



Analisi di sensitività e identificazione parametrica per modelli di zona coesiva

Nunziante Valoroso

*Università degli Studi di Napoli "Parthenope", Dipartimento per le Tecnologie, Centro Direzionale Isola C4, 80143 Napoli
nunziante.valoroso@uniparthenope.it*

Adalgisa Zirpoli, Roberto Fedele

*Politecnico di Milano, Dipartimento di Ingegneria Strutturale, P.zza Leonardo da Vinci 32, 20133 Milano
zirpoli@stru.polimi.it, fedele@stru.polimi.it*

RIASSUNTO. In questa comunicazione si presenta l'applicazione di una metodologia di analisi inversa ai modelli di zona coesiva utilizzando come dati misure cinematiche a tutto campo. L'analisi di sensitività e l'identificazione parametrica vengono condotte con riferimento a dati pseudo-sperimentali disturbati da rumore e consentono di apprezzare l'efficacia e la robustezza della procedura proposta.

PAROLE CHIAVE. Modelli coesivi; Frattura; Sensitività; Identificazione.

INTRODUZIONE

Si propone una procedura di analisi inversa per la stima dei parametri governanti la risposta dei modelli di zona coesiva; in particolare, ci si rivolge all'identificazione dei parametri relativi al comportamento in modo I sulla base di prove di frattura di tipo DCB (Double Cantilever Beam). Nell'analisi si fa esplicito riferimento al modello descritto in [1] che contiene come parametro, tra gli altri, l'energia di frattura in modo I G_c . Il principale elemento di novità dello studio riguarda l'utilizzo di dati ottenibili a partire da misure cinematiche a tutto campo quali, ad esempio, misure senza contatto tramite tecniche a Correlazione di Immagini Digitali (DIC) [2]; tali informazioni possono integrare e/o sostituire le misure convenzionali raccolte durante la prova con conseguente vantaggio in termini di precisione ed affidabilità dell'intera procedura.

Uno degli ingredienti fondamentali ai fini dell'identificazione è rappresentato dall'analisi di sensitività, ovvero dal calcolo dei gradienti della risposta rispetto ai parametri incogniti. La metodologia qui adottata si basa sulla differenziazione diretta delle equazioni ed è implementata in una versione personalizzata del codice ad elementi finiti FEAP [3]. La risposta nonlineare del provino DCB viene simulata mediante aderenti elastici, discretizzati con elementi di tipo Enhanced Assumed Strain, mentre il modello coesivo è impiegato unitamente ad elementi di interfaccia. L'applicazione della procedura inversa viene illustrata con riferimento a dati pseudo-sperimentali, generati a partire da parametri noti e successivamente corrotti con rumore ad intensità crescente. L'esempio sviluppato dimostra l'efficacia della procedura inversa, la cui robustezza viene studiata in dipendenza dal campionamento sia spaziale che temporale.

IL TEST DCB

Il test DCB rappresenta lo standard per la determinazione dell'energia di frattura in modo I. La prova sperimentale può essere realizzata con diverse modalità e soprattutto utilizzando diversi metodi per l'identificazione dei parametri; in particolare, i metodi di calibrazione raccomandati sono essenzialmente di due tipi: metodi basati sul modello strutturale di trave (*Corrected Beam Theories, CBT*) e metodi basati sulla stima diretta della cedevolezza del provino



(*Compliance Calibration Methods, CCM*). In entrambi i casi si introducono poi delle correzioni per compensare le incertezze di tipo geometrico e meccanico che sono inevitabilmente presenti nelle diverse idealizzazioni dell'esperimento [4]. Secondo la definizione classica il tasso di restituzione di energia (*Energy Release Rate, ERR*) è la derivata dell'energia potenziale totale rispetto alla estensione del crack a . Nel caso elastico lineare si ottiene l'espressione seguente per la ERR:

$$G = \frac{P^2}{2b} \frac{\partial C}{\partial a} \quad (1)$$

dove P indica la forza (applicata o reattiva), b la larghezza del provino e C la sua cedevolezza. Per il provino DCB a sezione costante ed in condizioni di stato piano di deformazione una delle espressioni utilizzate nei metodi *CBT* per calcolare il tasso di restituzione dell'energia in modo I è fornita da:

$$G = \frac{P^2}{Eb^2} \left(\frac{12a^2}{h^3} + \frac{4}{h} \right) \quad (2)$$

in cui E indica il modulo elastico mentre h è lo spessore di metà provino. L'espressione precedente richiede l'introduzione di alcune correzioni allo scopo di meglio interpretare i risultati sperimentali, si veda ad esempio [5] in cui sono riassunti i risultati di un Round Robin organizzato dalla 4 Commissione della European Structural Integrity Society (ESIS).

