

UNA TEORIA STATISTICA PER VALUTARE L’AFFIDABILITÀ DI MATERIALI CERAMICI BASATA SU MISURE DI VELOCITÀ ULTRASONICA: **CUMULATIVE FLAW LENGTH THEORY**

D. N. Boccaccini^a, M. Maioli^b, M. Cannio^a, P. Veronesi^a, M. Romagnoli^a, C. Leonelli^a

^aDipartimento Ingegneria dei Materiali e dell’Ambiente, Università di Modena e Reggio Emilia, Modena, Italia

^bDipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Università di Modena e Reggio Emilia, Modena, Italia

Sommario

Uno dei principali obiettivi della teoria statistica della frattura è prevedere la probabilità di rottura per uno stress arbitrario, quando è nota la statistica di rottura. È stata sviluppata una nuova teoria “Cumulative Flaw Length Theory (CFLT)” per il caso di materiali omogenei isotropici a livello macroscopico contenenti microcricche con orientazioni random distribuite uniformemente sotto stress poliassiali. La funzione rappresentante il numero di cricche per unità di volume è basata su istogrammi relativi a misure di velocità ultrasoniche. Questa funzione è usata senza ulteriori assunzioni per determinare la probabilità di rottura in condizioni arbitrarie di stress. Questa teoria può essere facilmente incorporata in un modello a elementi finiti per prevedere la probabilità di rottura di una struttura sottoposta a stress. Inoltre il confronto della teoria con programmi esistenti usati per prevedere la probabilità di rottura di materiali ceramici e che sono basati su parametri determinati mediante prove distruttive, ad es. three point bending strength, sottolinea il vantaggio di previsioni basate su tecniche non distruttive. Questo fatto ne permette l’impiego non solo in fase di design, ma anche per il monitoraggio dell’aumento di probabilità di rottura durante la vita in servizio.

Una certa varietà di fratture introdotte durante le fasi iniziali dei metodi tradizionali di processo può portare a una affidabilità non accettabile dei materiali ceramici impiegati ad alta temperatura. Le impurezze presenti nelle materie prime (polveri, leganti..) e agglomerati formati durante il processo di formatura delle polveri sono esempi di difetti che influenzano la resistenza. Tali fratture non solo limitano la resistenza dei materiali ma incrementano lo scattering dei dati portando a affidabilità bassa (basso modulo di Weibull). La Cumulative Flaw Length Theory permette di valutare la funzione densità delle cricche e la probabilità di rottura a partire da dati di misura di velocità a ultrasuoni in materiali ceramici. Un nuovo metodo statistico è proposto che, basato su risultati ottenuti dalla CFLT per i campioni come ricevuti permette di valutare il vita in servizio quando il materiale è sottoposto a stress. Due diversi ceramici refrattari a base di cordierite mullite sono stati caratterizzati nell’assunzione che la teoria fosse validata in campo sperimentale. I modelli empirici di vita in servizio sono stati ottenuti considerando il numero di cicli termici sostenuti/sopportati da un numero di campioni. La buona correlazione ottenuta tra le curve teoriche e le curve ottenute con dati sperimentali mette in risalto la validità del metodo proposto.

Keywords: probabilità di rottura, meccanica di frattura, tecniche non-distruttive, velocità ultrasonica, teoria di Batdorf

Descrizione dell'approccio teorico "Cumulative Flaw Length Theory (CFLT)"

Sia $(\Delta P_f)_i$ la probabilità di frattura in alcuni punti del cammino, i^{esimo} path.

$$(\Delta P_s)_i = 1 - (\Delta P_f)_i$$

sia la corrispondente probabilità di sopravvivenza.

$$P_s = \prod_i (\Delta P_s)_i = \prod_i (1 - (\Delta P_f)_i) \cong \prod_i e^{-(\Delta P_f)_i}$$

$$P_s = e^{-\sum_i (\Delta P_f)_i}$$

dove $\sum_i (\Delta P_f)_i$ può essere considerata come un rischio di rottura.

Le cause potenziali di rottura sono le lunghezze cumulative di difetti lungo il cammino. Ad ogni cammino è associata una lunghezza cumulativa di difetti. La valutazione di tale lunghezza, per ogni cammino lineare, può essere determinata sperimentalmente mediante misure di velocità di propagazione ultrasonica.

