

FATICA MULTIASSIALE E STIMA DELLA PROBABILITÀ DI CEDIMENTO DI UNO STABILIZZATORE PER VEICOLI FUORISTRADA

S. Beretta^a, F. Benzoni^a, M. Madia^a

^a *Dipartimento di Meccanica, Politecnico di Milano, via La Masa 34 – 20156 Milano, e-mail: stefano.beretta@polimi.it*

SOMMARIO

La progettazione di componenti per l'industria automobilistica deve rispondere a stretti requisiti di affidabilità. A tale scopo, è importante studiare il comportamento a fatica di tali componenti considerando i reali carichi di esercizio (spettri di carico) e la resistenza del materiale. In particolare, la presenza di difetti è responsabile del decremento, a volte notevole, delle caratteristiche di resistenza a fatica del componente. Questi concetti sono stati applicati nel presente lavoro per stimare la probabilità di cedimento di uno stabilizzatore per veicoli fuoristrada. Partendo dai risultati relativi all'analisi ad elementi finiti (FEA) del componente e considerando varie tipologie di difetti superficiali in esso presenti, si è studiato lo stato di fatica multiassiale in termini di fattori di sollecitazione all'apice dei difetti. I risultati ottenuti sono stati confrontati con le soglie per cricche corte ottenute sperimentalmente per un acciaio temprato e rinvenuto, materiale standard usato nella fabbricazione degli stabilizzatori. In ultima analisi, i risultati dell'analisi di fatica multiassiale e del campionamento dei difetti nello stabilizzatore sono stati inseriti in un modello probabilistico per stimare la probabilità di cedimento del componente.

ABSTRACT

The design of automotive components has to deal mainly with specific reliability requirements to assure the safe use of vehicles. In order to achieve this goal, it's important to study the fatigue behaviour of such components under the effect of real loads (load spectra) as well as the material strength. Particularly, the presence of defects results to be detrimental for the fatigue strength of the component. In the present work, these concepts have been applied to assess the failure probability of a stabilizer for off-road vehicles. The results of a finite element analysis (FEA), carried out on the component, have been used in a multi-axial fatigue assessment, taking into account different surface defects in terms of stress intensity factors (SIFs). SIFs' values have been compared with thresholds for short cracks, which have been obtained experimentally for a quenched and tempered steel, a standard material for manufacturing stabilizers. The results obtained in the multi-axial fatigue assessment and in the measurements of defects onto the stabilizer have been inserted in a probabilistic model to estimate the failure probability of the component.

1. INTRODUZIONE

La progettazione di componenti meccanici per l'industria automobilistica ha sempre avuto tra gli obiettivi primari la riduzione dei pesi, se da un lato questo aspetto è stato legato per lungo tempo nel passato alla ricerca di prestazioni dell'autoveicolo, negli ultimi anni le norme sempre più restrittive sulle emissioni di inquinanti in atmosfera si sono tradotte in forti vincoli progettuali tesi a ridurre il peso dell'autoveicolo. In tal senso, la ricerca si è orientata verso l'ottimizzazione dello stato di sforzo nel singolo componente tramite sofisticati strumenti numerici (CAD, CAE, ecc.) e verso l'uso di materiali sempre più leggeri e performanti (plastiche rinforzate, alluminio, magnesio, acciai ad alta resistenza,

ecc) . In particolare l'utilizzo di acciai ad alta resistenza è diffuso nella costruzione di stabilizzatori per autoveicoli, le alte prestazioni che accompagnano tale classe di acciai ben si presta alla richiesta di leggerezza unitamente alla capacità di sopportare alti carichi [1].

Le proprietà a fatica del materiale (in particolare il limite di fatica) sono notevolmente influenzate dai difetti che sono naturalmente presenti nel componente [2-4] a causa dei processi produttivi e tecnologici, un eventuale difetto potrebbe promuovere l'insorgere e la propagazione di una cricca potenzialmente dannosa per l'integrità dello stabilizzatore. Le evidenze sperimentali mostrano che, per prove condotte vicino al limite di fatica, è possibile evidenziare delle cricche non propaganti all'apice dei difetti, condizione che corrisponde alla soglia di tali cricche [2,5]. La valutazione della resistenza a fatica di un componente realizzato in acciaio ad alta resistenza deve quindi necessariamente coinvolgere gli strumenti della meccanica della frattura e della statistica [6], in quanto i difetti sono casualmente distribuiti nel materiale e la probabilità di cedimento del componente è legata al massimo difetto che può essere trovato in un certo volume di materiale [7-10].