Nei metodi basati sulla calibrazione della cedevolezza l'energia di frattura viene determinata direttamente a partire dalla relazione (1). In particolare, allo scopo di stimare la derivata della cedevolezza si interpola la relazione sperimentale tra quest'ultima e la lunghezza del crack a mediante una legge polinomiale:

$$C = Ka^n \quad (3)$$

in cui i coefficienti K e n vengono determinati tramite regressione. La relazione (3) è utilizzata, tra l'altro, nelle norme British Standards [6]. Il metodo CCM è abbastanza più facile da impiegare rispetto ad un metodo analitico in quanto non richiede la conoscenza della sua intera lunghezza del crack a . Viceversa, poichè il metodo fa uso diretto della (1) è necessaria una stima accurata della forza P , e quindi una precisa calibrazione della cella di carico, ed inoltre un numero di punti sperimentali sufficientemente elevato per valutare correttamente la derivata della cedevolezza C .

La caratteristica comune ai metodi *CBT* e *CCM* è che entrambi assumono delle ipotesi abbastanza stringenti sul test DCB, e l'adeguatezza di tali ipotesi ha un impatto diretto sulla determinazione dei parametri di frattura e, in definitiva, sulle capacità predittive di un modello numerico che ne fa uso. A parere degli autori l'impiego di un modello agli elementi finiti per la determinazione dei parametri di frattura dovrebbe limitare le possibili incoerenze tra lo schema utilizzato per la loro stima e il modello numerico nel quale i parametri determinati sperimentalmente vengono successivamente impiegati.

Modello numerico

In questo lavoro la risposta nonlineare del provino DCB viene simulata utilizzando il modello coesivo discusso in [1]. La geometria del test è riportata in Fig. 1, in cui viene mostrata anche la mesh utilizzata nelle simulazioni numeriche. Il provino è realizzato mediante due aderendi in alluminio incollati mediante una resina epossidica; il provino presenta un difetto iniziale di lunghezza pari a 15 mm. La mesh consiste di 576 elementi quadrilateri Enhanced Assumed Strain per gli aderendi e di 132 elementi di interfaccia per i quali si utilizza la quadratura di Gauss su due punti. La simulazione è stata condotta ipotizzando condizioni di stato piano di deformazione; l'estremità di sinistra è incastrata rigidamente mentre all'estremità di destra sono impressi spostamenti normali all'interfaccia. La risposta numerica della DCB è mostrata in Fig. 2, in cui è riportato l'andamento della reazione vincolare P in funzione dello spostamento relativo δ e la deformata a diversi istanti (a)-(d).

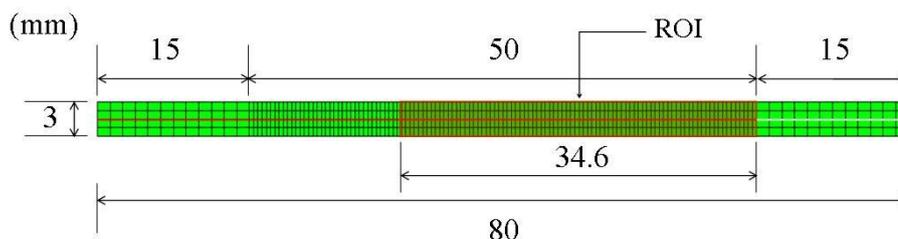


Figura 1: Test DCB. Geometria e mesh utilizzata nei calcoli.

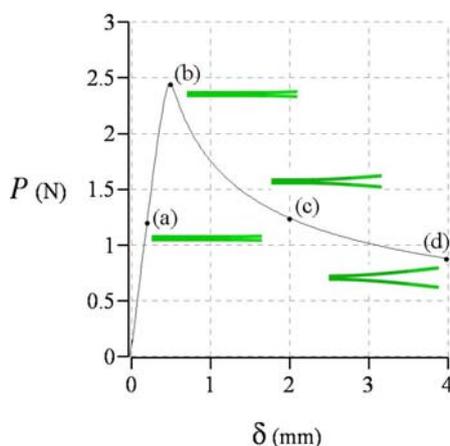


Figura 2: Test DCB. Diagramma reazione-spostamento relativo

Analisi di sensitività

L'obiettivo dell'analisi di sensitività è la determinazione dei gradienti rispetto ad un insieme di parametri di opportune funzioni di risposta incognite, tipicamente spostamenti o reazioni vincolari. Il ruolo delle mappe che si ricavano dalle analisi di sensitività può essere fondamentale ai fini della elaborazione di una strategia di identificazione robusta in presenza di residui molto rumorosi, i quali possono dar luogo a non unicità della soluzione; l'informazione sulla sensitività può infatti consentire la selezione dei dati da processare e quindi l'utilizzo solo di quelli maggiormente significativi ai fini dell'identificazione.