Si definisce $N_V(\lambda)$ come la frequenza relativa dei cammini con lunghezza cumulativa di difetti minore o uguale a λ , per unità di volume. In altre parole, $N_V(\lambda)$ determina la distribuzione di probabilità. Quindi la probabilità che una sequenza di difetti abbia una lunghezza cumulativa in $[\lambda, \lambda+d\lambda]$ è

$$\Delta V \cdot N'_V(\lambda) d\lambda = \Delta V \cdot \frac{dN_V(\lambda)}{d\lambda} d\lambda$$

Se Σ denota lo stato di stress/sforzo applicato, si può considerare l'angolo solido $\Omega(\Sigma, \lambda)$ di direzioni lungo il quale lo sforzo causa la frattura su una sequenza di difetti di lunghezza uguale o superiore a λ , in accordo ai criteri propri della meccanica di frattura¹.

Quindi la possibilità che un cammino, nel volume ΔV abbia una lunghezza di rottura cumulativa nel

range $[\lambda, \lambda+d\lambda]$ con uno sforzo orientato in $\Omega(\Sigma, \lambda)$ è $\Delta V \cdot N'_V(\lambda) d\lambda \cdot \frac{\Omega(\Sigma, \lambda)}{4\pi}$.

La probabilità che alla fine si verifichi una rottura lungo il cammino con lunghezza cumulativa pari o superiore a λ_1 sarà

$$\int dV \int_{\lambda_1}^{+\infty} \frac{dN_V(\lambda)}{d\lambda} \cdot d\lambda \cdot \frac{\Omega(\Sigma, \lambda)}{4\pi}$$

Quindi la probabilità di sopravvivenza (1) di un materiale con cricche di lunghezza $\geq \lambda_1$ è data da:

$$P_s = \exp \left[- \int dV \int_{\lambda_1}^{+\infty} \frac{dN_V(\lambda)}{d\lambda} \cdot d\lambda \cdot \frac{\Omega(\Sigma, \lambda)}{4\pi} \right]$$

o equivalentemente, la probabilità di rottura nei cammini con lunghezza cumulative delle cricche superiore a $\geq \lambda_1$ è

$$P_f = 1 - \exp \left[- \int dV \int_{\lambda_1}^{+\infty} \frac{dN_V(\lambda)}{d\lambda} \cdot d\lambda \cdot \frac{\Omega(\Sigma, \lambda)}{4\pi} \right] \quad \text{Equazione (1)}$$

Dagli esperimenti di velocità ultrasonica, se sono disponibili le velocità u lungo un cammino lineare di lunghezza L , allora la corrispondente lunghezza cumulative di cricca è data da

$$u \rightarrow \Delta L = \Delta L(u) = L \left(\frac{v_0}{u} - 1 \right)$$

dove v_0 è il massimo valore di velocità ultrasonica del campione misurato. Infatti, se $v_0 = \frac{L}{t_0}$ (i.e. t_0 è

il più piccolo tempo transiente), $u = \frac{L}{t(u)}$ la velocità generica, $t(u) = \frac{L}{u}$ si otterrà

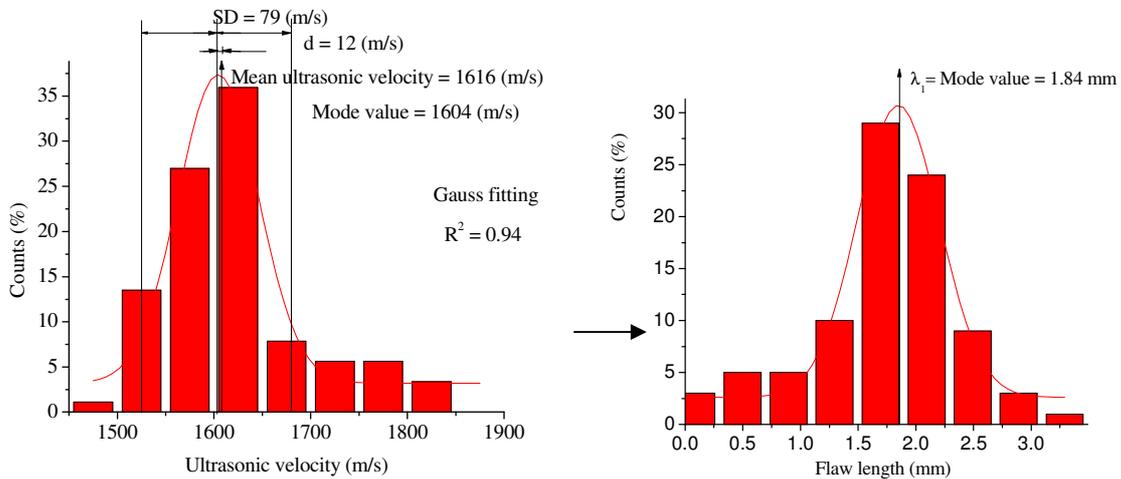
$$v_0 = \frac{L + \Delta L}{t(u)} = \frac{L + \Delta L}{\frac{L}{u}}$$

