

DETERMINAZIONE NUMERICA DEI FATTORI DI INTENSIFICAZIONE DEGLI SFORZI DI CRICCHE CARICATE IN MODO MISTO

C. Colombo^a, M. Guagliano^a, L. Vergani^a

^a *Dipartimento di Meccanica, Politecnico di Milano, via La Masa 34 – 20156 Milano*
e-mail: mario.guagliano@polimi.it

SOMMARIO

In questo lavoro si propone un approccio numerico per il calcolo dei fattori di intensificazione degli sforzi in una cricca interna. Il caso analizzato è quello di una semplice cricca interna, di forma ellittica, con il piano di giacitura inclinato rispetto l'asse di applicazione del carico. La cricca è inserita all'interno di un cilindro in trazione: in questo modo si vengono a creare tutti e tre i modi di carico lungo il fronte del difetto. Per il caso in analisi, la soluzione analitica è nota e viene utilizzata per determinare l'errore nei risultati numerici, ottenuti da un modello FE tridimensionale. Il modello numerico è stato sviluppato partendo da una cricca circolare, deformandone poi gli assi e la mesh adiacente attraverso una trasformazione lineare ed una ellittica delle coordinate dei nodi, in modo da verificarne i diversi comportamenti. L'accuratezza nei risultati è stata inoltre valutata utilizzando elementi a funzione di forma del primo e del secondo ordine, variando l'eccentricità della cricca e l'inclinazione del piano della sua giacitura.

ABSTRACT

Aim of this paper is to present a reliable numerical approach to calculate the three loading modes stress intensity factors for an internal crack. In order to test this approach, a rather simple case is presented: an internal, elliptical and inclined crack is placed in a cylinder subjected to a tensile load. For the proposed case, the analytical solution is known and used to determine errors in the numerical three-dimensional FE model. The numerical model is developed starting from a circular crack; afterwards crack and mesh configurations are deformed with a linear and an elliptical nodes transformation, in order to test the different behaviours. The accuracy of results is also tested using linear and quadratic order for the shape function of elements. Different eccentricities for the axes ratios and inclination of the crack plane are investigated.

1. INTRODUZIONE

Nella progettazione ingegneristica avanzata, piani efficaci di controllo della frattura sono spesso richiesti e necessari. In molti campi come quelli automobilistico, ferroviario, dei recipienti in pressione, di tubazioni, di costruzioni civili e molti altri ancora, la rilevazione della presenza di difetti o cricche e la capacità di valutare la possibilità di una loro eventuale propagazione sono di particolare importanza nella fase progettuale e di manutenzione preventiva. In particolare, l'approccio *damage tolerant* propone il controllo periodico dell'evoluzione delle cricche durante la vita di componenti e sistemi. A questo scopo sono proposte periodiche ispezioni con controlli non distruttivi.

Un approccio di questo tipo richiede l'applicazione dei concetti della meccanica della frattura per valutare l'effettiva pericolosità di tali difetti o cricche. In particolare, il fattore di intensificazione degli sforzi è il parametro utilizzato per determinare il livello di sicurezza di una struttura con cricche o difetti assimilabili a cricche. Il problema risulta più complicato se si ha la presenza di cricche interne di forma irregolare ed inclinate, cioè in condizione di modo misto di carico. In questi casi, è difficile o anche impossibile trovare soluzioni analitiche già calcolate in letteratura. La determinazione dei fattori di intensificazione degli sforzi è dunque spesso ottenuta da metodi numerici, come gli elementi finiti.

Tuttavia, nonostante l'utilizzo di sofisticati metodi, l'accuratezza della soluzione non è assicurata, specialmente per il calcolo di K_{II} e K_{III} . Negli ultimi decenni, molti lavori sono stati dedicati alla determinazione di accurate soluzioni di elementi criccati che possono essere ottenute col metodo degli elementi finiti: in particolare, l'attenzione è stata focalizzata sulla tecnica detta del *quarter point* [1-4], sulla peculiarità di mesh 3D a fronte curvilineo [4], e sulla soluzione di casi particolari (i.e.[5]). La maggior parte di tali lavori è stata incentrata su problemi relativi al modo I, mentre negli altri casi di modo misto di carico è stata evidenziata una relativamente scarsa accuratezza della soluzione [6].

Le difficoltà computazionali nell'ottenere una soluzione adeguata sono infatti elevate, e conseguentemente i risultati non sono completamente attendibili, in aggiunta spesso a lunghi tempi di calcolo.

