

RIDUZIONE DI DATI DI CRESCITA DI CRICCA A FATICA MEDIANTE INTERPOLAZIONE DIRETTA DELLA CURVA $N - a$

P. Matteis, M. Chiarbonello, D. Firrao

DISMIC, Politecnico di Torino, Corso Duca degli Abruzzi 24 - 10129 Torino, paolo.matteis@polito.it

SOMMARIO

La vita residua a fatica di un manufatto è normalmente calcolata in base ad una legge di crescita di cricca a fatica, per esempio quella di Paris, ed all'insieme di parametri necessari per tale legge, per esempio i parametri C ed m della medesima legge di Paris. La precisione di questo calcolo dipende dalla verosimiglianza della legge di crescita di cricca adottata e dalla precisione con la quale i parametri (per esempio C ed m) sono stati sperimentalmente determinati. Questi parametri sono normalmente determinati interpolando i diagrammi $\Delta K - da/dN$ (ampiezza del fattore di intensità della tensione - avanzamento per ciclo), i quali, a loro volta, sono ottenuti dai diagrammi sperimentali $N - a$ (numero di cicli - lunghezza di cricca) mediante una derivata calcolata numericamente ad intervalli successivi di Δa (che causa una elevata dispersione dei dati), oppure mediante una procedura arbitraria di filtrazione numerica. Per conseguire una maggiore precisione nella determinazione dei suddetti parametri C ed m , si propone, invece, di interpolare direttamente il diagramma $N - a$, minimizzando lo scarto quadratico medio tra la curva $N - a$ sperimentale e la curva $N - a$ calcolata con i parametri C ed m medesimi. Sono presentate tre procedure, che si differenziano per il metodo di calcolo della crescita della cricca (incrementale oppure per integrazione analitica) e per il fatto di considerare come variabile indipendente il numero di cicli (metodo diretto) oppure la lunghezza di cricca (metodo inverso). I vantaggi e gli svantaggi dei tre metodi in termini computazionali sono brevemente discussi. Ciascuna procedura è applicata a dati sperimentali ottenuti da prove di crescita di cricca a fatica svolte in modo ordinario su un acciaio per stampi. La precisione delle stime ottenute è poi verificata confrontando la precisione con la quale la legge di Paris consente di riprodurre gli esperimenti medesimi, adottando i valori dei parametri C ed m ottenuti con ciascuno dei metodi esposti oppure con il metodo ordinario (interpolazione del diagramma $\Delta K - da/dN$).

ABSTRACT

The residual fatigue life of a component is usually computed on the basis of a fatigue crack growth law, for example, the Paris one, and of the set of parameters necessary for such a law, for example, the C and m parameters for the Paris law itself. The precision of this calculation depends upon the likelihood of the adopted fatigue crack growth law and upon the precision of the experimental determinations of the parameters. These parameters (for example, C and m) are usually determined by interpolating the $\Delta K - da/dN$ (stress intensity factor amplitude - crack advancement per cycle) diagrams, that, in turn, are obtained from the $N - a$ (number of elapsed cycles - crack length) experimental diagrams by using a numerical derivative computed at successive Δa intervals (which causes a large data dispersion), or an arbitrary numerical filtering procedure. In order to obtain a better precision in the determination of the abovementioned C and m parameters, it is instead proposed of directly interpolating the $N - a$ diagram, by minimizing the mean square residual between the experimental $N - a$ curve and the $N - a$ curve computed by using the C and m parameters themselves. Three procedures are presented, which are differentiated due to the crack growth calculation method (incremental or by analytical integration) and to the fact of considering as the independent variable either the number of elapsed cycles (direct methods) or the crack length (inverse method). The computational advantages and shortcomings of the three methods are briefly discussed. Each

procedure is applied to experimental data obtained from fatigue crack growth tests performed with the standard mode upon a mold steel. The precision of the obtained estimates is then verified by comparing the precision with which the Paris law allows to reproduce the experiments themselves, by adopting the C and m parameters obtained with each of the proposed methods or with the standard method (interpolation of the $\Delta K - da/dN$ diagram).

1. INTRODUZIONE

Una prova di Crescita di Cricca a Fatica (CCF), svolta con un rapporto di forza costante, è descritta da una storia dei carichi, da una serie di misure di lunghezza della cricca, e da una funzione di calibrazione. Nella maggior parte dei casi, la storia dei carichi si può descrivere come una sequenza di blocchi di cicli di fatica, ciascuno svolto con una ampiezza del ciclo di forza ΔP costante. Inoltre, la funzione di calibrazione f_i , che dipende dal provino e che consente di calcolare l'ampiezza ΔK del Fattore di Intensità della Tensione (FIT) di ciascun ciclo N -esimo, si può esprimere come segue, essendo a la lunghezza della cricca:

$$\Delta K = \Delta P \cdot f_i(a) \quad (1)$$

Il metodo usuale di riduzione dei dati sperimentali di CCF consiste di due passi. Nel primo passo, una serie di dati da/dN di velocità di CCF è ottenuta con una derivata calcolata numericamente ad intervalli successivi di Δa (che causa una elevata dispersione dei dati) (metodo della secante) oppure con delle interpolazioni polinomiali locali della medesima curva (metodo polinomiale incrementale) [1], ed una corrispondente serie di ampiezze ΔK del FIT è calcolata applicando l'eq. (1) alle lunghezze di cricca opportune. Nel secondo passo, i punti $\Delta K - da/dn$ sono rappresentati in un diagramma doppio logaritmico ed interpolati ad ottenere la legge di Paris oppure un'altra legge di CCF. Queste leggi si possono esprimere come segue, essendo $\{\theta\}$ un vettore di parametri:

$$\frac{da}{dn} = f_{ii}(\Delta K, \{\theta\}) \quad (2)$$

Per esempio, la legge di Paris si può esprimere scegliendo:

$$f_{ii}(\Delta K, \{\theta\}) = C \cdot \Delta K^m \quad \text{con} \quad \{\theta\} = \{C, m\} \quad (3)$$