Nel presente lavoro viene presentato un approccio multidisciplinare per la progettazione sicura e ottimale di uno stabilizzatore per autoveicoli, a partire da un approccio *defect tolerance* precedentemente sviluppato [11]. Lo stato di sforzo ottenuto tramite un'analisi ad elementi finiti, le proprietà a fatica del materiale ricavate dalle prove sperimentali e l'analisi statistica dei difetti presenti sulla superficie dello stabilizzatore sono stati usati per calcolare la probabilità di cedimento del componente.

2. DETERMINAZIONE DELLO STATO DI SFORZO

Lo stato di sforzo nello stabilizzatore è stato studiato tramite un'analisi statica ad elementi finiti [12]. Lo scopo principale è stato estrarre le componenti della matrice di sforzo per vari punti lungo lo stabilizzatore da usare nel calcolo dei fattori di intensificazione degli sforzi per un potenziale difetto presente in tali punti.

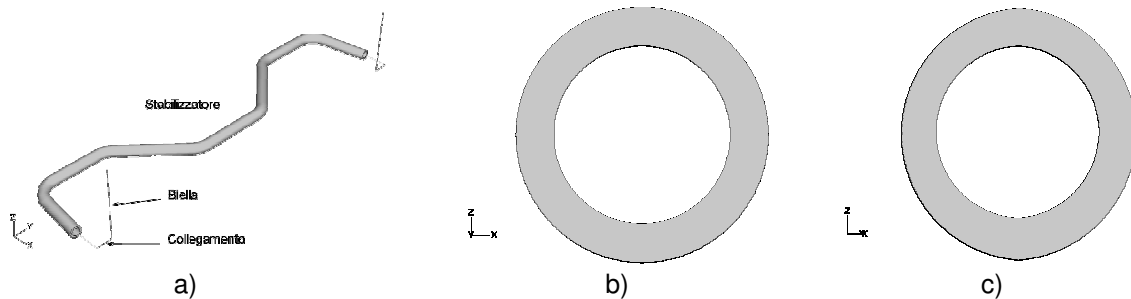


Fig. 1 – Modello dello stabilizzatore: a) vista globale; b) sezione nei tratti rettilinei in cui il tubo risulta essere indeformato; c) sezione nei gomiti, dove il tubo è stato piegato.

Per comprendere la complessità del problema, è utile analizzare il modello geometrico del componente. La Fig. 1.a mette in evidenza come, per problemi di ingombro, lo stabilizzatore non sia rettilineo nel tratto centrale, si genera un momento flettente oltre che torcente quando la barra viene caricata. In generale quindi lo stato tensionale è multiassiale, dato dalla presenza contemporanea di momento flettente e torcente. Nei gomiti la situazione è resa ancora più critica dalla particolare forma data dal processo di piegatura: la deformazione a caldo tende ad assottigliare lo spessore di parete all'estradosso del tubo, mentre il fenomeno contrario ha luogo all'intradosso. Nonostante il fenomeno venga controllato durante il processo produttivo, il tubo nella zona dei gomiti è affetto da una certa ovalizzazione, come si può notare dal confronto tra la Fig. 1.b e la Fig. 1.c.

Per tenere conto di quanto detto, al fine di cogliere il comportamento della soluzione nelle parti più critiche, la griglia del modello ad elementi finiti è stata raffinata nei gomiti (Fig. 2.a).

Al modello sono stati imposti dei vincoli cinematici che riproducono le condizioni indotte dai tamponi che collegano lo stabilizzatore al telaio dell'autoveicolo. Il comportamento elasto-cinematico dei tamponi è stato trascurato. Il carico è stato applicato sotto forma dello spostamento verticale \bar{u}_z relativo alla situazione di massimo rollio dell'autoveicolo (Fig. 2.b), rilevato durante le prove sperimentali su strada.

I risultati, in termini di sforzo equivalente di von Mises adimensionalizzati rispetto allo sforzo massimo, sono mostrati in figura in Fig. 2.c e 2.d. Le zone più stressate risultano essere i gomiti, gli sforzi massimi sono localizzati nei punti in cui si sono evidenziate le rotture nelle prove del componente.