In questo lavoro le sensitività sono determinate mediante il Metodo di Differenziazione Diretta (DDM). Il punto di partenza per l'analisi di sensitività sono le equazioni di equilibrio che, nell'ambito di una formulazione agli spostamenti, possono essere scritte nella forma:

$$R(u^{(k)}(x), x) = 0 \quad (4)$$

in cui è stata esplicitata la dipendenza dei vettori dei residui R e degli spostamenti nodali u dai parametri x oggetto dell'identificazione. La relazione (4) è soddisfatta solo in soluzione per il k -esimo passo di carico e le sensitività si ottengono da essa differenziando rispetto alle componenti x_j del vettore dei parametri:

$$\left(\frac{\partial R}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial R}{\partial x_j} = 0 \quad (5)$$

La relazione precedente fornisce un sistema di equazioni lineari in cui la matrice dei coefficienti è la matrice tangente relativa all'ultima iterazione del passo di carico k -esimo e le incognite sono i gradienti del vettore degli spostamenti. Una volta nota la soluzione del problema (5) quest'ultima consente inoltre la determinazione dei gradienti delle reazioni vincolari P corrispondenti ai gradi di libertà vincolati. In particolare, per il problema della DCB ciò richiede l'assemblaggio di una sola equazione corrispondente ad uno solo dei due nodi cui viene impresso lo spostamento che determina l'avanzamento del crack.

Le mappe di sensitività degli spostamenti nodali rispetto all'energia di frattura sono riportate in Fig. 3. I grafici sono relativi alle sole componenti verticali del vettore dei parametri nodali, che sono le uniche componenti significative per il problema in esame, e si riferiscono agli stati individuati con (a)-(d) sulla curva carico-spostamento della DCB riportata in Fig. 2. Le sensitività degli spostamenti hanno un andamento abbastanza intuitivo in quanto sono distribuite su una regione che si estende progressivamente con l'avanzare del crack; inoltre, i diagrammi degli iso-valori riproducono qualitativamente il profilo della relazione costitutiva di interfaccia.

IDENTIFICAZIONE PARAMETRICA

L'obiettivo del lavoro è l'identificazione parametrica per il modello di interfaccia attraverso un procedimento di analisi inversa i cui dati sono misure cinematiche a tutto campo, eventualmente arricchite da misure più convenzionali di tipo statico. In particolare, i dati cinematici cui si fa riferimento possono essere ottenuti mediante

una procedura DIC e riguardano il processo di deformazione del provino sottoposto a test ovvero di una regione di interesse opportunamente estratta da esso [2].