Normalmente, solo la legge di CCF ed i suoi parametri $\{\theta\}$ sono usati per svolgere calcoli di vita residua (o altri calcoli di CCF) di componenti reali, in luogo delle serie di punti $\Delta K - da/dN$ originarie. Inoltre, se la serie di punti $\Delta K - da/dN$ fosse usata direttamente in un modello di CCF, durante il calcolo dovrebbe comunque esser interpolata, per eliminare la dispersione dei dati sperimentali ed ottenere da/dN come funzione univoca di ΔK (nell'intervallo considerato), e la funzione interpolante si potrebbe esprimere nella forma dell'eq. (2) (eventualmente con un grande numero di parametri). Perciò, la precisione di un modello di CCF dipende dalla verosimiglianza della legge di CCF o funzione interpolante, f_{ii} , e dalla precisione dei parametri $\{\theta\}$ determinati sperimentalmente.

Avendo svolto prove a ΔK costante, Zheng et al. [2] hanno migliorato la precisione dei parametri della legge di Paris determinati sperimentalmente sostituendo il suddetto primo passo con un'interpolazione lineare di ciascuna porzione a ΔK costante della curva $N - a$, sebbene abbiano poi svolto il secondo passo nel modo normale. Questo metodo equivale ad interpolare direttamente ciascuna porzione della curva $N - a$ con una legge di CCF, quindi questi risultati suggeriscono che una interpolazione diretta potrebbe migliorare la precisione anche per intervalli nei quali ΔK cresce o decresce.

Pertanto, si propone di determinare i parametri $\{\theta\}$ di CCF con metodi a passo singolo, interpolando direttamente i dati sperimentali di CCF (lunghezze di cricca misurate, storia dei carichi e funzione di calibrazione), con una legge di CCF opportuna. I metodi a passo singolo proposti sono concepiti per essere usati sui dati ottenuti da procedure sperimentali ordinarie di CCF (costituite da una sequenza di blocchi di cicli di fatica, ciascuno svolto con ΔP costante) e con una legge o funzione di CCF espressa nella forma dell'eq. (2).

2. METODI DI RIDUZIONE DEI DATI

2.1 Nomenclatura

L'ampiezza di forza, la lunghezza di cricca e l'ampiezza di FIT del ciclo N -esimo sono indicate

rispettivamente da $\Delta P(N)$, $a(N)$ e $\Delta K(N)$. Inoltre, dai sperimentali noti, cioè la storia dei carichi e le misure di lunghezza della cricca, sono descritti da:

- un vettore ordinato $\{N\}$, il cui primo elemento è $N_0 = 0$ ed il cui i -esimo elemento N_i (con i intero positivo) è il numero del ciclo dopo il quale è stato iniziato un nuovo blocco di fatica (con ampiezza diversa), o prima del quale è stata eseguita una misura sperimentale della lunghezza della cricca;
- un vettore $\{a\}$ il cui i -esimo elemento a_i è la lunghezza di cricca misurata prima del ciclo N_i (a_0 è quindi la lunghezza della precricca), oppure non è sperimentalmente noto;
- un vettore ordinato ausiliario $\{f\}$ tale che a_i è definito se e solo se i appartiene ad $\{f\}$;
- un vettore $\{\Delta P\}$ il cui i -esimo elemento è l'ampiezza di forza ΔP_i usata nei cicli tra $N_{i-1}+1$ ed N_i .

2.2 Metodo incrementale diretto

Combinando le eq. (1) e (2), e scegliendo $dN = 1$ (1), la lunghezza della cricca $a(N)$ dopo il ciclo N -esimo si può calcolare con l'equazione incrementale:

$$a(N) = f_{III}(N, \bar{a}_0, \{\theta\}, \{\Delta P\}, \{N\}) = \begin{cases} \bar{a}_0 & N=0 \\ a(N-1) + f_{II}(\Delta P(N) \cdot f_I(a(N-1)), \{\theta\}) & n > 0 \end{cases} \quad (4)$$

in cui \bar{a}_0 è una stima della lunghezza della precricca e $\Delta P(N)$ si ottiene dai vettori sperimentali $\{\Delta P\}$ ed $\{N\}$. Una stima di \bar{a}_0 e di $\{\theta\}$ con il Metodo dei Minimi Quadrati (MMQ) si può, quindi, ottenere dalla minimizzazione del residuo R_{Dinc} :

$$R_{Dinc} = \sum_{i \in \{f\}} (a_i - a(N_i))^2 = \sum_{i \in \{f\}} (a_i - f_{III}(N_i, \bar{a}_0, \{\theta\}, \{\Delta P\}, \{N\}))^2 \quad (5)$$