da cui

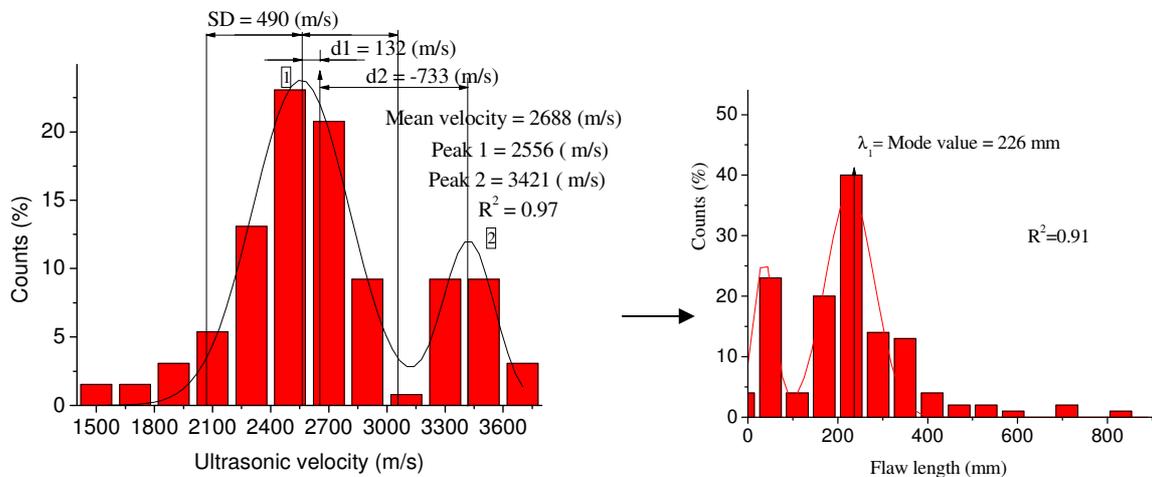
$$\Delta L = v_0 t(u) - L = v_0 \frac{L}{u} - L = L \left(\frac{v_0}{u} - 1 \right) \quad \text{Equazione(2)}$$

Case study: studio dell'affidabilità di due ceramiche refrattarie a base di cordierite-mullite

L'istogramma delle velocità permette di ottenere il corrispondente istogramma di lunghezza cumulativa delle cricche (Figura 1). Si consideri il seguente esempio di due differenti materiali refrattari a base di cordierite-mullite denominati AR002 e CONC, che presentano diversa resistenza agli sbalzi termici. Questi materiali sono piastrelle refrattarie usate come substrati in cicli termici veloci (fast firing cycles). Le misure di velocità ultrasonica possono essere eseguite lungo lo spessore o la lunghezza delle piastre.