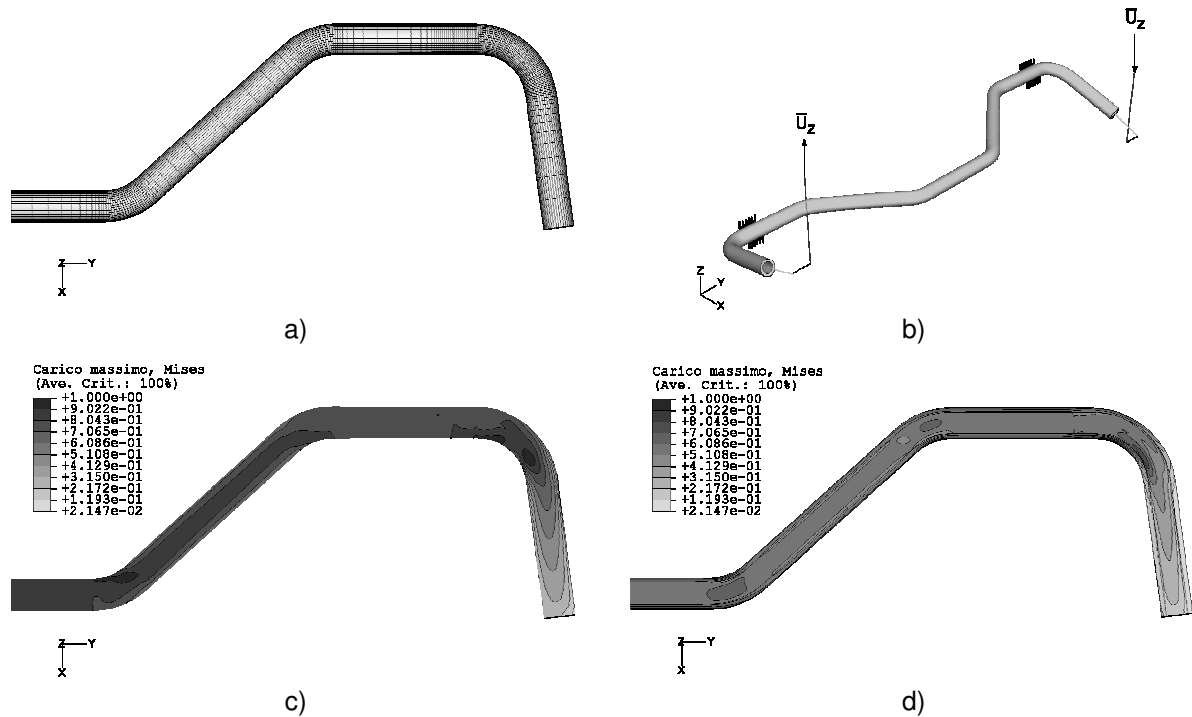


Fig. 2 – Griglia usata nelle simulazioni ad elementi finiti (a); carichi e vincoli applicati al modello (b); sforzo equivalente di von Mises adimensionalizzato rispetto allo sforzo massimo: c) superficie esterna; d) superficie interna.

3. FATICA MULTIASSIALE IN PRESENZA DI DIFETTI

Lo stato tensionale evidenziato nella precedente sezione è necessario ma non sufficiente per stimare il comportamento a fatica dello stabilizzatore. Per un componente realizzato con un acciaio ad alta resistenza, il limite di fatica è normalmente influenzato dalla presenza di difetti. Per questo motivo l'ulteriore parametro da considerare è la propagazione di eventuali cricche che possono innescarsi all'apice dei difetti. Sono state analizzate due tipologie di difetti superficiali: semiellittici con l'asse maggiore diretto longitudinalmente e rotondi.

Le grandezze calcolate sono i fattori di intensificazione degli sforzi (K) per una condizione di modo misto, alla luce della natura multiassiale del problema.

3.1 Proprietà del materiale e prove di fatica

Il materiale analizzato è un acciaio temprato e rinvenuto avente le seguenti caratteristiche: carico di rottura $R_m = 1350MPa$, carico di snervamento $R_{s,0.2} = 1230MPa$ e carico di snervamento ciclico $R_{s,cic,0.2} = 850MPa$.

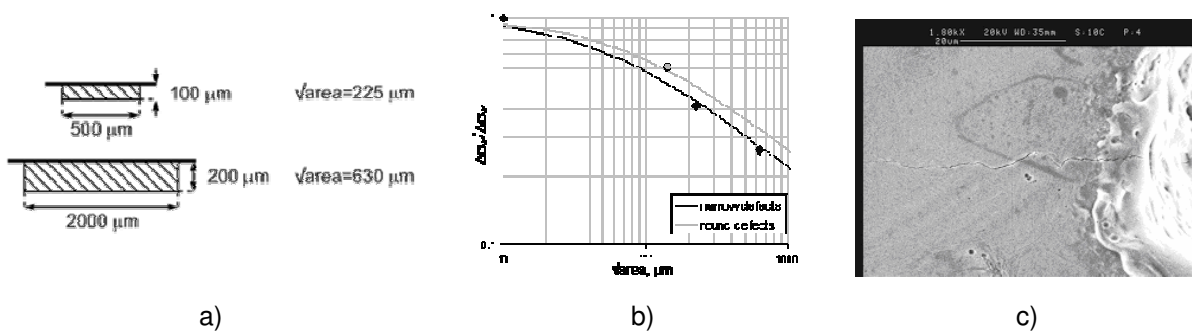


Fig. 3 – Dimensione dei tipici difetti usati nelle prove di fatica (a); diagramma di Kitagawa normalizzato (b); cricca non propagante all'apice del difetto in un provino sopravvissuto a $1.2 \cdot 10^7$ cicli (c).