Si ritiene necessario usare \bar{a}_0 come parametro di minimizzazione anche se è disponibile una misura a_0 della lunghezza della precricca, perché, altrimenti (cioè se si usasse il valore misurato a_0 in luogo del parametro di minimizzazione \bar{a}_0 nell'eq. (4)) l'influenza di a_0 sui valori dei parametri $\{\theta\}$ ottenuti dalla minimizzazione sarebbe molto maggiore dell'influenza di ogni altra singola misura a_i (con $i \neq 0$). Se le eq. (4) e (5) sono implementate nello stesso ciclo iterativo, il calcolo di R_{Dinc} per valori dati di \bar{a}_0 e di $\{\theta\}$ richiede un numero di iterazioni, ciascuna contenente 1 valutazione di f_{II} e di f_I , pari al numero dei cicli di fatica. Perciò, il tempo di calcolo aumenta linearmente con il numero dei cicli di fatica e, poiché la minimizzazione richiede di calcolare R_{Dinc} anche centinaia di volte, può essere molto lungo.

2.3 Metodo integrale inverso

Invertendo l'eq. (2), sostituendo ΔK per mezzo dell'eq. (3), ed integrando, si può calcolare il numero di cicli $\tilde{N}_2 - \tilde{N}_1$, necessario per accrescere una cricca da una lunghezza iniziale \tilde{a}_1 ad una lunghezza finale \tilde{a}_2 con una ampiezza di forza costante ΔP , nel seguente modo:

$$\tilde{N}_2 - \tilde{N}_1 = f_{IV}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \Delta P, \{\theta\}) = \int_{\tilde{a}_1}^{\tilde{a}_2} (f_{II}(\Delta P \cdot f_I(a), \{\theta\}))^{-1} da \quad (6)$$

sebbene la funzione f_{IV} così definita non assicuri un risultato intero. Pertanto, se a_i è sempre noto, il numero $N(a_i)$ del ciclo finale del i -esimo blocco di cicli si può calcolare come segue:

$$N(a_i) = f_V(i, \{\theta\}, \{\Delta P\}, \{a\}) = \begin{cases} 0 & i=0 \\ N(a_{i-1}) + f_{IV}(a_{i-1}, a_i, \Delta P_i, \{\theta\}) & i > 0 \end{cases} \quad (7)$$

e si può ottenere una stima di $\{\theta\}$ con il MMQ minimizzando il residuo quadratico R_{II} :

$$R_{II} = \sum_i (N_i - N(a_i))^2 = \sum_i (N_i - f_V(i, \{\theta\}, \{\Delta P\}, \{a\}))^2 \quad (8)$$

Questo metodo si può usare solo se la lunghezza della cricca è stata misurata ogni volta che è stata cambiata l'ampiezza di forza. Inoltre, i minimi di R_{II} e di R_{Dinc} non sono necessariamente uguali, perché la lunghezza della cricca è trattata nel primo caso come variabile indipendente e nel secondo come variabile dipendente (in opposizione al numero di cicli). Poiché fisicamente la lunghezza di cricca è determinata dal numero di cicli, e poiché i valori di lunghezza di cricca presentano una incertezza di

1 Cioè scegliendo di aggiornare il FIT e la velocità di CCF ogni $dn = 1$ cicli.

misura, mentre i corrispondenti numeri di cicli sono numeri interi noti in modo esatto, la minimizzazione di R_{Dinc} è definita *diretta* ed è preferita rispetto a quella di R_{II} , che è definita *inversa*. Tuttavia, il tempo di calcolo necessario per valutare R_{II} può essere molto minore di quello necessario per valutare R_{Dinc} . Infatti, se le eq. (7) e (8) sono implementate nello stesso ciclo iterativo, contenente una valutazione dell'integrale descritto nell'eq (6), questo ciclo deve essere iterato un numero di volte pari alla dimensione del vettore $\{N\}$, la quale, nella maggior parte delle prove di CCF, è da 2 a 4 ordini di grandezza più piccola rispetto al numero dei cicli di fatica. Anche se questa integrazione dovesse essere svolta con un metodo numerico, il metodo integrale inverso può ancora esser molto più veloce di quello incrementale diretto, se il numero di passi di integrazione è in media molto minore del numero di cicli contenuti in ciascun blocco di cicli di fatica, oppure se la parte integrale della funzione f_{IV} è calcolata prima dell'inizio della procedure di minimizzazione, e poi (durante la procedura di minimizzazione medesima) è valutata per interpolazione tra i punti precedentemente calcolati.

2.4 Metodo integrale diretto

Definita la funzione f_{IV}^{-1} come inversa di f_{IV} rispetto all'argomento \bar{a}_2 , si può calcolare la lunghezza di cricca ottenuta dopo il ciclo N -esimo nel seguente modo:

$$a(N_i) = f_{VI}(i, \bar{a}_0, \{\theta\}, \{\Delta P\}, \{N\}) = \begin{cases} \bar{a}_0 & n=0 \\ f_{IV}^{-1}(a(N_{i-1}), N_i - N_{i-1}, \Delta P_i, \{\theta\}) & n>0 \end{cases} \quad (9)$$

e si possono stimare \bar{a}_0 e $\{\theta\}$, secondo il MMQ, minimizzando il residuo quadratico R_{Dint} :

$$R_{Dint} = \sum_{i \in \{I\}} (a_i - a(N_i))^2 = \sum_{i \in \{I\}} (a_i - f_{VI}(i, \bar{a}_0, \{\theta\}, \{\Delta P\}, \{N\}))^2 \quad (10)$$