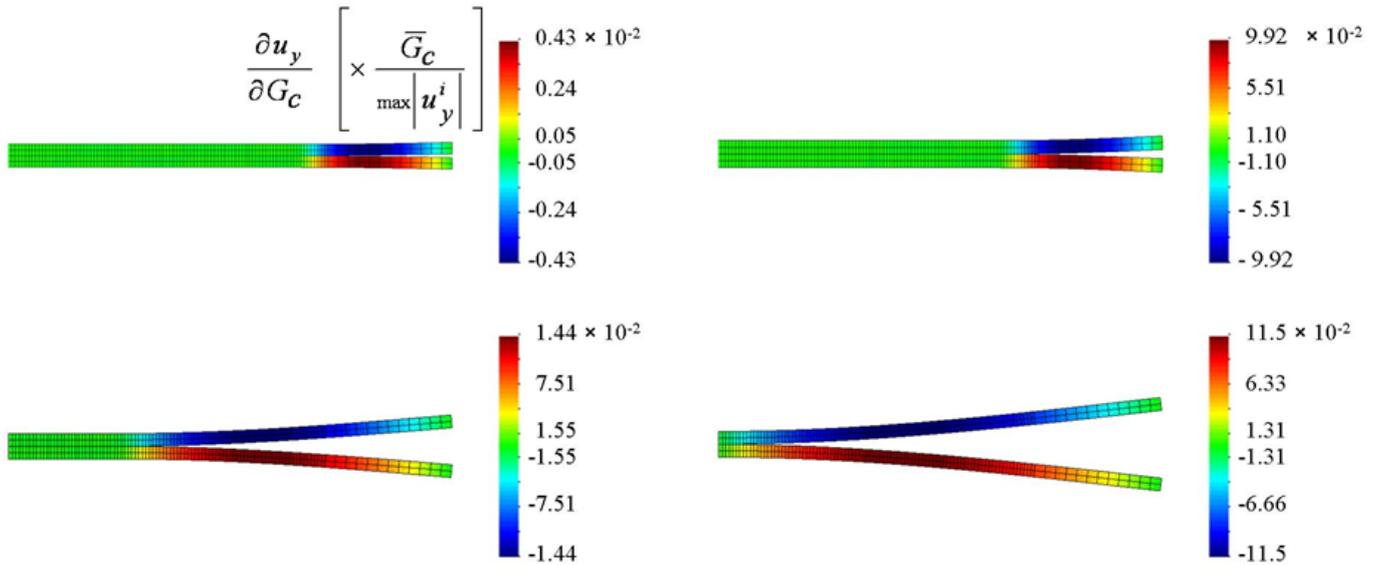


Figura 3: Test DCB. Sensitività degli spostamenti verticali.

In un contesto deterministico i parametri ottimali del modello sono caratterizzabili come soluzione di un problema di programmazione nonlineare in cui la funzione obiettivo da minimizzare è definita in modo da quantificare la distanza, in una opportuna norma, tra i parametri di forza e spostamento *misurati* nella regione di osservazione (ROI) e quelli *calcolati* mediante il modello matematico in funzione dei parametri incogniti. In assenza di dati sperimentali nel seguito si fa riferimento a dati pseudo-sperimentali generati a partire dal modello matematico utilizzando parametri noti a priori e sovrapponendo successivamente un rumore random a media nulla e deviazione standard variabile.

I dati cinematici da utilizzare nella procedura di identificazione (i parametri *misurati*) sono ottenuti mediante un campionamento spazio-temporale degli spostamenti e raccolti in un insieme di vettori V_i di dimensione n_n , ognuno dei quali si riferisce ad un particolare istante t_i ($i=1... n$) del processo di carico esaminato. I valori degli stessi parametri di spostamento che sono invece *calcolati* utilizzando il modello sono invece indicati con W_i e sono ovviamente funzione dei parametri incogniti x . Con questa notazione la funzione da minimizzare ai fini dell'identificazione può essere definita come segue:

$$f(x) = \sum_i \|V_i - W_i(x)\| \quad (6)$$

Nelle simulazioni numeriche i dati sono stati generati utilizzando il valore $G_c=0.5 \text{ N/mm}$ (valore target del parametro) mentre la minimizzazione viene eseguita mediante un algoritmo di tipo Trust Region [7]. Le analisi sono condotte in presenza di rumore a media nulla e deviazione standard σ_n indipendente dal tempo. Questo tipo di rumore intende simulare la principale sorgente di errore generalmente riscontrata nelle procedure DIC, ovvero un rumore bianco dovuto ad una possibile cattiva qualità della trama superficiale dei provini. Nelle simulazioni si considerano deviazioni standard fino a $100 \mu\text{m}$.

Per quanto riguarda i dati considerati nella procedura di identificazione si rileva esplicitamente che le misure di spostamento considerate sono relative ad entrambe le metà del provino DCB in quanto il rumore è non simmetrico. I risultati dell'identificazione eseguita sono riassunti nelle Fig. 4-6. In particolare, i risultati sono rappresentati riportando l'errore relativo valutato rispetto al parametro target al variare del numero di istanti di campionamento, del numero di parametri di spostamento e della deviazione standard del rumore sovrapposto. Dall'esame dei risultati si rileva che il valore dell'energia di frattura che si ottiene dalla minimizzazione è in pratica indipendente dal numero di istanti di misura se il numero di parametri di spostamento processati è abbastanza elevato ($n_n > 50$) e il rumore è sufficientemente basso ($\sigma_n < 10 \mu\text{m}$). In queste condizioni il valore target dell'energia di frattura è stimato con un errore relativo che non eccede mai 1%.