Le prove di fatica sul materiale sono state condotte prendendo in considerazione sia provini lisci che provini con micro-intagli (Fig. 3.a). Il rapporto di ciclo R è stato posto pari a -1, in quanto rappresenta il rapporto usato nelle prove di fatica del componente. I limiti di fatica per ogni dimensione del difetto sono stati ricavati tramite il metodo *stair case* e sono stati analizzati con il modello di El-Haddad (Fig. 3.b) descritto dalla seguente equazione:

$$\Delta\sigma_w = \Delta\sigma_{w0} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{area_0}}{\sqrt{area_0} + \sqrt{area}}} \quad (1)$$

dove $\Delta\sigma_{w0}$ è l'intervallo del limite di fatica per i provini lisci e $\sqrt{area_0}$ è un parametro di ottimizzazione. Considerando che il limite di fatica corrisponde alla condizione di soglia per le cricche non propaganti (Fig. 3.c) [2], è possibile analizzare i dati di limite di fatica in termini di ΔK_{th} e modellare quindi le soglie per cricche corte con:

$$\Delta K_{th} = \Delta K_{th,LC} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{area}}{\sqrt{area_0} + \sqrt{area}}} \quad (2)$$

dove $\Delta K_{th,LC}$ è l'intervallo di soglia nel caso di cricche lunghe.

3.2 Difetto piano

Un potenziale difetto piano longitudinale situato sulla superficie del tubo (Fig. 4.a) è soggetto a modo II e III a causa degli sforzi di taglio τ complanari con il difetto, inoltre bisogna considerare la presenza di modo I data dagli sforzi circolarziali (Fig. 4.b).

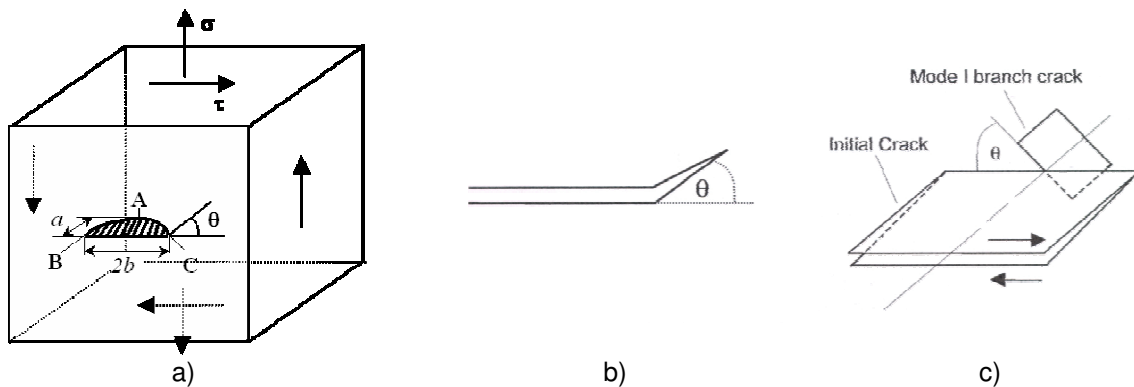


Fig. 4 – Analisi delle soglie per un difetto planare semiellittico: a) schema geometrico e sforzi applicati; b) angolo di propagazione per gli apici B e C; c) angolo di propagazione per l'apice A.

I valori di K_I sono stati calcolati tramite la soluzione di Newman e Rau [13], mentre le stime di K_{II} e K_{III} sono state calcolate secondo Kassir e Sih [14], che hanno ottenuto le soluzioni per i fattori di sollecitazione per un sforzo di taglio τ remoto costante. Nel presente lavoro si sono considerate solo cricche con $b/a > 1$.

Con riferimento alla Fig. 4.a, considerando una condizione di modo misto, K_{II} risulta essere massimo per i punti B e C situati sulla superficie libera, mentre è pari a zero sul fondo della cricca (punto A). Il contrario vale se si considera il valore di K_{III} .

Per valutare la resistenza a fatica, viene fatto riferimento al criterio proposto da Erdogan e Sih [15], i quali proposero che la cricca devia su piani su cui risulta massimo lo sforzo di trazione. Nella pratica, I valori di K_I , K_{II} e K_{III} devono essere combinati per stimare quanto vale l'angolo θ_{max} tra il piano su cui giace la cricca ed il piano su cui è massimo lo sforzo di trazione (Fig. 4.b e 4.c).

