto dal campo di temperatura. I valori tensionali massimi ottenuti risultano pari a circa 40 kPa. Si noti che tali valori sono di due ordini di grandezza inferiori ai valori che si otterrebbero, a parità di altre condizioni, nel caso di lastra doppiamente incastrata.

È stata calcolata la sequenza temporale dell'inflessione per imbarcamento dovuta alla deformazione della parte integra di lastra. Risulta una inflessione negativa (indicante un imbarcamento convesso) con valori di picco inferiori a 0.1mm. Si può notare come i valori di imbarcamento misurati in-situ (Tabella 2) siano molto maggiori rispetto a quelli calcolati per la parte integra. Questa differenza è presumibilmente dovuta alla inflessione prodotta dalla presenza di fessurazione, come di seguito mostrato.

	Ottobre 2005	Giugno 2007	Variazione
	[mm]	[mm]	[mm]
Minimo	0.3	0.6	0.3
Media	5.2	5.7	0.5
Massimo	11.1	11.8	0.7

Tabella 2: Misure in-situ di imbarcamento convesso nei rivestimenti in marmo del Tribunale di Pescara.

La propagazione delle fessure e la conseguente evoluzione dell'imbarcamento è descritta dalla legge di Paris che dipende dall'ampiezza del SIF ΔK_I e da due costanti empiriche C e m che variano in funzione del materiale. Dal momento che non sono stati reperti in letteratura dati specifici sul marmo di Carrara, è stata adottata una procedura inversa per la calibrazione dei parametri della legge di Paris.

Da un punto di vista qualitativo, si osserva che le curve teoriche di evoluzione dell'imbarcamento tendono ad un valore asintotico per la condizione di vincolo considerata di doppio appoggio (nel caso di lastra doppiamente incastrata l'imbarcamento evolverebbe con velocità crescenti fino a rottura).

Il modello teorico è stato applicato per interpretare le misure in-situ di imbarcamento eseguite su 40 lastre della facciata dell'edificio del Tribunale di Pescara. Le misure sono state eseguite dopo 9 anni dalla messa in opera delle lastre (ottobre 2005) e dopo ulteriori 20 mesi (giugno 2007). Le misure di imbarcamento sono riportate in Tab. 2.

Al fine di interpretare i valori misurati di imbarcamento, sono state considerate le curve teoriche che descrivono l'evoluzione dell'imbarcamento (ottenuto come somma dell'inflessione di lastra integra e di lastra fessurata) in funzione del numero di cicli termici. Tali curve sono calcolate attraverso il modello teorico proposto assumendo differenti valori della costante C di Paris (m è assunto pari a 2) e del parametro di densità di fessurazione n . Fig. 3 (in figura, come in Fig. 4 nel seguito, i valori positivi di imbarcamento riportati indicano un imbarcamento convesso), mostra le curve calcolate di



evoluzione dell'imbarcamento per un valore di tentativo $C = 0.14$ (per da/dN espresso in m/ciclo e ΔK_I espresso in $MPa\sqrt{m}$) e per nove differenti valori del parametro di densità di fessurazione n . Tali valori corrispondono a valori di superficie specifiche dei grani di calcite variabili fra 140 e 1166 cm^2/cm^3 . Inoltre, in Fig. 3 sono mostrati i valori medi, massimi e minimi misurati in-situ di imbarcamento. Si può osservare come variando solo il parametro di densità di fessurazione nel modello teorico non sempre sia possibile descrivere l'evoluzione misurata dell'imbarcamento. Pertanto si è proceduto con la calibrazione delle curve teoriche di evoluzione dell'imbarcamento variando entrambe i parametri C ed n . Le curve di fitting proposte sono riportate in Fig. 4. Si può osservare come la tendenza misurata del massimo valore di imbarcamento sia descrivibile considerando solo valori elevati (> 30000) del parametro di densità di fessurazione. Inoltre, la tendenza misurata dei valori medi e minimi di imbarcamento può essere descritta da una appropriata combinazione dei parametri C e n . Più nello specifico, la tendenza misurata dei valori massimi di imbarcamento (11.1-11.8 mm) si ottiene per una densità di fessurazione n pari a 32000 e per C uguale a 0.18. Per i valori medi misurati di imbarcamento, un fitting si ottiene per n nell'intervallo 15000-18000 e per C uguale a 0.165 e 0.135, rispettivamente. Infine, per valori minimi misurati di imbarcamento, un fitting si ottiene per qualunque valore di n minore di 12000 e per C variabile fra 0.04 e 0.07.

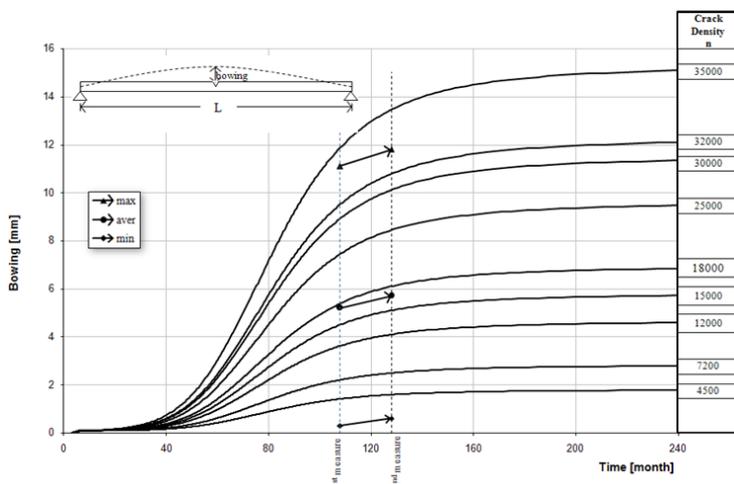


Figura 3: Inflessione per imbarcamento (*bowing*) convesso in funzione del numero di cicli termici (espresso in mesi) per lastra con differenti valori di densità di fessurazione n ($C = 0.14$).

