

UN PROBLEMA DI MODO II CON CONTATTO IN UNA STRISCIA TRASVERSALMENTE ISOTROPA

Francesco Caimmi^a, Andrea Pavan^a

^a *Dipartimento di Chimica, Materiali e Ingegneria Chimica "Giulio Natta", Politecnico di Milano, P.za Leonardo da Vinci 32, I-20133 Milano. e-mail: francesco.caimmi@polimit.it*

SOMMARIO

Viene formulato e risolto un problema piano di meccanica della frattura con applicazioni sia nel campo della progettazione che in quello delle prove di caratterizzazione di materiali compositi. Il problema riguarda la determinazione del tasso di rilascio dell'energia in una striscia di materiale composito (approssimato come un continuo trasversalmente isotropo) con una delaminazione centrale caricata in modo II. L'analisi tiene conto degli sforzi d'attrito generati dal contatto tra le facce della delaminazione. La soluzione così ottenuta viene messa a confronto con quella ottenibile mediante la teoria delle travi e viene quantificato il contributo dell'attrito al tasso di rilascio dell'energia.

ABSTRACT

A plane fracture mechanics problem with applications in the field of composite materials design and testing is formulated and solved in this paper. The problem concerns the calculation of the energy release rate of composite strip (assumed to behave as transversely isotropic continuum) with a central delamination loaded in mode II. The analysis of the problem accounts for frictional stresses due to the contact between the crack faces. The solution obtained is compared with the one from beam theory and the significance of the frictional contribution to the strain energy release rate is discussed.

1. INTRODUZIONE

Nei materiali omogenei la propagazione dei difetti avviene prevalentemente in modo I [1]. Al contrario nei materiali compositi esistono vincoli più stringenti, legati alla struttura del materiale, che possono far sì che i difetti propaghino anche secondo altri modi. In particolare, il modo II ha ricevuto molta attenzione nel corso degli anni passati, poiché è il modo atteso di propagazione dei difetti nella flessione di strutture sottili dovuta a carichi fuori piano (tra i molti, si veda per es. [2]).

La necessità di munirsi di dati per la previsione della resistenza in modo II ha stimolato inoltre la messa a punto di prove in grado di fornire la tenacità dei compositi in queste condizioni. Sono state proposte varie tipologie di prova, la maggior parte delle quali prevede l'impiego di provini tipo trave sollecitati in flessione e contenenti una delaminazione posta sul piano medio. Prove che impiegano questo tipo di provino sono la end notched flexure (ENF), la end-loaded split (ELS) and la centre notch flexural (CNF) (si veda ad esempio [3] per una rassegna completa), che si differenziano per la posizione della delaminazione rispetto ai carichi.

Quando oggetti di questo tipo vengono flessi le facce del difetto pre-esistente entrano a contatto, cos che si generano tra di esse sforzi dovuti all'attrito. Poiché l'intensità delle forze d'attrito dipende dai carichi esterni e dalla geometria del provino, il loro contributo al tasso di rilascio dell'energia (ERR) deve essere noto se dai test si vuole ricavare una proprietà del materiale utile in sede progettuale.

In questo lavoro verrà risolto il problema elastico per una striscia trasversalmente isotropa caricata in tre e punti e contenente una delaminazione centrale (Fig. 1). La soluzione così ottenuta verrà poi confrontata con quella ottenibile dalla teoria delle travi per stimare l'applicabilità di quest'ultima e verrà quantificato il contributo dell'attrito all'ERR per verificare se esso è trascurabile o meno.

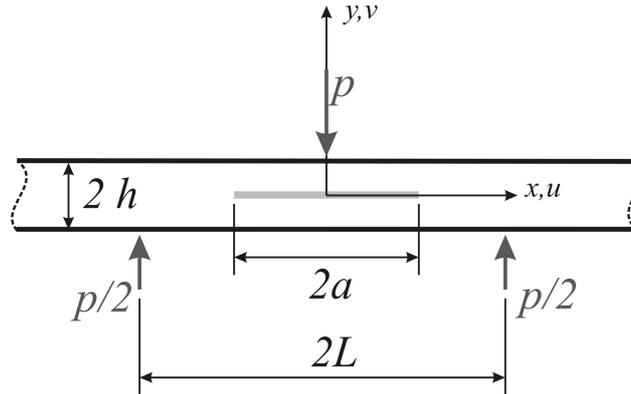


Fig 1. Geometria idealizzata della prova CNF e sistema di riferimento

La striscia contiene una delaminazione centrale (in grigio chiaro in Fig.1) e rappresenta un modello idealizzato della prova CNF, per la prima volta proposta in [4].

Oltre all'utilità legata alla corretta interpretazione dei dati sperimentali, questo problema ha il pregio di prestarsi all'analisi della resistenza di strutture contenenti delaminazioni dovute ad impatti da corpi estranei a velocità moderata, che spesso si presentano in forme simili a quella di Fig. 1 [2,4].

2. FORMULAZIONE E SOLUZIONE DEL PROBLEMA

Modelleremo il provino CNF come fosse una striscia infinita di materiale trasversalmente isotropo (composito unidirezionale) alta $2h$ e contenente un taglio sul piano $y=0$ compreso tra $x=a$ e $x=-a$ (Fig. 1); il taglio modella una cricca piatta e acuta priva di asperità superficiali. Assumeremo di essere in condizioni di deformazione piana. Quando sarà necessario indicheremo le quantità riferentesi alla metà superiore della striscia $0 < y < h$ con un apice "+" e quelle della metà inferiore $-h < y < 0$ con un apice "-". La striscia è caricata al centro con una forza P ; se B è la larghezza fuori piano della striscia il carico per unità di lunghezza sarà p .