Nel caso si consideri l'apice della cricca situato sulla superficie libera ($K_{III} = 0$), le espressioni di θ_{max} e di $K_{\theta_{max}}$ sono date da:

$$K_I \cdot \sin \theta_{\max} + K_{II} \cdot [3 \cdot \cos(\theta_{\max}) - 1] = 0 \quad ; \quad K_{\theta_{\max}} = \cos\left(\frac{\theta_{\max}}{2}\right) \cdot \left[K_I \cdot \cos^2\left(\frac{\theta_{\max}}{2}\right) - \frac{3}{2} \cdot K_{II} \cdot \sin(\theta_{\max}) \right] \quad (3)$$

Per il punto situato in fondo alla cricca ($K_{II} = 0$), è invece possibile scrivere:

$$\tan(2 \cdot \theta_{\max}) = \frac{2 \cdot K_{III}}{K_I \cdot (1 - 2 \cdot \nu)} \quad ; \quad K_{\theta_{\max}} = \frac{K_I \cdot (1 + 2 \cdot \nu) + [K_I^2 \cdot (1 - 2 \cdot \nu)^2 + 4 \cdot K_{III}^2]^{1/2}}{2} \quad (4)$$

E' inoltre importante considerare che l'apice A risulta essere più pericoloso degli apici B e C [11].

3.3 Difetto rotondo

I difetti superficiali rotondi (Fig. 5.a) hanno la peculiarità di non avere una dimensione prevalente rispetto alle altre, in tal senso la valutazione dello stato tensionale all'apice del difetto si differenzia da quella vista per il difetto piano in quanto non esistono piani di riferimento su cui valutare lo stato di sforzo. La cricca si innesta all'apice del difetto nel piano su cui agisce il massimo sforzo principale (Fig. 5.b). La componente σ_{III} è pari a zero sulla superficie libera.



Fig. 5 – Analisi delle soglie di propagazione di difetti rotondi: a) schema geometrico; b) schema degli sforzi principali per una cricca all'apice del difetto.

Assumendo che lo stato di sforzo sia biassiale ed in fase, la stima del massimo K può essere fatta ricorrendo alla seguente relazione [16]:

$$\frac{K_{I,tens}}{K_{I,biax}} = 1 + 0.1804 \cdot \left(\frac{\sigma_I}{\sigma_{II}}\right) + 0.0329 \cdot \left(\frac{\sigma_I}{\sigma_{II}}\right)^2 \quad (5)$$

dove $K_{I,tens}$ è dovuto alla sola σ_I , mentre $K_{I,biax}$ è il risultato dell'azione combinata di σ_I e σ_{II} .

3.4 Stima dell'indice di propagazione (IP)

La valutazione del cedimento dello stabilizzatore si basa sul concetto di indice di propagazione, ossia per ogni punto della superficie viene calcolato il massimo ΔK e viene messo in relazione con il valore ΔK_{th} della soglia di propagazione per il materiale. Tale parametro viene calcolato in maniera diversa a seconda che si faccia riferimento ad un difetto piano o ad uno rotondo:

$$IP_{piano} = \frac{\Delta K_{\theta_{\max}}}{\Delta K_{th}} \quad ; \quad IP_{rotondo} = \frac{\Delta K_{biax}}{\Delta K_{th}} \quad (6)$$

La condizione di propagazione è data da $IP > 1$. Conoscendo i valori di IP associati ad un dato punto, è immediato costruire delle mappe che descrivono la distribuzione di IP sulla superficie dello stabilizzatore. In particolare, risulta che, a parità di \sqrt{area} , il difetto rotondo e quello planare sono ugualmente pericolosi sulla superficie interna (Fig. 6). Inoltre il difetto planare è più pericoloso sulla superficie interna che su quella esterna a causa degli elevati sforzi circolarziali [11].