Con lo scopo di dare un contributo alla soluzione di tali difficoltà e migliorare l'accuratezza della soluzione di problemi di carico misto di meccanica della frattura, viene proposta in questo lavoro una nuova tecnica di generazione della mesh per determinare il fattore di intensificazione degli sforzi per cricche interne con differenti forme e inclinazioni. La tecnica proposta richiede un limitato tempo di calcolo e di preparazione dei dati di input, pur permettendo di ottenere risultati molto accurati anche in condizione di carico misto. Si basa sulla trasformazione ellittica delle coordinate che, partendo da una cricca di forma circolare, permette di ottenere una cricca con fronte curvilineo. Le facce degli elementi, inoltre, risultano perpendicolari al fronte della cricca anche nel caso di un rapporto tra gli assi fino 0.01. Il modello FE iniziale della zona contenente la cricca è di forma cilindrica. Attraverso la trasformazione ellittica delle coordinate, il cilindro può facilmente essere distorto e/o inclinato per simulare una cricca con ogni forma e/o inclinazione, mantenendo una mesh con facce degli elementi sempre perpendicolari al fronte della cricca anche nel caso mesh particolarmente distorte. In questo modo è possibile ottenere una mesh fitta senza eccessiva difficoltà.

Sono poi state applicate ai nodi esterni del modello FE delle condizioni al contorno, in termini di campo di spostamenti, relative al caso in analisi. Tali spostamenti possono essere calcolati attraverso la tecnica di sottomodellazione o dalle formule analitiche (i.e. Hertz, Boussinesq o De Saint-Venant). Si è scelto questo secondo caso, per evitare errori nell'input e poiché è stato già applicato convenientemente anche in altri lavori [7,8].

Il caso di riferimento scelto per determinare l'accuratezza dei risultati, che è possibile ottenere con questa tecnica di meshatura, è quello di una cricca interna ellittica e inclinata, posizionata in un campo di sforzi remoti monoassiali di trazione. La scelta di questo caso di verifica è legata alla possibilità di avere la cricca in condizioni di apertura e di avere la contemporanea presenza dei tre modi di carico lungo il fronte del difetto; inoltre, è nota la soluzione analitica corrispondente [9]. Questo fatto permette di verificare l'adeguatezza della mesh adottata in particolare nei casi estremi, come quelli della cricca caratterizzata da elevate eccentricità. Il confronto con la soluzione analitica mostra come la trasformazione proposta per descrivere la mesh sia particolarmente efficace e permetta di ottenere buoni risultati, anche con una mesh non particolarmente raffinata.

In questo modo è possibile determinare per più combinazioni l'efficacia del modello in esame nel calcolo dei fattori di intensificazione degli sforzi.

2. COSTRUZIONE DEL MODELLO

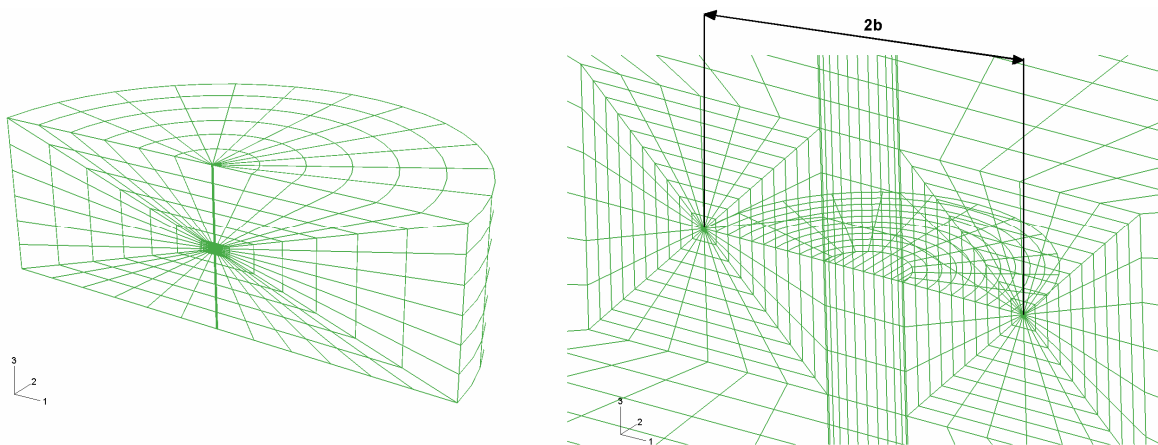


Fig. 1 – Andamento della mesh nel modello e nella zona della cricca

Con lo scopo di analizzare lo stato di sollecitazione lungo il fronte di una cricca interna ellittica in un campo di sforzi di trazione, si è costruito un modello FE di forma cilindrica, contenente una cricca inizialmente circolare. Il raggio della circonferenza che identifica il fronte di cricca ha valore indicato con b , e le dimensioni del modello, ad esso proporzionali, sono state determinate per evitare l'influenza di effetti di bordo sul calcolo delle grandezze d'interesse. In Fig. 1 è schematizzata la mesh nel modello tridimensionale in sezione e il particolare nella zona della cricca.

Per l'applicazione del carico al modello, sono stati imposti ai nodi esterni al cilindro gli spostamenti, calcolati analiticamente seguendo la teoria di De Saint-Venant di solidi sottoposti a trazione.

Procedendo in tal modo, è stato possibile in modo semplice e veloce far variare l'inclinazione del modello rispetto l'asse di applicazione del carico. In Fig. 2 è schematizzata questa prima fase di modellizzazione.