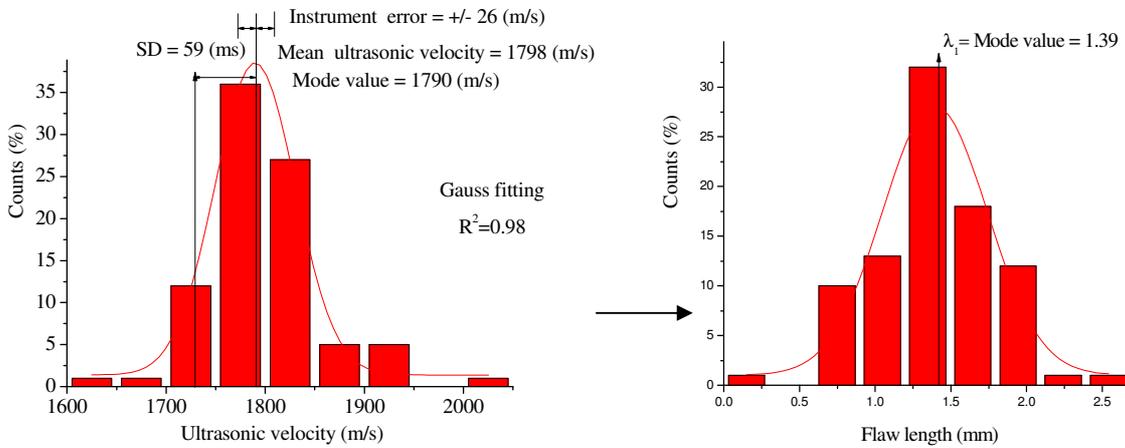


Spessore

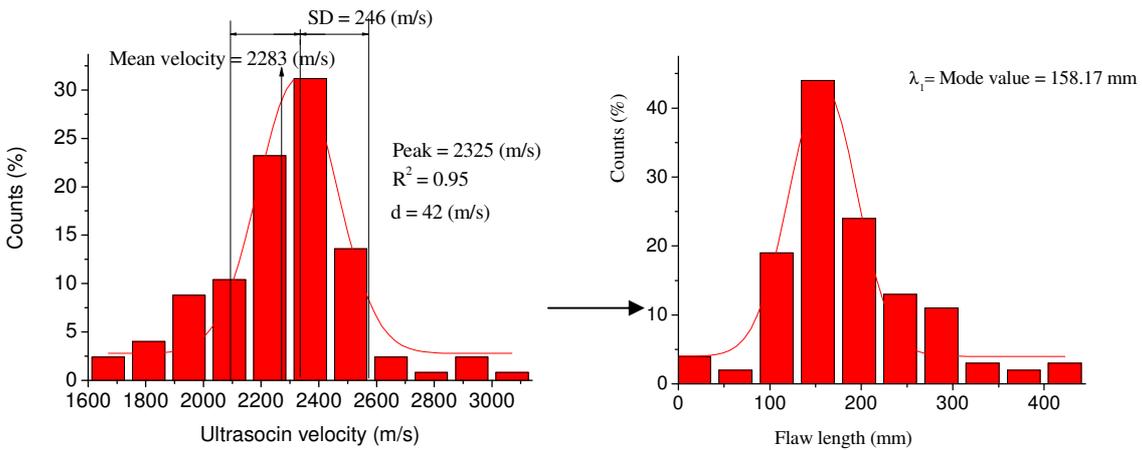


Lunghezza

a) AR002



Spessore



Lunghezza

b) CONC

Fig 1: Istogrammi di velocità ultrasonica relative allo spessore e alla lunghezza delle piastre refrattarie e corrispondenti istogrammi di valori calcolati di cricca per i materiali a) AR002 e b) CONC

Scegliendo λ_1 uguale al valore di moda di ΔL l'integrale da λ_1 all'infinito dell'equazione 2 rappresenta una stima della probabilità di avere un materiale danneggiato in modo significativo. In realtà $\int_{\lambda_1}^{\Delta L_{max}}$ o

l'equivalente $\int_{u_{min}}^{u_{mod e}} f(u) du$ negli istogrammi sperimentali risulta in accordo con l'equazione teorica (1) della probabilità di rottura. Infatti, dal calcolo della frequenza relative delle lunghezze delle cricche più

alte delle lunghezze di moda si ottengono i seguenti valori: 52.8 % per AR002 e 36.3% per CONC da dati di velocità ultrasonica lungo lo spessore. Questo fatto conferma quanto noto da dati industriali secondo i quali il materiale CONC risulta più affidabile di AR002.

Il calcolo con Equazione (2) richiede la conoscenza dello stato di sforzo e di Ω . Tuttavia, un'indicazione della probabilità di frattura può essere ottenuta dall'equazione (1) relativa a $\lambda \geq \lambda_1$ se $\Omega(\Sigma, \lambda)$ è considerato costante.