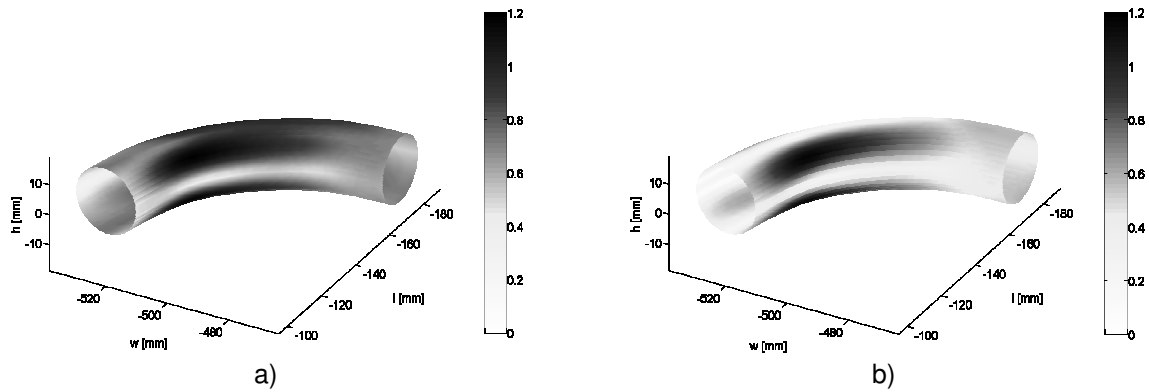


Fig. 6 – Mappe relative all' *IP* per la superficie interna dello stabilizzatore nel caso di difetto rotondo (a) e difetto planare (b) aventi entrambe $\sqrt{\text{area}} = 300\mu\text{m}$.

4. AFFIDABILITA' DEL COMPONENTE

L'analisi *defect tolerance* di un volume di materiale V_i soggetta a sforzo uniforme σ_i è immediata sulla base delle Eq. (1) e (6) e considerando il *difetto massimo caratteristico* in V_i [2,7,8]. Un'ulteriore valutazione, nota la distribuzione del difetto massimo nel volume V_i , è l'affidabilità R_i corrispondente alla probabilità che il difetto massimo sia minore di $a_{crit,i}$ (Fig. 7.a) [6]:

$$R_i = \Pr\{a_{\max, A_i} \leq a_{crit,i}\} = F_{\max, V_i}(a_{crit,i}) \quad (7)$$

Questo approccio necessita la conoscenza del diagramma di Kitagawa (Fig. 7.a) e della distribuzione F_{\max, V_i} del difetto massimo nel volume V_i che si ottiene nei seguenti passi: i) campionamento per massimi su volumi di controllo V_0 ed analisi mediante *LEVD* [7,9,10]; ii) stima della distribuzione del massimo difetto nel volume V_i .

Nel caso di un componente come lo stabilizzatore in cui lo stato di sforzo non è uniforme, si può estendere la Eq. (7) tramite un modello *weakest link* [6]. Considerando la presenza di difetti semiellittici superficiali, si è supposto che la superficie del componente possa essere suddivisa in tante aree di grandezza A_i , soggette allo sforzo uniforme σ_i . La probabilità di cedimento P_f per il componente è:

$$P_f = 1 - \prod_i R_i \quad (8)$$

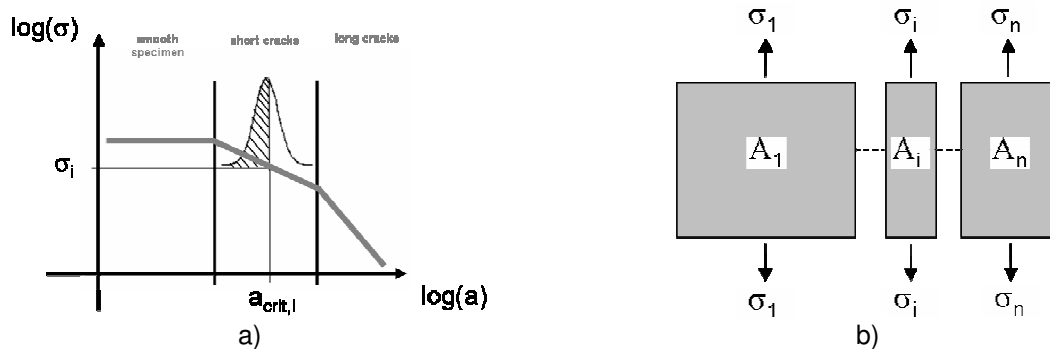


Fig. 7 – Relazione tra limite di fatica e dimensione del difetto (a); modello *weakest link* usato per il calcolo della probabilità di cedimento del componente (b).

Sfruttando la conoscenza del diagramma di Kitagawa, la probabilità di sopravvivenza dell'*i*-esimo elemento risulta ancora espressa dalla Eq. (7), ovvero corrisponde alla probabilità che il massimo difetto all'interno dell'elemento sia più piccolo della dimensione del difetto $a_{crit,i}$ associato al valore σ_i a cui è soggetto l'elemento (Fig. 7.a).