Il ruolo di \bar{a}_0 in questo metodo è lo stesso già descritto per il metodo incrementale diretto. Inoltre, i minimi di R_{Dint} e di R_{Dinc} teoricamente sono uguali, quindi questo metodo non presenta le limitazioni teoriche del metodo integrale inverso. Il tempo di calcolo, invece, potrebbe essere maggiore rispetto al metodo integrale inverso, per la necessità di invertire (in generale numericamente) la funzione f_{IV} . Tuttavia, considerato il fenomeno fisico, si ritiene che la funzione f_{IV} sia monotona e lentamente variabile (rispetto all'argomento \bar{a}_2), e, pertanto, facilmente invertibile. In particolare, se la parte integrale della funzione f_{IV} è calcolata preliminarmente, la valutazione di f_{IV}^{-1} per interpolazione tra i punti memorizzati richiede un tempo di calcolo simile a quello necessario per valutare f_{IV} medesima, e pertanto il metodo integrale diretto potrebbe essere veloce quanto quello integrale inverso.

2.5 Sequenze di calcolo

Ciascuno dei metodi sopra esposti richiede una stima iniziale di $\{\theta\}$ ed eventualmente di \bar{a}_0 , da usare in una procedura di minimizzazione iterativa. La lunghezza misurata a_0 della precricca può essere usata come prima stima di \bar{a}_0 , mentre la prima stima di $\{\theta\}$ può essere calcolata usando un metodo usuale (a due passi) di riduzione dei dati di CCF.

3. PARTE SPERIMENTALE

3.1 Prove di CCF

È stato usato un provino di tipo CT, di spessore $B = 6$ mm e di larghezza nominale $W = 50$ mm, ricavato da una posizione di media profondità (distante 309 mm dalla superficie) entro un blumo bonificato di acciaio 1.2738, di dimensione originaria 2970 x 1285 x 1190 mm (destinato alla produzione di uno stampo di grande dimensione per materie plastiche), con la seguente composizione (percentuali in massa): C 0,42, Cr 2,0, Mn 1,5, Ni 1,1, Mo 1,1, Si 0,37, S 0,002, P 0,006. Il ciclo di produzione del blumo e le sue microstrutture e proprietà meccaniche sono stati precedentemente descritti [4,5]; in particolare, in base a queste precedenti prove, la tensione di snervamento R_{p02} e la tenacità a frattura K_{Ic} del campione sono rispettivamente pari a 810 MPa ed a 40 MPa \sqrt{m} .

È stata impiegata la seguente procedura, conforme alla norma [1]: precricatura con ΔK finale 14,4 MPa \sqrt{m} ; fatica a ΔK decrescente realizzata con riduzione per passi dell'ampiezza di forza ΔP , fino all'osservazione di una velocità di CCF inferiore a 10^{-10} m/ciclo (soglia convenzionale); fatica a ΔK crescente realizzata con ampiezza di forza ΔP prima crescente e poi costante, fino al raggiungimento della massima lunghezza di cricca ammissibile (0,8 W); rottura per carico monotono crescente.

Tutto l'esperimento (tranne la rottura finale) è stato condotto in controllo di forza e con rapporto di

forza $R = 0,1$. La lunghezza di cricca è stata misurata per via ottica.

3.2 Riduzione dei dati

La funzione di calibrazione del campione impiegato è [1]:

$$f_I(a) = \frac{\Delta K}{\Delta P} = \frac{1}{B\sqrt{W}} \cdot f\left(\frac{a}{W}\right) \quad (11)$$

avendo usato l'abbreviazione:

$$f(\alpha) = (2+\alpha) \cdot (1-\alpha)^{-3/2} \cdot (0,886 + 4,64 \cdot \alpha - 13,32 \cdot \alpha^2 + 14,72 \cdot \alpha^3 - 5,6 \cdot \alpha^4) \quad (12)$$

È stata impiegata come f_I la legge di Paris descritta nell'eq. (3). Perciò, è stata esclusa dai calcoli la parte dell'esperimento nella quale sono state realizzate le velocità di crescita minori e sono state invece considerate, separatamente, la parte iniziale della prova a ΔK decrescente e la parte finale della prova a ΔP costante, nelle quali la velocità di CCF è stata superiore a 10^{-9} m/ciclo. I due intervalli esaminati sono costituiti rispettivamente da $3,15 \cdot 10^6$ cicli con 22 diversi livelli di ampiezza di forza e 61 misure di lunghezza di cricca (prova a ΔK decrescente da 14,4 a 6,0 MPa \sqrt{m}), e da $1,04 \cdot 10^6$ cicli con 66 misure di lunghezza di cricca (prova a ΔP costante e ΔK crescente da 8,7 a 32,8 MPa \sqrt{m}).

Per ridurre il tempo di calcolo, il metodo incrementale è stato realizzato con incrementi di ΔN cicli (anziché di 1 ciclo come nell'eq. (4)), con $\Delta N = 10$ o 100 cicli. Perciò, la velocità di CCF, da/dN , è stata calcolata all'inizio di ogni sottoblocco di ΔN cicli, e considerata costante nel sottoblocco stesso².