Per poter poi modificare la forma della cricca, e dunque della mesh nella zona ad essa circostante, sono state proposte due trasformazioni delle coordinate dei nodi. La prima trasformazione consiste semplicemente nel far variare la scala di uno degli assi dell'ellisse: pertanto, tale trasformazione è detta lineare. Se dunque il modello iniziale è costituito da circonferenze concentriche e rette che descrivono la direzione radiale, una volta applicata la trasformazione lineare, le circonferenze si trasformeranno in ellissi, mentre le rette varieranno la loro pendenza. Il modello FE del cilindro criccato diventerà quindi esternamente un cilindro di sezione ellittica. Questo concetto è schematizzato in Fig. 3.a.

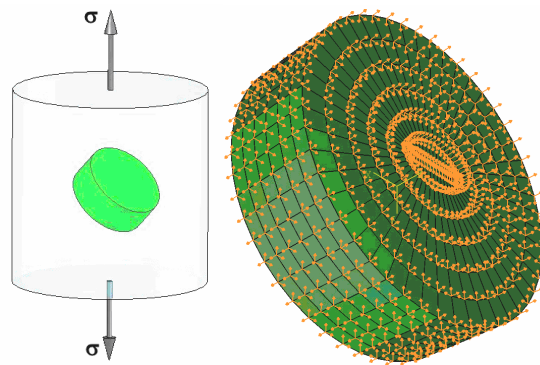


Fig. 2 - Schematizzazione della posizione del modello rispetto al carico e dei *driven nodes* cui è stato imposto il campo di spostamenti

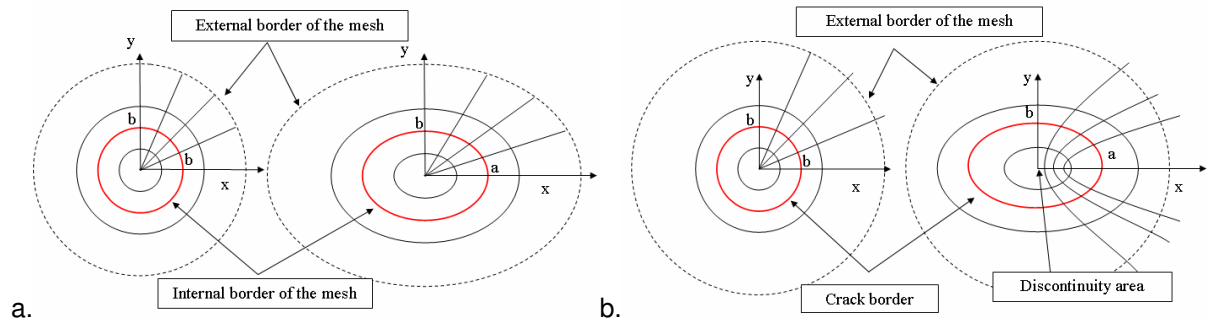


Fig. 3 – Effetto della trasformazione lineare (a.) ed ellittica (b.) sulla mesh del modello

La seconda trasformazione di coordinate proposta è chiamata ellittica, poiché trasforma le circonferenze in ellissi cofocali e le rette in iperboli, come indicato in Fig. 3.b. La formulazione è la seguente:

$$\begin{cases} x = x \sqrt{1 + \frac{a^2 - b^2}{x^2 + y^2}} \\ y = y \end{cases} \quad (1)$$

dove a e b sono i semiassi dell'ellisse finale che si vuole ottenere, x e y le coordinate iniziali mentre x' e y' quelle finali.

La particolarità della trasformazione ellittica è che permette di ottenere ellissi ed iperboli perpendicolari fra loro in ogni punto, come mostrato in Fig. 4 [10].

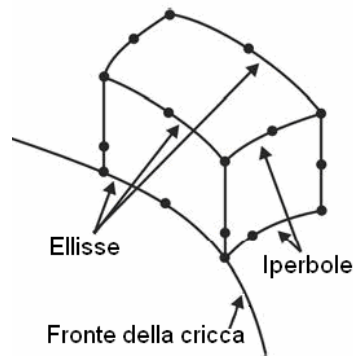


Fig. 4 – Elementi con superfici ellittiche ed iperboliche come risultato della trasformazione ellittica

Le superfici perpendicolari al fronte del difetto ellittico risultano quindi essere iperboliche: in tal modo si riesce a riprodurre la singolarità di ordine $-$ nell'andamento degli sforzi su ogni sezione iperbolica dell'elemento e non solamente sui suoi bordi, in accordo con quanto indicato in [11]. Inoltre, la perpendicolarità tra le facce risulta fondamentale ai fini della successiva analisi sviluppata attraverso il software *Abaqus*, che utilizza il metodo dell'estensione virtuale della cricca nel calcolo del J-integral, da cui sono estratti i fattori di intensificazione degli sforzi.