La probabilità di rottura per misure di campioni di piastre refrattarie in condizioni as-received, dà il seguente risultato:

$$P_f = 1 - \exp(-0.528) = 0.41, \text{ e } P_f = 1 - \exp(-0.363) = 0.30 \text{ per AR002 e CONC}$$

rispettivamente, nel caso dello spessore. Misure di velocità nella direzione della lunghezza danno i seguenti valori $P_f=0.44$ per AR002 e 0.36 per CONC, rispettivamente. E' evidente che usando sia gli istogrammi da misure sia longitudinali sia per spessore, i valori di probabilità di rottura calcolati in condizioni as-received sono molto simili e AR002 presenta qualità inferiore.

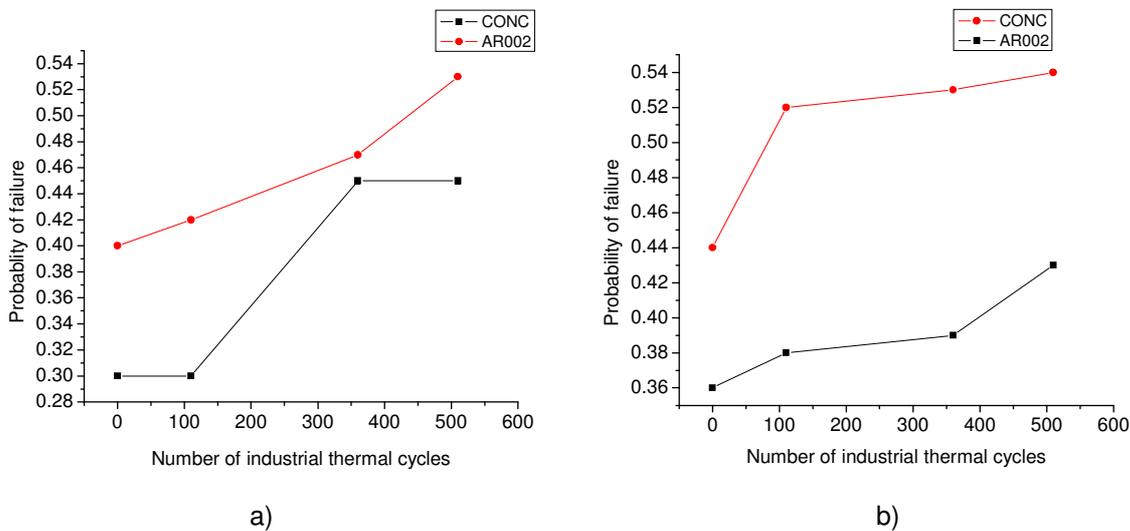


Fig 2: Probabilità di rottura vs numero di cicli di shock termici da misure di velocità ultrasonica lungo lo
a) spessore b) lunghezza

CFLT è stata usata per calcolare la probabilità di rottura da dati di velocità ultrasonica ottenuti da tests eseguiti su 100 pastre di due diversi materiali refrattari aumentando il numero di cicli di shock termici (risultati sono riportati in Figura 2).

La Figura 2 sottolinea che si ha un aumento della probabilità di rottura con l'aumentare del numero di cicli termici: AR002 presenta il più alto valore di probabilità di rottura durante l'intero ciclo di vita delle piastre refrattarie. La Figura 3 riporta la distribuzione di Weibull e il 90% delle bande di confidenza determinate dai dati di velocità ultrasonica per campioni in condizioni as-received e dopo 110 cicli termici del materiale AR002. I cicli termici dovrebbero aumentare la probabilità di rottura e quindi diminuire il modulo di Weibull. Tuttavia, il trend crescente dei moduli di Weibull con l'aumentare dei cicli termici, riportato in Figura 3 suggerisce che la weakest link theory non può essere applicata per caratterizzare materiali a partire da dati di misure di velocità ultrasonica. Lo stesso risultato è stato ottenuto per il materiale CONC da dati di velocità ultrasonica determinati per lo spessore e la lunghezza delle piastre. Questa è la ragione che ha portato a considerare lo sviluppo di una nuova teoria, denominata *Cumulative flaw length theory*. L'incremento del trend dei moduli di Weibull potrebbe essere spiegato dalla diminuzione della deviazione standard in seguito all'aumento del numero di cicli termici. Sembra che le cricche, anche se più lunghe rispetto a quelle dei campioni as-received (ciò spiega l'incremento nel trend trend della probabilità di rottura riportato in Figura 2), presentano una distribuzione meno ampia (portando a valori di deviazione standard più bassi e quindi a valori di moduli di Weibull più alti). I più alti valori di moduli di Weibull del materiale AR002 (Figura 4) sono evidenti se si analizzano gli istogrammi relativi a misure di velocità ultrasonica lungo lo spessore e lunghezza delle piastre in condizioni as-received e dopo 110 cicli termici.