Per i metodi integrali, sono state usate la funzione primitiva F , definita dall'integrale³:

$$A = F(\alpha, m) = \int_{0,2}^{\alpha} (f(\tilde{\alpha}))^{-m} d\tilde{\alpha} \quad (13)$$

e la sua inversa F^{-1} rispetto all'argomento $\alpha = a/W$. Con queste definizioni, la funzione di CCF in condizione di ampiezza di forza ΔP costante, f_{IV} , può essere scritta come:

$$\tilde{N}_2 - \tilde{N}_1 = f_{IV}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \Delta P, \{C, m\}) = \frac{B^m \cdot W^{(2+m)/2}}{C \cdot \Delta P^m} \cdot \left(F\left(\frac{\tilde{a}_2}{W}, m\right) - F\left(\frac{\tilde{a}_1}{W}, m\right) \right) \quad (14)$$

e la sua inversa f_{IV}^{-1} può essere scritta come:

$$\tilde{a}_2 = f_{IV}^{-1}(\tilde{a}_1, \tilde{N}_2 - \tilde{N}_1, \Delta P, \{C, m\}) = W \cdot F^{-1}\left(\frac{C \cdot \Delta P^m \cdot (\tilde{N}_2 - \tilde{N}_1)}{B^m \cdot W^{(2+m)/2}} + F\left(\frac{\tilde{a}_1}{W}, m\right), m\right) \quad (15)$$

Le funzioni F , F^{-1} , f_{IV} e f_{IV}^{-1} non sono disponibili in forma chiusa. Perciò, prima di ciascun calcolo di CCF svolto con uno dei metodi integrali, la funzione F è stata calcolata per integrazione numerica, con il valore m voluto, con il metodo dei trapezi, per valori di α compresi tra 0,2 e 0,8 e con un passo $\Delta\alpha$ di 0,01 oppure 0,001, ed il risultato è stato memorizzato. Poi le funzioni f_{IV} e f_{IV}^{-1} sono state calcolate secondo le eq. (14) e (15), rispettivamente, e le funzioni F ed F^{-1} necessarie a questo scopo sono state valutate per interpolazione lineare tra i punti memorizzati.

Nel caso a ΔK crescente come prima stima dei parametri C ed m è stata usata la media dei risultati ottenuti con due metodi normali (metodo della secante e metodo polinomiale su 5 punti), mentre nel caso a ΔK decrescente è stato usato solo il metodo della secante (il metodo polinomiale è sconsigliato quando ΔP non è costante [1]). Come prima stima di \tilde{a}_0 è stato usato sempre il valore misurato.

Nel caso a ΔK crescente, il calcolo con il metodo polinomiale è stato svolto per confronto con interpolazione su 3, 5, 7 o 9 punti (valori usuali [1]).

La minimizzazione del residuo quadratico è stata svolta con la procedura di Lagarias et al. [6], così come realizzata in un codice di calcolo di uso generale [7]. I calcoli sono stati svolti con un linguaggio di programmazione interpretato [7] e con un microprocessore Intel Pentium 4 con frequenza 1,8 GHz.

² Un sottoblocco di meno di Δn cicli è stato introdotto, se necessario, prima del termine di ciascun blocco di cicli.

³ L'integrale nell'eq (13) inizia dal valore minimo di validità (0,2) della funzione di calibrazione (eq. (11)).

4. RISULTATI

I valori dei parametri C ed m della legge di Paris, ottenuti con i metodi normali [1] e con i metodi di minimizzazione sopra descritti, sono confrontati nelle Tab. 1 (prova a ΔK decrescente) e Tab. 2 (prova a ΔK crescente). Per ciascun metodo di minimizzazione sono presentati il tempo di calcolo ed il residuo quadratico medio al termine della minimizzazione.

Tab. 1: Prova di CCF a ΔK decrescente. Riduzione dei dati con i metodi della secante, incrementali diretti (Inc. Dir.) con incrementi ΔN , integrali inversi (Int. Inv.) ed integrali diretti (Int. Dir.) con passi di integrazione $\Delta\alpha$. Parametri C ed m di Paris; lunghezza di cricca iniziale calcolata \bar{a}_0 ; residuo della minimizzazione $r^{(0)}$; tempo di calcolo T ; residui $r^{(1)}$ ed $r^{(2)}$ ed errori previsionali $\Delta a^{(1)}$ e $\Delta a^{(2)}$ calcolati con il metodo incrementale diretto con $\Delta N = 10$.

Metodo	C	m	\bar{a}_0	$r^{(0)}$	T	$r^{(1)}$	$r^{(2)}$	$\Delta a^{(1)}$	$\Delta a^{(2)}$	$\Delta a^{(1)}$	$\Delta a^{(2)}$
	(3)	-	mm	(4)	s	mm	mm	mm	mm	%	%
Secante	0,878	3,781	-	-	-	0,56	0,88	-1,22	-1,78	-12,5	-18,2
Inc. Dir. ($\Delta N = 100$)	1,256	3,662	12,05	0,05	440	0,41	0,05	0,8	0,03	8,2	0,3
Inc. Dir. ($\Delta N = 10$)	1,257	3,661	12,05	0,05	4457	0,41	0,05	0,8	0,03	8,2	0,3
Int. Inv. ($\Delta\alpha = 0,01$)	1,051	3,742	-	13404	0,31	0,74	0,28	1,4	0,5	14,3	5,1
Int. Inv. ($\Delta\alpha = 0,001$)	1,047	3,743	-	13478	0,80	0,71	0,26	1,34	0,45	13,7	4,6
Int. Dir. ($\Delta\alpha = 0,01$)	1,256	3,662	12,05	0,05	12,4	0,44	0,05	0,86	0,08	8,8	0,8
Int. Dir. ($\Delta\alpha = 0,001$)	1,257	3,661	12,05	0,05	17,5	0,41	0,05	0,8	0,03	8,2	0,3