La trasformazione ellittica proposta in (1), ha un'ulteriore caratteristica: per punti molto distanti dall'origine degli assi, cioè all'aumentare del raggio, la trasformazione diminuisce d'intensità. In questo modo, si potranno ottenere mesh ancora cilindriche nonostante la cricca, posizionata all'interno del modello, sia diventata di forma ellittica.

L'unico svantaggio della trasformazione ellittica è che presenta nella zona dell'origine una singolarità. Per ovviare a questo problema, nella costruzione del modello si è scelto di abbandonare la simmetria cilindrica in un piccolo intorno dell'origine di raggio pari $b/2$ e di suddividere tale zona in elementi non assialsimmetrici, come mostrato in Fig. 5. Per tali elementi la trasformazione adottata è necessariamente lineare. In questo modo, la mesh generata risulta essere molto regolare anche per elevate eccentricità della cricca, cosa non possibile altrimenti con l'uso di elementi assialsimmetrici.

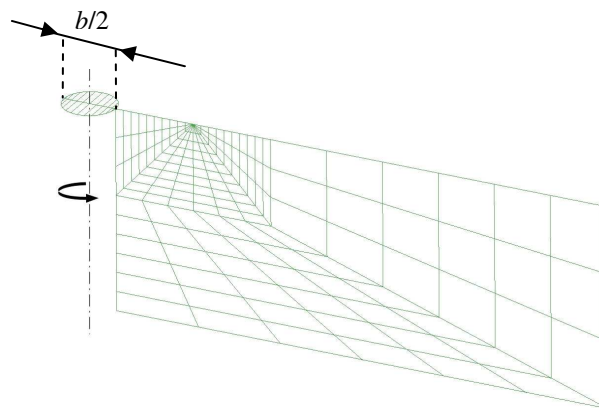


Fig. 5 – Creazione del modello nella zona prossima all'asse del cilindro e uso di elementi non assialsimmetrici

3. RISULTATI NUMERICI

Il materiale schematizzato nelle analisi è acciaio con modulo elastico 206000 MPa e coefficiente di Poisson 0.3. Il bordo della cricca è composto da 24 elementi, che in configurazione indeformata hanno un'ampiezza di 15° .

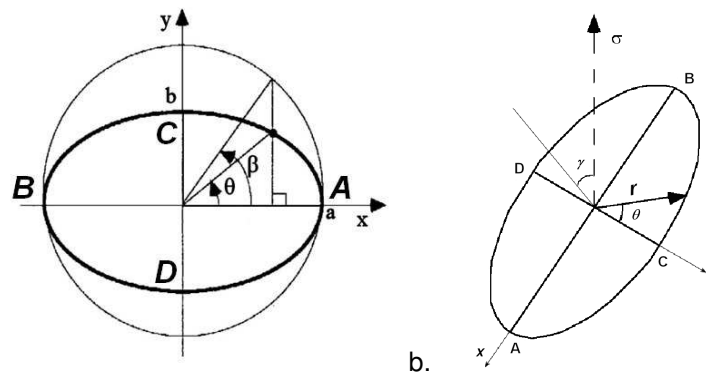


Fig. 6 – Definizione della nomenclatura di angoli e punti utilizzati come riferimento

Per descrivere il fronte della cricca, si è considerato un angolo β relativo al fronte circolare e corrispondente all'angolo θ sul fronte ellittico, come definito in Fig. 6.a. I semiassi dell'ellisse sono invece indicati con a e b , mentre i punti A, B, C e D identificano l'intersezione degli assi x e y con l'ellisse.

L'angolo γ in Fig. 6.b identifica l'inclinazione del piano della cricca rispetto l'assi di applicazione del carico. Le analisi numeriche si sono innanzitutto focalizzate sull'influenza di una variazione di γ sui fattori di intensificazione degli sforzi. I risultati sono poi stati comparati con la funzione analitica di [9] e [12]. Alcuni dei risultati numerici sono proposti graficamente in Fig. 7 per i punti A e C.

Dalle analisi numeriche si è osservato che, per i punti A e C corrispondenti ad un angolo β di 0° e 90° , K_I decresce all'aumentare dell'inclinazione della cricca. K_{II} per A e K_{III} per C, invece, presentano un massimo in modulo in corrispondenza di una inclinazione γ di 45° . Per i punti B e D rispettivamente, K_I è esattamente lo stesso, mentre K_{II} e K_{III} sono semplicemente invertiti di segno. Ulteriori analisi numeriche confermano tali risultati, e la soluzione ottenuta numericamente coincide con quella calcolata analiticamente.