Al fine di facilitare l'applicazione di questi concetti nell'ambito di componenti soggetti a controlli *NDT*, caratterizzati da una dimensione minima del difetto rilevabile, si è adottata per la stima dei difetti massimi sulle diverse aree un approccio basato sul metodo *Peak Over Threshold (POT)* [17]. In particolare, sulla base delle stesse ipotesi che permettono l'applicazione della *Gumbel* al campionamento per massimi, le eccedenze di dimensioni di difetti al di sopra di una soglia u possono essere interpolate con una distribuzione esponenziale negativa che ha la seguente espressione:

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x-u}{\sigma}\right)} \quad (9)$$

dove x è il valore argomentale (dimensione del difetto), u è la soglia e σ è il parametro di scala (corrispondente al valor medio degli eccessi $(x_i - u)$ [17]). Nota la distribuzione madre delle eccedenze, indicando con ρ la densità dei difetti aventi dimensioni maggiori di u , la distribuzione dei massimi $F_{\max, A_i}(x)$ sull' i -esimo elemento è data da:

$$F_{\max, A_i}(x) = [F_X(x)]^{\rho \cdot A_i} \quad (10)$$

Per calcolare la probabilità di cedimento del componente è quindi necessario conoscere la distribuzione dei difetti sulla superficie del componente, la densità o occorrenza ρ dei difetti sulla superficie e il diagramma di Kitagawa per la stima del difetto critico. A titolo di esempio la Fig. 8.a riporta una analisi di sensibilità condotta per valutare l'influenza dell'occorrenza ρ e del parametro di scala σ sulla probabilità di cedimento P_f per la presenza di difetti superficiali semiellittici. Si può notare come, all'aumentare del numero di difetti per unità di area e della dispersione della distribuzione, la probabilità di cedimento cresca in maniera molto repentina.

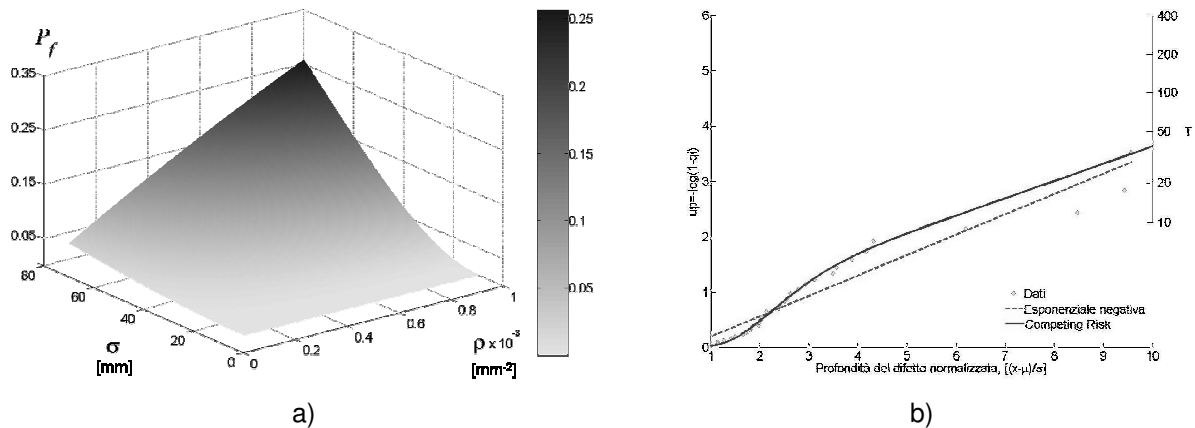


Fig. 8 – Valutazione della probabilità di cedimento al variare di ρ e σ per $u = 11.5 \mu\text{m}$ (a); carta di probabilità per i difetti superficiali (b).

Una serie di misure sperimentali per rilevare la popolazione dei difetti sono state eseguite su un campione di tubi mediante l'uso di uno strumento *eddy current* per il rilievo dei difetti superficiali (Fig. 8.b): si può vedere come la distribuzione dei difetti sia mediamente ben descritta dalla esponenziale negativa. Un ulteriore miglioramento nell'analisi può essere ottenuto mediante modelli statistici tipo *competing risks* che permettono di descrivere l'andamento curvilineo di Fig. 8.b [18]. Il componente è anche soggetto alla presenza di inclusioni superficiali, il cui rilievo viene di solito eseguito mediante un *campionamento per massimi* [7] su sezioni lappate [9,10] ed interpolazione mediante *LEVD* o *competing risks*. Nel caso di inclusioni campionate su un'area A_0 , la distribuzione $F_{\max}(x)$ diventa:

$$F_{\max, A_i}(x) = [F_{\max, A_0}(x)]^{\frac{A_i}{A_0}} \quad (11)$$

L'affidabilità totale del componente sarà quindi il prodotto delle affidabilità per le due tipologie di difetti.