Quando il modulo di Weibull è calcolato da dati di tenacità di frattura ottenuti per mezzo della chevron notched specimen technique, che è una tecnica distruttiva, il modulo di Weibull mostra un ragionevole andamento decrescente con l'aumentare dei cicli termici, come riportato in Figura 5 a).

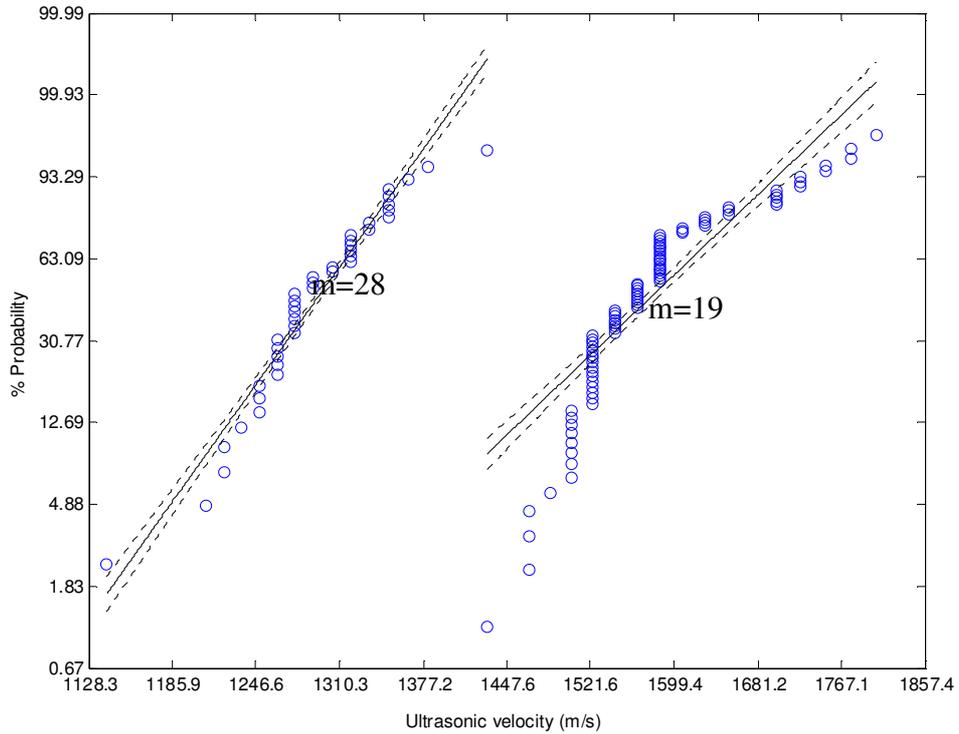


Fig 3: distribuzione di Weibull e bande di confidenza al 90% determinate da misure di velocità ultrasonica per I campioni as-received e dopo 110 shock termici per il materiale AR002. (anomalo incremento di trend del modulo di Weibull).