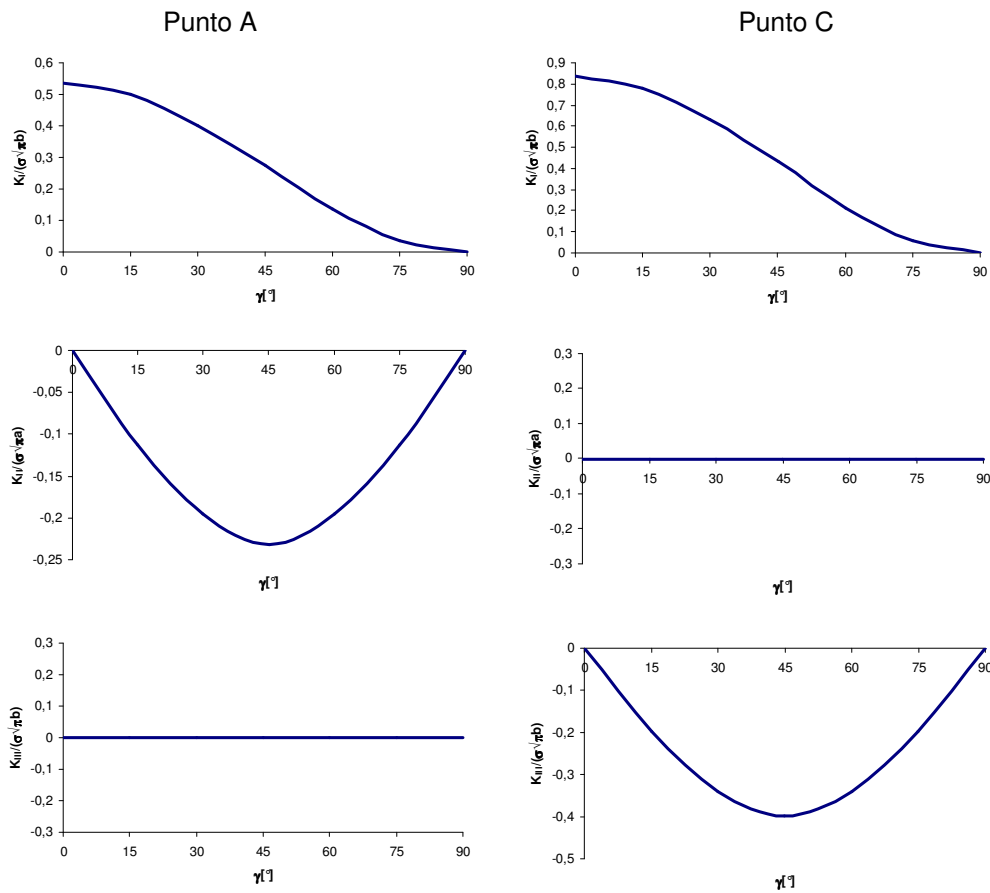


Fig. 7 – Valori analitici di K nei punti A e C, in funzione di γ , per una cricca caratterizzata da $b/a=0.4$

Alla luce di tali risultati, si è provveduto ad analizzare l'influenza della variazione di eccentricità della cricca, mantenendo fisso l'angolo $\gamma = 45^\circ$ corrispondente ad una configurazione di sforzo misto. La forma della cricca è stata fatta variare imponendo differenti valori al parametro b/a , ed analizzando la sua influenza sul fattore di intensificazione degli sforzi in funzione dell'angolo β .

Le analisi sono state sviluppate utilizzando:

- elementi a funzione di forma quadratica (C3D20, come da nomenclatura del codice commerciale utilizzato) e trasformazione lineare della *mesh* (L): C3D20-L;
- elementi a funzione di forma quadratica (C3D20) e trasformazione ellittica della *mesh* (E): C3D20-E;
- elementi a funzione di forma lineare (C3D8) e trasformazione ellittica della *mesh* (E): C3D8-E.

I risultati ottenuti per i fattori di intensificazione degli sforzi sono stati comparati con la soluzione analitica, i cui valori sono mostrati graficamente in Fig. 8. I valori sono proposti in funzione dell'angolo β lungo il fronte della cricca e per $\gamma = 45^\circ$, adimensionalizzati rispetto al valore σ dello sforzo imposto e al semiasse b per K_I e K_{III} , oppure a per K_{II} . Si può notare che K_I risulta costante solo nel caso di $b/a=1$.