5. CONCLUSIONI

Nel presente lavoro è stata presentata una procedura per la progettazione sicura di uno stabilizzatore per autoveicoli. La caratteristica principale è data dal carattere multidisciplinare di tale approccio.

Una analisi ad elementi finiti ha permesso di risolvere il campo di sforzi all'interno del componente, mettendo in evidenza le regioni soggette allo sforzo maggiore.

Il passo successivo è stato quello di valutare la resistenza del componente sottoposto a fatica multiassiale con un appropriato modello di meccanica della frattura basato sulla valutazione dei fattori di sollecitazione degli sforzi. Nel caso di difetti piani superficiali, si è fatto riferimento al metodo di Kassir e Sih. Considerando varie dimensioni per i difetti semiellittici e proiettando sul piano di cricca il tensore degli sforzi, si è determinato il valore di K_I e K_{II} per l'apice sulla superficie libera, mentre per il punto sul fondo della cricca si sono calcolati i valori di K_I e K_{III} . Con il criterio di Erdogan e Sih è stato valutato il valore massimo assunto da K . Per i difetti rotondi invece si è fatto affidamento al criterio di Murakami e Beretta, in questo caso si è sfruttata la conoscenza degli sforzi principali per la valutazione del K massimo. Per entrambe le tipologie di difetti si sono costruite delle mappe che mostrano il valore dell'indice di propagazione ($IP = \Delta K_{max} / \Delta K_{th}$) per ogni punto dello stabilizzatore.

L'ultimo passo è stato valutare la probabilità di cedimento secondo un appropriato modello statistico. È stato usato un modello *weakest link* in cui ogni elemento è costituito da una regione dello stabilizzatore. La conoscenza della densità di difetto e della distribuzione che caratterizza la popolazione dei massimi dei difetti è stata possibile tramite una analisi combinata con *eddy current* e microscopio ottico.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Pimminger M, Pichler A. High-strength steel grades for automotive industry – market trends concerning steel grades and quality requirements. Proceedings of the 4th European Oxygen Steelmaking Conference, Graz, 2003.
- [2] Murakami . Metal Fatigue: Effects of Small Defects and Nonmetallic Inclusions. Oxford: Elsevier, 2002.
- [3] Murakami , Endo M. Effects of hardness and crack geometries on ΔK_{th} of small cracks emanating from small defects, the behaviour of short fatigue cracks. Proceeding of ECF1, 1986.
- [4] Murakami , Endo M. Effects of defects, inclusions and inhomogeneities on fatigue strength. Int J Fatigue. 1994;16:163-82.
- [5] Kawachi S, Amada K, Kunio T. Characteristics of small crack propagation near the endurance limit of low carbon steel. Trans Jpn Soc Mech Eng. 1989;55(511):424-29.
- [6] Beretta S, Chai G, Soffiati E. A weakest link analysis for the fatigue strength of components containing defects. Proceedings of the 11th Int Conf Fract, Turin, 2005.
- [7] Murakami , Toriyama T, Coudert EM. Instructions for a new method of inclusion rating and correlations with the fatigue limit. J Test Eval. 1994;22:318-26;
- [8] Murakami , Beretta S. Small defects and inhomogeneities in fatigue strength: experiments, models and statistical implications. Extremes. 1999;2:123-47.
- [9] ESIS P11-02: Technical Recommendations for the Extreme Value Analysis of Data on Large Nonmetallic Inclusions in Steel. ESIS Procedures and Documents. 2002.
- [10] ASTM E2283-03: Standard Practice for Extreme Value Analysis of Nonmetallic Inclusions in Steel and Other Microstructural Features. ASTM International. 2003.
- [11] Beretta S, Desimone H, Madia M, Poli A. Multiaxial fatigue and defect assessment of truck stabilisers. Int J Vehicle Design. 2006;40:212-227.
- [12] ABAQUS Ver 6.5.1 Reference Manual. 2005.
- [13] Newman JC, Rau IS. An empirical stress intensity factor equation for the surface crack. Eng Fract Mech. 1981;15:185-192.
- [14] Kassir MK, Sih GC. Three-dimensional stress distribution around an elliptical crack under arbitrary loadings. E J Appl Mech. 1966;33:601-611.
- [15] Erdogan F, Sih GC. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. J B Eng. 1963;519-527.
- [16] Beretta S, Murakami . SIF and threshold for small cracks at small notches under torsion. Fatigue Fract Engng Mater Struct. 2000;23:97-104.
- [17] Coles S. An Introduction to Statistical Modeling of Extremes Values. London: Springer-Verlag, 2001.
- [18] Beretta S, Anderson C, Murakami . Extreme value models for the assessment of steels containing multiple types of inclusion. Acta Mater. 2006;54(8):2277-2289.