(1) calcolo con \underline{a}_0 misurato

(2) calcolo con la miglior stima di \bar{a}_0 (metodo incrementale diretto con $\Delta n = 10$)

(3) 10^9 mm (Mpa \sqrt{m}) $^{-m}$, m variabile (colonna seguente)

(4) mm (metodi diretti) o cicli (metodo inverso)

Tab. 2: Prova di CCF a ΔK crescente. Abbreviazioni e simboli come in Tab. 1.

Metodo	C	m	\bar{a}_0	$r^{(0)}$	T	$r^{(1)}$	$r^{(2)}$	$\Delta a^{(1)}$	$\Delta a^{(2)}$	$\Delta a^{(1)}$	$\Delta a^{(2)}$
	(3)	-	mm	(4)	s	mm	mm	mm	mm	%	%
Secante	5,101	3,092	-	-	-	0,09	0,09	0,03	0,01	0,3	0,1
Polinomiale (3 punti)	4,725	3,123	-	-	-	0,15	0,15	-0,44	-0,46	-3,2	-3,3
Polinomiale (5 punti)	4,159	3,175	-	-	-	0,28	0,29	-1	-1,01	-7,1	-7,2
Polinomiale (7 punti)	3,741	3,218	-	-	-	0,37	0,38	-1,29	-1,3	-9,2	-9,3
Polinomiale (9 punti)	3,454	3,252	-	-	-	0,35	0,36	-1,1	-1,12	-7,9	-8,0
Inc. Dir. ($\Delta N = 100$)	4,639	3,132	25,43	0,08	60	0,09	0,09	0,4	0,37	2,9	2,6
Inc. Dir. ($\Delta N = 10$)	4,640	3,132	25,43	0,08	602	0,08	0,08	0,26	0,23	1,8	1,6
Int. Inv. ($\Delta\alpha = 0,01$)	4,650	3,131	-	5920	0,25	0,08	0,08	0,24	0,22	1,7	1,5
Int. Inv. ($\Delta\alpha = 0,001$)	4,695	3,126	-	5962	0,59	0,11	0,12	-0,2	-0,22	-1,4	-1,6
Int. Dir. ($\Delta\alpha = 0,01$)	4,627	3,134	25,43	0,08	6,25	0,15	0,15	0,95	0,92	6,8	6,6
Int. Dir. ($\Delta\alpha = 0,001$)	4,640	3,132	25,43	0,08	7,80	0,08	0,08	0,25	0,23	1,8	1,6

(1) (2) (3) (4) come in Tab. 1.

Inoltre, per permettere un confronto tra i diversi metodi di minimizzazione e normali, nelle tabelle sono presentati i residui quadratici medi ottenuti simulando la CCF sempre con lo stesso metodo, ma con i parametri C ed m determinati con ciascun metodo, ed usando la lunghezza di cricca iniziale misurata \underline{a}_0 (residuo $r^{(1)}$), oppure calcolata \bar{a}_0 (residuo $r^{(2)}$). Per svolgere queste ultime simulazioni è stato preferito un metodo diretto per le ragioni già sopra esposte, ed in particolare è stato scelto il metodo incrementale diretto, in quanto ben noto e generalmente accettato; per coerenza, è stato usato il valore di \bar{a}_0 ottenuto con il medesimo metodo; alcune delle curve ottenute sono esposte in Fig. 1. Le lunghezze di cricca finali ottenute dalle medesime simulazioni sono state inoltre confrontate con le corrispondenti lunghezza misurate; sono presentate nelle stesse tabelle le differenze Δa ottenute tra i valori così calcolati e quelli misurati, nei due casi di calcolo svolto con la lunghezza di cricca iniziale misurata \underline{a}_0 (differenza $\Delta a^{(1)}$) oppure calcolata \bar{a}_0 (differenza $\Delta a^{(2)}$). Le differenze Δa costituiscono una stima della correttezza delle previsioni di vita a fatica che è possibile ottenere con la legge di Paris e

con i parametri C ed m di volta in volta considerati. Quest'ultima stima è ottenuta considerando il medesimo campione prima come fonte osservabile dei dati sperimentali, e poi come struttura non osservabile di cui si vuole predire la CCF [8]. Il diagramma di Paris complessivo è esposto in Fig. 2.