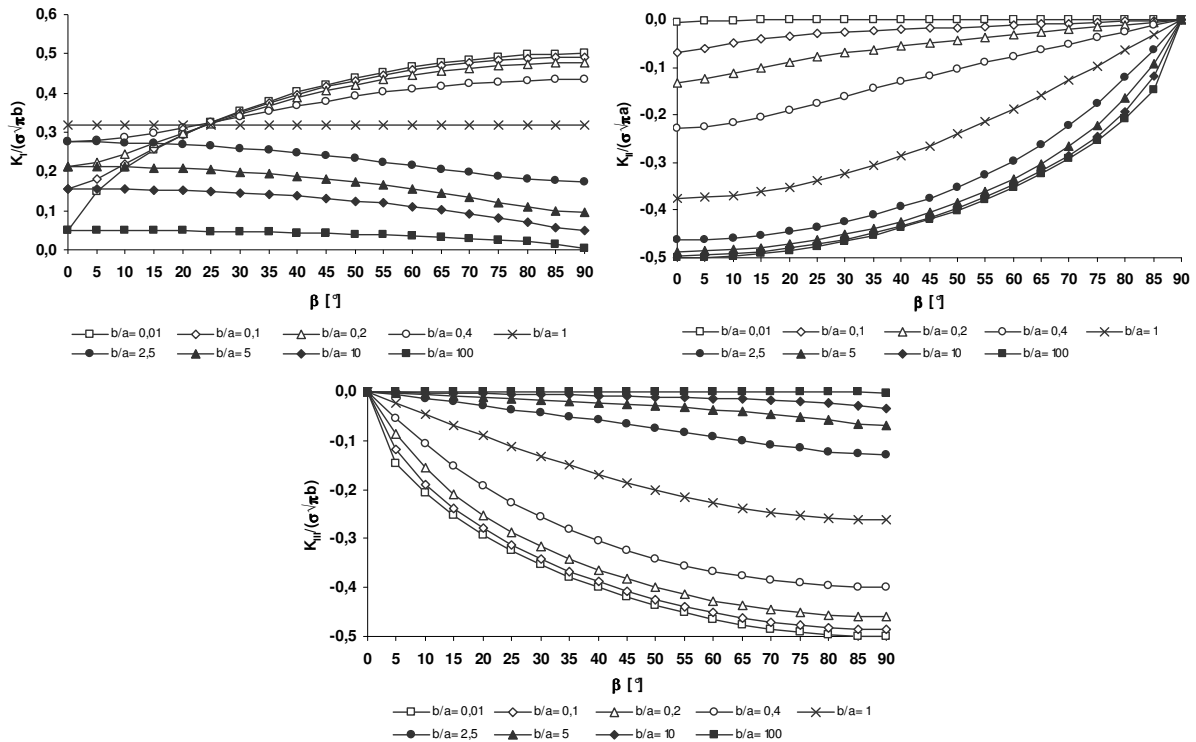


Fig. 8 – Valori analitici di K_I , K_{II} , e K_{III} per una cricca con $\gamma = 45^\circ$

Il confronto tra soluzione numerica e analitica è proposto in Tab. 1 per i rapporti $b/a = 0.01, 0.1, 1$ e per le tre situazioni analizzate (C3D20-E, C3D20-L e C3D8-E).

I risultati ottenuti per la trasformazione C3D20-E, con elementi quadratici e trasformazione ellittica di coordinate, mostrano un buon accordo tra le due soluzioni. Anche nel caso estremo di eccentricità analizzate, cioè $b/a = 100$ e, dualmente, 0.01 , la media degli errori percentuali è inferiore all'1%, ad eccezione del punto A ($\beta = 0^\circ$). Questo comportamento è dovuto alla forma stessa della cricca, che presenta estremità molto acute. Nel calcolo delle medie percentuali di K_I e K_{II} in Tab. 1 non sono dunque stati considerati i valori corrispondenti al punto A per $b/a = 0.01, 0.1$.

Considerando la mesh C3D20-L, si è osservata una minor accuratezza nei risultati lungo il fronte di cricca rispetto la C3D20-E, osservabile in particolare nei casi di $b/a \leq 0.4$ e ≥ 2.5 e per nodi prossimi all'apice più acuto, che sono parte degli elementi maggiormente modificati dalla trasformazione lineare. I risultati maggiormente influenzati si sono trovati in corrispondenza di $\beta = 15^\circ$, dove la discordanza tra la normale al fronte della mesh e la superficie di separazione tra gli elementi è massima, utilizzando la trasformazione lineare.

Il raggio di curvatura del fronte di cricca decresce muovendosi verso il punto C, in corrispondenza di $\beta = 90^\circ$: gli errori percentuali decrescono di conseguenza, ma rimangono sempre più alti rispetto la trasformazione ellittica. Gli errori percentuali diminuiscono inoltre per valori di b/a prossimi all'unità, cioè nel caso della cricca circolare. Il comportamento risulta essere simmetrico per rapporti $b/a = 1$. Il metodo dell'estensione virtuale della cricca utilizzato nelle analisi risulta dunque più preciso per una trasformazione ellittica che lineare.

La trasformazione C3D8-E ha invece mostrato risultati apprezzabili in elementi prossimi agli apici acuti di cricche ad elevate eccentricità. La funzione di forma degli elementi, infatti, descrive meglio l'andamento degli sforzi nell'apice acuto di tale cricca. Lungo il resto del fronte di cricca, dove la curvatura diventa maggiore, gli elementi a funzione di forma del secondo ordine raggiungono invece migliori risultati. Diminuendo l'eccentricità della cricca, lo stato di sforzo attorno al fronte della cricca è di nuovo meglio descritto da elementi a funzione di forma del secondo ordine: elementi lineari danno luogo a errori crescenti.

Anche questo secondo confronto, dunque, sottolinea la possibilità di ottenere risultati più corretti con l'uso della trasformazione ellittica delle coordinate, piuttosto che lineare, soprattutto per alte eccentricità. L'altro vantaggio della trasformazione ellittica rispetto la lineare è che aumenta l'accuratezza dei risultati senza incrementare i tempi di calcolo, come sarebbe richiesto nel caso di mesh più fitte.