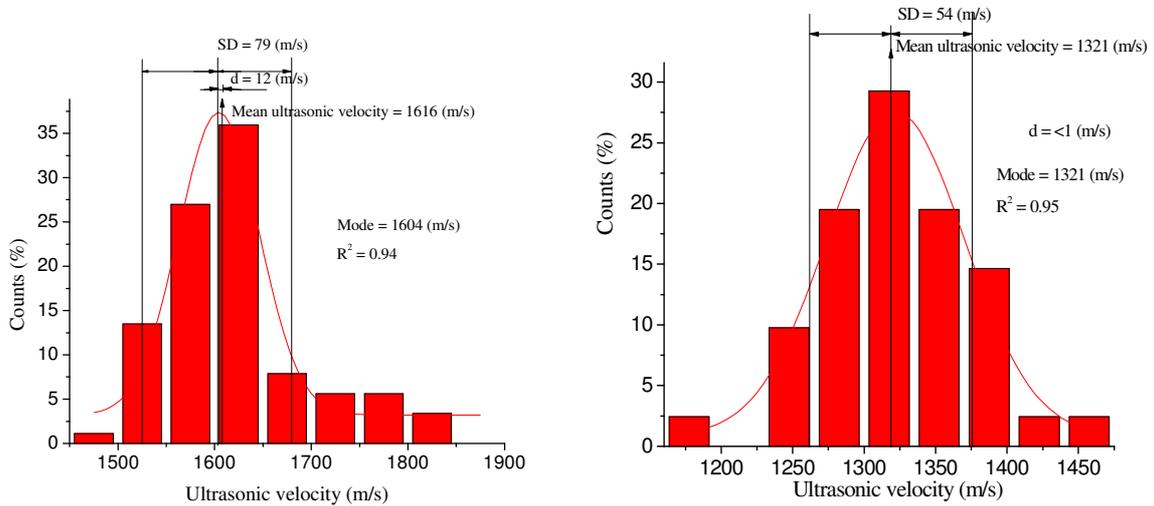
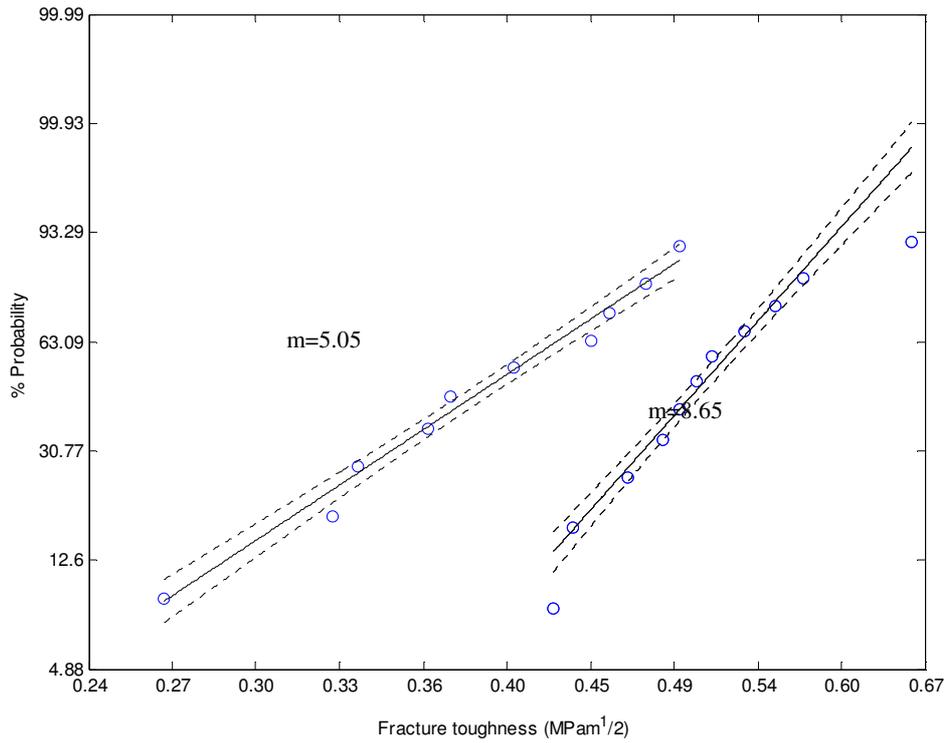


Fig 4: Istogrammi di velocità ultrasonica per campioni in condizioni as-received e dopo 110 cicli termici per piastre di Ar002 mostranti la diminuzione della deviazione standard.



a)

Fig 5: a) distribuzione di Weibull e bande di confidenza al 90% determinate da misure di tenacità di frattura(chervron notched specimen technique) per campioni as-received e dopo 110 shock termici per il materiale.

BIBLIOGRAFIA

[1] W. D. Kingery, H. K. Bowen, D. R. Uhlmann, Introduction to Ceramics, 2nd Edition, J. Wiley Sons, New ork (1976), p. 540.