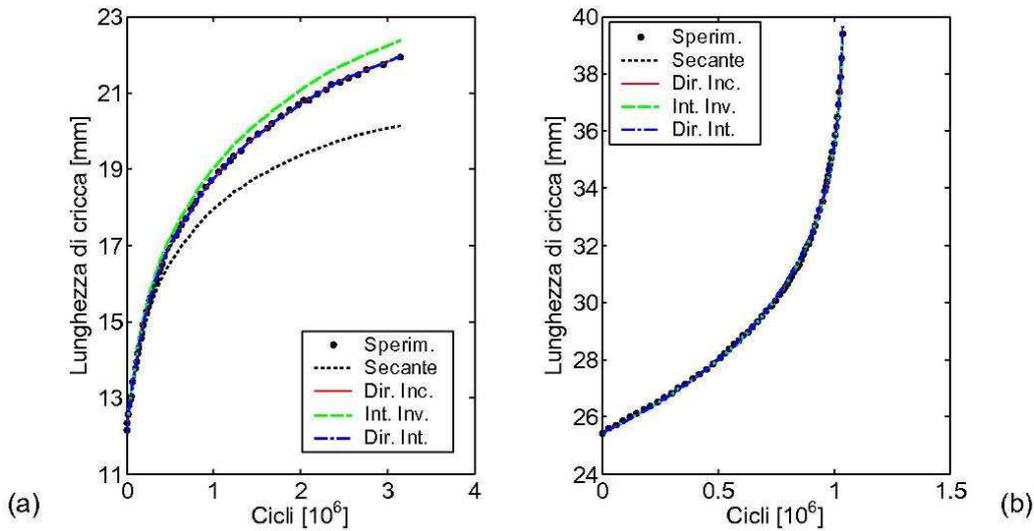


Fig. 1. Diagrammi $N - a$ (lunghezza di cricca – numero di cicli). Punti sperimentali e curve calcolate (con il metodo incrementale diretto e con la miglior stima di \bar{a}_0) con i parametri C ed m ottenuti con i metodi indicati (svolti con la precisione maggiore); casi a ΔK decrescente (a) e crescente (b).

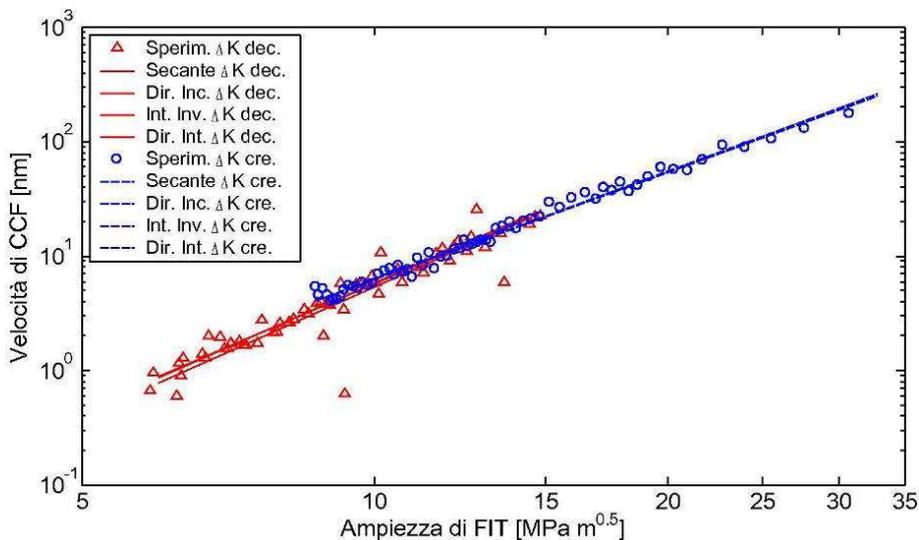


Fig. 2. Diagramma di Paris $\Delta K - da/dN$ (ampiezza di FIT - velocità di CCF). Punti ottenuti con il metodo della secante e rette calcolate con i parametri C ed m ottenuti con i metodi indicati (eseguiti con la precisione maggiore); casi a ΔK decrescente e crescente.

5. DISCUSSIONE E CONCLUSIONI

La diversità tra i valori di m e C ottenuti nella prova di CCF a ΔK crescente, rispetto a quelli ottenuti nella prova a ΔK decrescente, è molto probabilmente causata dal fatto che le due prove hanno riguardato diversi intervalli di valori di ΔK (Fig. 2).

I tre metodi di riduzione dei dati di CCF proposti hanno reso risultati coerenti e verosimili. Il metodo incrementale diretto e quello integrale diretto hanno reso risultati sempre tra loro concordi quando eseguiti con la precisione di calcolo maggiore (incrementi ΔN di 10 cicli e passo di integrazione $\Delta \alpha$ di 0,001 rispettivamente, Fig. 1). I risultati ottenuti con i medesimi metodi, ma con la precisione di calcolo minore (incrementi ΔN di 100 cicli e passo di integrazione $\Delta \alpha$ di 0,001), nel caso a ΔK decrescente sono quasi uguali a quelli ottenuti con la precisione maggiore (Tab. 1); invece, nel caso a ΔK crescente il metodo integrale diretto con passo $\Delta \alpha$ di 0,01 ha reso residui maggiori e una capacità predittiva inferiore ($\Delta a^{(1)}$ e $\Delta a^{(2)}$ sensibilmente maggiori) rispetto agli altri metodi diretti (Tab. 2). II

metodo integrale inverso ha conseguito una precisione valutata sui residui $r^{(1)}$ ed $r^{(2)}$ e sulla capacità previsionale, Tab. 1) simile a quella dei metodi integrali diretti (eseguiti con la precisione maggiore) nel caso a ΔK crescente, ma considerevolmente inferiore nel caso a ΔK decrescente (Tab. 2 e Fig. 1a).