In Fig. 9 sono proposte graficamente le differenze percentuali di K_I , K_{II} e K_{III} della trasformazione C3D20-E. Da essa è evidente la simmetria del problema rispetto il valore $b/a = 1$: l'andamento di K_I è simmetrico, mentre quelli di K_{II} e K_{III} sono speculari, come atteso dalla natura del problema.

Tab. 1 – Differenze percentuali nei valori di K (le medie delle differenze percentuali tra soluzione numerica e analitica sono calcolate senza considerare i valori tra parentesi)

$b/a=0.01$	Differenze % C3D20-E			Differenze % C3D20-L			Differenze % C3D8-E		
$\beta[^\circ]$	$K_I/\sigma\sqrt{\pi b}$	$K_{II}/\sigma\sqrt{\pi a}$	$K_{III}/\sigma\sqrt{\pi b}$	$K_I/\sigma\sqrt{\pi b}$	$K_{II}/\sigma\sqrt{\pi a}$	$K_{III}/\sigma\sqrt{\pi b}$	$K_I/\sigma\sqrt{\pi b}$	$K_{II}/\sigma\sqrt{\pi a}$	$K_{III}/\sigma\sqrt{\pi b}$
0	(85.32)	(117.61)	0.00	(18619)	(17768)	0.00	3.57	51.39	0.00
15	3.85	0.22	3.62	315.46	4.93	366.41	1.51	1.49	0.10
30	0.78	0.09	0.66	21.75	45.93	6.88	0.99	1.07	0.64
45	0.34	0.08	0.13	18.73	47.76	36.60	1.76	1.65	0.98
60	0.35	0.06	0.01	31.52	59.64	48.54	2.44	2.22	1.26
75	0.37	0.00	0.01	39.41	71.56	55.12	2.91	2.62	1.45
90	0.40	0.00	0.03	42.39	0.00	56.92	3.06	0.00	1.52
Media	1.01	0.07	0.63	78.21	38.30	81.50	2.32	8.63	0.85
$b/a=0.1$	Differenze % C3D20-E			Differenze % C3D20-L			Differenze % C3D8-E		
$\beta[^\circ]$	$K_I/\sigma\sqrt{\pi b}$	$K_{II}/\sigma\sqrt{\pi a}$	$K_{III}/\sigma\sqrt{\pi b}$	$K_I/\sigma\sqrt{\pi b}$	$K_{II}/\sigma\sqrt{\pi a}$	$K_{III}/\sigma\sqrt{\pi b}$	$K_I/\sigma\sqrt{\pi b}$	$K_{II}/\sigma\sqrt{\pi a}$	$K_{III}/\sigma\sqrt{\pi b}$
0	4.24	21.38	0.00	3.71	3.31	0.00	3.09	15.90	0.00
15	2.83	0.16	3.76	164.54	38.65	219.81	0.10	1.96	1.54
30	0.77	0.17	0.69	15.21	14.28	18.48	1.36	1.35	0.99
45	0.38	0.03	0.20	0.68	3.63	1.78	2.08	1.81	1.18
60	0.26	0.01	0.01	1.14	1.91	0.06	2.64	2.32	1.39
75	0.22	0.03	0.04	0.97	1.65	0.10	3.00	2.68	1.57
90	0.20	0.00	0.03	0.70	0.00	0.11	3.15	0.00	1.61
Media	1.27	3.11	0.67	30.54	10.02	40.06	2.06	1.69	1.38
$b/a=1$	Differenze % C3D20-E			Differenze % C3D20-L			Differenze % C3D8-E		
$\beta[^\circ]$	$K_I/\sigma\sqrt{\pi b}$	$K_{II}/\sigma\sqrt{\pi a}$	$K_{III}/\sigma\sqrt{\pi b}$	$K_I/\sigma\sqrt{\pi b}$	$K_{II}/\sigma\sqrt{\pi a}$	$K_{III}/\sigma\sqrt{\pi b}$	$K_I/\sigma\sqrt{\pi b}$	$K_{II}/\sigma\sqrt{\pi a}$	$K_{III}/\sigma\sqrt{\pi b}$
0	0.60	0.05	0.00	0.60	0.05	0.00	3.31	1.12	0.00
15	0.60	0.05	0.51	0.60	0.05	0.51	3.31	1.11	1.67
30	0.59	0.05	0.52	0.59	0.05	0.52	3.31	1.11	1.68
45	0.59	0.05	0.52	0.59	0.05	0.52	3.30	1.10	1.68
60	0.58	0.05	0.52	0.58	0.05	0.52	3.30	1.09	1.68
75	0.58	0.06	0.52	0.58	0.06	0.52	3.30	1.08	1.68
90	0.58	0.00	0.52	0.58	0.00	0.52	3.30	0.00	1.69
Media	0.59	0.04	0.45	0.59	0.04	0.45	3.31	0.94	1.44