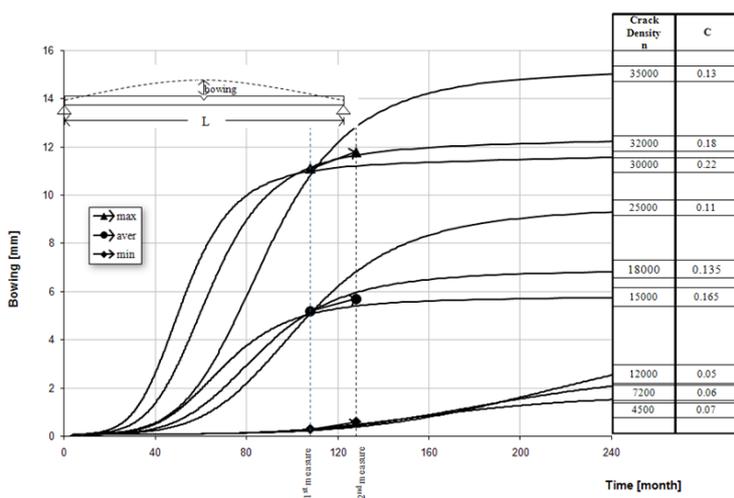


Figura 4: Inflessione per imbarcamento (*bowing*) convesso in funzione del numero di cicli termici (espresso in mesi) per lastra con differenti valori di densità di fessurazione n , al variare della costante C .

Prima di poter trarre conclusioni sui risultati ottenuti dalla procedura di calibrazione dei parametri C e n sono evidentemente necessarie ulteriori misurazioni in-situ dell'evoluzione dell'imbarcamento. Inoltre, i risultati di prove sperimentali di propagazione di fessure a fatica (sono in corso prove di flessione ciclica condotte dagli autori) potrebbero



fornire indicazioni sull'applicabilità della legge di Paris al marmo ed, eventualmente, sui valori caratteristici dei parametri C e n per tale materiale.

CONCLUSIONI

Il fenomeno di imbarcamento in lastre di marmo è stato investigato applicando concetti propri della meccanica della frattura. In particolare, è stato proposto un modello teorico per analizzare lo stato tensionale indotto da carichi termici, la propagazione di fessure per cicli termici e la conseguente inflessione per imbarcamento delle lastre. Le analisi condotte hanno mostrato che l'imbarcamento è fortemente dipendente dalle condizioni al contorno della lastra, dal numero di microfessure iniziali e dalla geometria della lastra stessa. Il modello teorico proposto, che permette di stimare l'evoluzione dell'imbarcamento in funzione del numero di cicli termici, è stato applicato al caso di studio dell'edificio sede del Tribunale di Pescara.

BIBLIOGRAFIA

- [1] A.M. Ferrero, P. Marini, *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 34 (2001) 57.
- [2] B. Leiss, T. Weiss, *Journal of Structural Geology*, 22 (2000) 1737.
- [3] G. Royer-Carfagni, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Science*, 36 (1999) 119.
- [4] G. Royer-Carfagni, W. Salvatore, *Mechanics of Cohesive and Frictional Materials*, 5 (2000) 535.
- [5] S. Siegesmund, K. Ullemeyer, T. Weiss, E.K. Tschegg, *International Journal of Earth Sciences*, 89 (2000) 170.
- [6] C. Widhalm, E. Tschegg, W. Eppensteiner, *ASCE Journal of Performance of Constructed Facilities*, 10 (1996) 5.
- [7] R.H.C. Wong, K.T. Chau, P. Wang, In: *Rock Mechanics, Proceedings of the 35th US Symposium*, University of Nevada, Reno, Lake Tahoe, USA, (1995) 477.
- [8] A. Koch, S. Siegesmund, *Environmental Geology*, 46 (2004) 350.
- [9] P. Marini, R. Bellopede, L. Manfredotti, In: *10th International Congress on Deterioration and Conservation of Stone* (2004).
- [10] G. Cardani, A. Meda, *Construction and Building Materials*, 18 (2004) 419.
- [11] K.T. Chau, J.F. Shao, *International Journal of Solids and Structures*, 43 (2006) 807.
- [12] B.K. Atkinson, *Journal of Geophysical Research*, 89 (1984) 4077.
- [13] B.K. Atkinson, P.G. Meredith, In: B.K. Atkinson (Ed.), *Fracture Mechanics of Rocks*, Academic Press, London, (1987) 111.
- [14] H. Tada, P.C. Paris, G.R. Irwin, *The Stress Analysis of Crack Handbook*, Del Research Corporation, St.Louis (1985).
- [15] P. C. Paris, M. P. Gomez, W. P. Anderson, *The Trend in Engineering*, 13 (1961) 9.
- [16] Z.P. Bazant, K. Xu, *ACI Materials Journal*, 88 (1991) 390.
- [17] S.P. Timoshenko, J.N. Goodier, *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, New York (1970).
- [18] A.M. Ferrero, M. Migliazza, A. Spagnoli, *Construction and Building Materials*, 23 (2009) 2151.
- [19] CNR-IGAG, *Experimental laboratory results*, Private communication (2007).