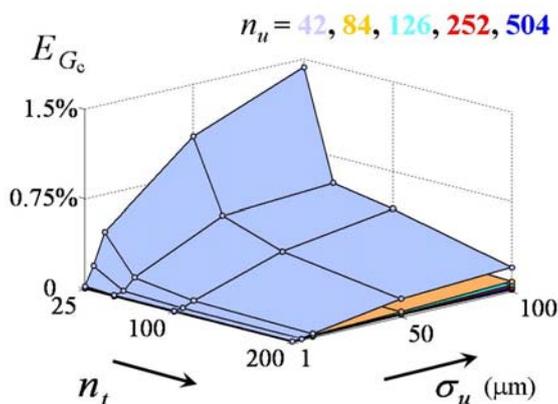


Figura 4: Test DCB. Errore relativo in funzione del numero di istanti di misura e del rumore. Superfici ottenute al variare del numero di parametri di spostamento

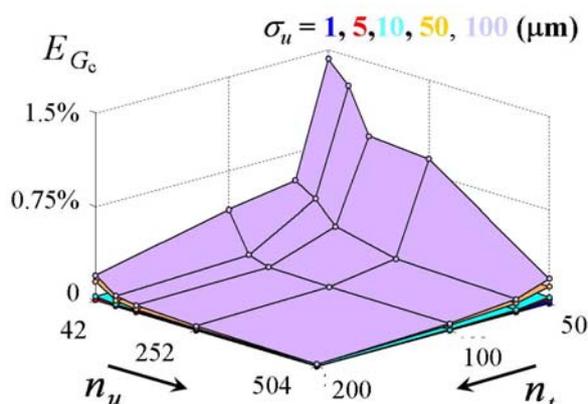


Figura 5: Test DCB. Errore relativo in funzione del numero di parametri di spostamento e degli istanti di misura. Superfici ottenute al variare del rumore.

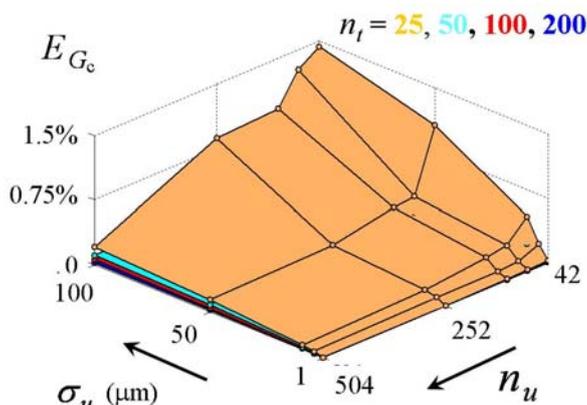


Figura 6: Test DCB. Errore relativo in funzione del rumore e del numero di parametri di spostamento. Superfici ottenute al variare del numero di istanti di misura.

CONCLUSIONI

È stato condotto uno studio teorico-numerico rivolto alla caratterizzazione di un modello di zona coesiva. In particolare, si è fatto uso di una procedura di analisi inversa per la stima dell'energia di frattura in modo I su un provino DCB. I dati considerati sono stati generati artificialmente a partire dal modello matematico e successivamente corrotti mediante l'aggiunta di rumore bianco. È stata condotta l'analisi di sensitività in previsione della applicazione della procedura alla identificazione a partire da dati sperimentali autentici. La sensitività fornisce infatti informazioni preziose ai fini identificativi e rappresenta il necessario prerequisito di una strategia di selezione per la scelta dei dati ritenuti più significativi per il problema in esame. Nelle simulazioni documentate il solo criterio di selezione adottato è stato quello elementare di includere o meno i dati statici (misure della reazione vincolare) nella funzione obiettivo. Lo studio qui presentato è da ritenersi preliminare e preparatorio prima di una completa validazione sperimentale. I risultati numerici presentati hanno dimostrato l'efficacia della procedura di analisi inversa e la sua stabilità rispetto alla distribuzione spazio-temporale delle misure oltre che alla presenza del rumore.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] N. Valoroso, L. Champany, *Engineering Fracture Mechanics*, 73 (2006) 2774.



- [2] R. Fedele, B. Raka, F. Hild, S. Roux, *J. of the Mechanics and Physics of Solids*, (2009).
- [3] R. L. Taylor, *FEAP User Manual*, University of California at Berkeley, (2002).
- [4] ASTM D4896-01 Standard Guide for Use of Adhesive-Bonded Single Lap-Joint Specimen Test Results. ASTM International, (2001).
- [5] B. R. K. Blackman, A. J. Kinloch, M. Paraschi, W. S. Teo, *Int. J. of Adhesion & Adhesives*: 23 (2003) 293.
- [6] British Standard BS7991:2001. Determination of the mode I adhesive fracture energy G_{IC} of structure adhesives using the double cantilever beam (DCB) and tapered double cantilever beam (TDCB) specimens. London, Great Britain: British Standard Institution, (2001).
- [7] T.F. Coleman, Y. Li, *SIAM Journal of Optimization*, 6(2) (1996) 418.