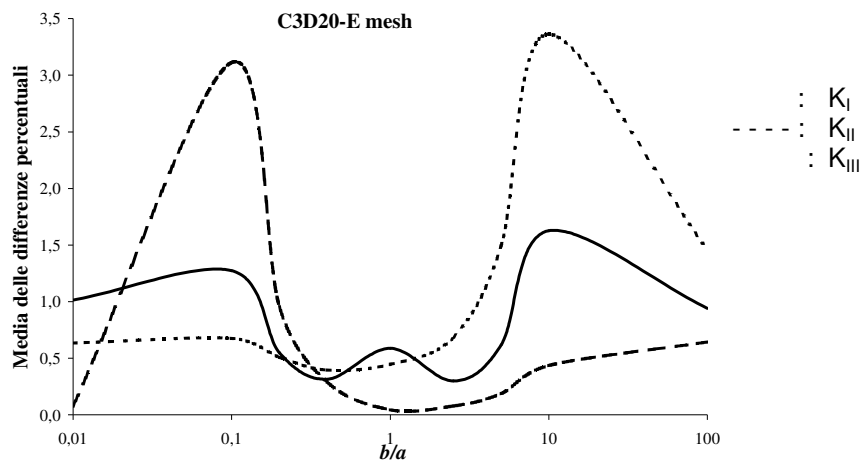


Fig. 9 – Media delle differenze percentuali tra soluzione analitica e numerica di K_I , K_{II} , and K_{III} (per $b/a = 0.01$ e 0.1 , i valori in A non sono considerati)

CONCLUSIONI

In questo lavoro è stato proposto un approccio d'analisi numerica per cricche tridimensionali interne sottoposte a modo misto di carico, con un relativo confronto tra mesh ottenute da diverse trasformazioni a pari numero di elementi totali nel modello. La valutazione dell'accuratezza dei risultati è stata effettuata sui fattori di intensificazione degli sforzi calcolati numericamente e analiticamente.

La condizione migliore dal punto di vista computazionale si è rivelata essere la mesh con trasformazione ellittica delle coordinate e con elementi quadratici. Buoni risultati sono stati ottenuti dalla stessa mesh con elementi lineari ed eccentricità molto elevate, quindi nel caso di spigoli acuti.

A differenza di quanto ad oggi disponibile in letteratura, la trasformazione ellittica proposta consente quindi di ottenere risultati molto accurati anche in presenza di cricche tridimensionali con elevata eccentricità, caricate in modo misto, utilizzando elementi inclusi nelle librerie dei codici di calcolo commerciali.

Il confronto finale tra soluzione analitica e risultati numerici con trasformazione ellittica delle coordinate ha confermato una coincidenza pressoché totale, mostrando differenze percentuali modeste.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Barsoum R.S., On the Use of Isoparametric Finite Elements in Linear Fracture Mechanics, *International Journal for Numerical methods in Engineering*. 1976, 10: 25-37.
- [2] Henshell R.D., Shaw K.G., Crack Tip Elements are Unnecessary, *International Journal for Numerical methods in Engineering*. 1975, 9: 495-507.
- [3] Linn P.P., Ingraffea A.R., Transition elements to be used with quarter point crack tip elements, *International Journal for Numerical methods in Engineering*. 1977, 11: 1031-1037.
- [4] Manu C., Quarter-Point Elements for Curved Cracks Fronts, *Computer and Structures* 17 (1983) 227-231.
- [5] Baisong W., Dinggen ., Weiuan ., inbiao H., ingyun L., Computation of SIF (Stress Intensity Factor) of Corner Crack in Interior Wall of Nozzle of Nuclear Vessel, *International Journal of Pressure Vessel Piping*. 1992, 51:349-359.
- [6] Fawkes A.J., Owen D.R.J., Luxmoor W.A.R., An Assessment of crack tip singularity models for use with isoparametric elements, *Engineering Fracture Mechanics*. 1979, 11: 143-159.
- [7] Guagliano M., Vergani L., Experimental and Numerical Analysis of Subsurface Cracks in Railway Wheels, *Engineering Fracture Mechanics*. 2005, 72: 255-269.
- [8] Guagliano M., Pau M., Analysis of internal cracks in railway wheels under experimentally determined pressure distributions, *Tribology International*. 2007, 40: 1147-1160.
- [9] Kassir M.K., Sih G.C., Three-dimensional stress distribution around an elliptical crack under arbitrary loadings, *ASME Journal of Applied Mechanics*. 1966, 33: 601-611.
- [10] Sample J.G., Kneebone G.T., *Algebraic projective geometry*, Oxford University Press, 1952.
- [11] Banks-Sills L., Sherman D., On the computation of stress intensity factors for three-dimensional geometries by means of the stiffness derivative and J-integral methods, *International Journal of Fracture*. 1992, 53: 1-20.
- [12] hu .K., Liu G.T., Chao .J., Three-dimensional stress and displacement fields near an elliptical crack front, *International Journal of Fracture*. 2001, 109: 383-401.