Nel caso a ΔK crescente, la riduzione del passo di integrazione (da $\Delta\alpha$ 0,01 a $\Delta\alpha$ 0,001) ha influito favorevolmente sul metodo integrale diretto (comportando una maggiore precisione ed un migliore accordo con il metodo incrementale diretto, Tab. 2), mentre nel caso a ΔK decrescente la stessa influenza è stata appena sensibile (Tab. 1); questo probabilmente perché la prova a ΔK crescente ha interessato prevalentemente valori di α (cioè di a/W) più grandi, in corrispondenza dei quali la funzione integranda è più ripida e quindi è più vantaggioso usare un minore passo di integrazione.

Riguardo ai tempi di calcolo (Tab. 1 e Tab. 2), rispetto al metodo integrale inverso, che è il più veloce, risulta che il metodo integrale diretto è circa 1 ordine di grandezza più lento, ed il metodo incrementale diretto è 2 o 3 ordini di grandezza più lento, in funzione dell'incremento ΔN scelto. I tempi di calcolo dei metodi integrali sono poco sensibili alla variazione del passo di integrazione $\Delta\alpha$, mentre la velocità del metodo incrementale dipende inversamente dall'incremento ΔN ; ciò perché nei metodi integrali le funzioni F e F^{-1} sono realizzate per interpolazione tra punti memorizzati, calcolati soltanto una volta per ciascuna simulazione di CCF (effettuata con un diverso valore di m), mentre nel metodo incrementale ΔN determina direttamente il numero di iterazioni effettuate per ciascuna simulazione.

Complessivamente, tra i metodi proposti è preferibile quello integrale diretto (realizzato con la precisione maggiore), il quale, in primo luogo, ha conseguito risultati sempre sostanzialmente migliori di quelli ottenuti con il metodo integrale inverso e pressoché identici a quelli ottenuti con il metodo incrementale diretto, ed in secondo luogo è più veloce del medesimo metodo incrementale diretto.

Nel caso a ΔK decrescente il metodo integrale diretto realizzato con la precisione maggiore ha reso un risultato chiaramente migliore rispetto al metodo normale (metodo della secante, Tab. 1 e Fig. 1a); in particolare, il suo errore previsionale è stato nettamente inferiore. Nel caso a ΔK crescente i metodi proposti (eseguiti con la precisione maggiore) si sono dimostrati analogamente più precisi dei metodi normali polinomiali (sebbene con un vantaggio talvolta minore rispetto al caso a ΔK decrescente), ma non rispetto al metodo della secante (Tab. 2 e Fig. 1b); in particolare, quest'ultimo ha reso residui quasi uguali (poco maggiori), ma ha conseguito la miglior stima della lunghezza finale della cricca.

Questa differenza tra i casi a ΔK decrescente e crescente potrebbe essere correlata alla maggiore dispersione dei dati sperimentali che normalmente si verifica al decrescere della velocità di CCF; questa ipotesi implica che il metodo integrale diretto (e similmente gli altri metodi proposti) offra un vantaggio importante nei casi in cui i dati presentano la maggiore dispersione.

Allo scopo di verificare l'utilità e l'efficacia dei metodi di interpolazione diretta proposti è tuttavia necessario svolgere una più ampia serie di prove su dati sperimentali ottenuti da numerosi campioni, anche di diversa natura; poiché i metodi di riduzione dei dati proposti non richiedono variazioni nella conduzione degli esperimenti, rispetto al metodo normale, queste prove si potrebbero svolgere anche su dati sperimentali precedenti; in considerazione dei risultati qui presentati, le medesime prove potrebbero essere svolte impiegando il solo metodo integrale diretto.

BIBLIOGRAFIA

- [1] E647-00. Standard test method for measurement of fatigue crack growth rates. ASTM, 2000.
- [2] Z. Zheng, B.E. Powell, J. Byrne, I.W. Hussey. The characterization of fatigue crack growth behaviour by constant ΔK control testing. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, v 22, n 5, 1999, 383-92.
- [3] UNI EN ISO 4957:2002, Acciai per utensili, UNI, 2002.
- [4] D. Firrao, P. Matteis, G. Scavino, G. Ubertalli, M.G. Ienco, A. Parodi, M.R. Pinasco, E. Stagno, R. Gerosa, B. Rivolta, G. Silva, A. Ghidini. Heat treatment and failure risk of large automotive plastic molds: a fracture mechanics approach and property assessment. *La Metallurgia Italiana*, n. 11-12, 2006, pp. 43-51.
- [5] D. Firrao, P. Matteis, G. Scavino, G. Ubertalli, M.G. Ienco, M.R. Pinasco, E. Stagno, R. Gerosa, B. Rivolta, A. Silvestri, G. Silva, A. Ghidini. Relationships between tensile and fracture mechanics properties and fatigue properties of large plastic mould steel blocks. *Materials Science and Engineering A*, 2007, in stampa.
- [6] Lagarias J.C., Reeds J.A., Wright M.H., Wright P.E., Convergence properties of the Nelder-Mead simplex method in low dimensions, *SIAM J. Optimization*, 9 (1998) 112-147.
- [7] The MathWorks Inc, Matlab, versione 6.5.0 del 2002.
- [8] Z. Zheng, B.E. Powell, A method to reduce the scatter in fatigue crack growth rate data. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, v 20, n 9, 1997, 1341-1350.