Per quel che concerne la discontinuità di spostamenti verticali tra le facce della cricca, assumeremo che sotto l'azione dei carichi la cricca sia completamente chiusa, cioè che $[v(x)] = v^+(x,0) - v^-(x,0) = 0 \forall x$. Si veda [5] per una più ampia discussione delle ipotesi sopra proposte.

Useremo la legge di Coulomb per descrivere l'attrito tra le facce della cricca, e diremo μ il coefficiente d'attrito. Assumeremo che l'attrito sia sufficientemente basso da non impedire alle facce della cricca di scorrere relativamente l'una rispetto all'altra.

Riguardo la storia di carico assumeremo di essere in condizioni di carico monotonicamente crescente. Sotto queste ipotesi il problema risulta essere trattabile in maniera relativamente semplice pur senza perdere eccessivamente di generalità.

La relazione tra le componenti di sforzo e di deformazione nel piano può essere scritta come

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x(x, y) \\ \varepsilon_y(x, y) \\ \gamma_{xy}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x(x, y) \\ \sigma_y(x, y) \\ \tau_{xy}(x, y) \end{bmatrix} \quad (1)$$

(si veda [6] per la relazione tra le componenti c_{ij} del tensore di cedevolezza e le usuali costanti ingegneristiche).

Le equazioni di equilibrio in termini di spostamenti verticali, v , e orizzontali, u , si possono scrivere come

$$\beta_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \beta_3 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0 \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta_2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \beta_3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2)$$

con

$$\beta_1 = -\frac{c_{22}c_{66}}{c_{12}^2 - c_{11}c_{22}} \quad \beta_2 = -\frac{c_{11}c_{66}}{c_{12}^2 - c_{11}c_{22}} \quad \beta_3 = 1 + \frac{c_{12}c_{66}}{c_{12}^2 - c_{11}c_{22}} \quad (3)$$

Vale la pena ricordare che in caso di materiali non isotropi la soluzione in termini di sforzo dipende dalle costanti elastiche del materiale, cosa che non accade nei materiali isotropi. Assumiamo che gli spostamenti possano essere espressi mediante i seguenti integrali di Fourier (α sia la variabile di trasformazione)

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty U(\alpha, y) \sin(\alpha x) d\alpha \quad v(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty V(\alpha, y) \cos(\alpha x) d\alpha \quad (4)$$

Nelle (4) si palesano anche le condizioni di simmetria supposte per il problema. Usando le (4) nelle (2) queste ultime si riducono ad un sistema di equazioni differenziali ordinarie per le trasformate degli spostamenti $U(\alpha, y)$ e $V(\alpha, y)$. Il sistema ammette quattro autovalori che chiameremo s_i . Per il nostro problema specifico cerchiamo due soluzioni separate per la metà superiore e la metà inferiore della striscia. Possiamo pertanto dedurre la seguente forma per le trasformate delle soluzioni:

$$U^\pm(\alpha, y) = \sum_{i=1}^4 C_i^\pm(\alpha) e^{s_i y \alpha}, \quad V^\pm(\alpha, y) = \sum_{i=1}^4 C_i^\pm(\alpha) d_i e^{s_i y \alpha} \quad (5)$$

Nelle (5) compaiono otto incognite C_i , funzioni della variabile di trasformazione e i quattro coefficienti d_i che sono riportati in [5].

Introduciamo una funzione ausiliaria $b(x)$ che sia la derivata della discontinuità degli spostamenti orizzontali u sul piano della cricca, tale da soddisfare le seguenti condizioni

$$b(x) = \frac{\partial}{\partial x} \{u^+(x, 0) - u^-(x, 0)\} = \frac{\partial}{\partial x} [u(x, 0)] \quad |x| < a, \quad b(x) = 0 \quad |x| \geq a \quad (6)$$

$$\int_{-a}^a b(x) dx = 0$$

La (6.3) rappresenta la condizione di chiusura del vettore di Burger se $b(x)$ è interpretata come una densità di dislocazioni.

Usando le relazioni di congruenza e il legame (1) relazioni analoghe alle (5) possono essere ottenute per le componenti dello sforzo.

Le incognite possono essere determinate in funzione di $b(x)$ utilizzando le condizioni al contorno per il problema:

$$\sigma_y^+(x, h) = -p\delta(x)$$

$$\sigma_y^-(x, -h) = -\frac{P}{2} \{ \delta(x-L) + \delta(x+L) \}$$

$$\tau_{xy}^+(x, h) = \tau_{xy}^-(x, -h) = 0 \quad (7)$$

$$\sigma_x^+(x, 0) = \sigma_x^-(x, 0)$$

$$\tau_{xy}^+(x, 0) = \tau_{xy}^-(x, 0)$$

$$v^+(x, 0) = v^-(x, 0)$$

in aggiunta alla (6.1). Le (7.1-4) rappresentano i carichi esterni, mentre le (7.5-7) le condizioni di continuità dei campi elastici tra le due parti della striscia; la condizioni di continuità della terza componente di sforzo segue automaticamente dalle (7.5) e (7.6) dato il legame costitutivo (1).

Inserendo le espressioni per le componenti di sforzo nella legge di Coulomb

$$\lim_{y \rightarrow 0} |\tau_{xy}(x, y)| = -\mu \lim_{y \rightarrow 0} \sigma_y(x, y), \quad \sigma_y(x, 0) \leq 0, \quad -a < x < a \quad (8)$$

dopo una serie di manipolazioni lunghe ma di routine (si veda per es. [7]) si ottiene la seguente equazione integrale singolare per la funzione incognita $b(x)$

$$\begin{aligned} & \frac{m_1}{\pi} \int_{-a}^a b(t) \left(\frac{1}{t+x} - \frac{1}{t-x} \right) dt + \frac{2}{\pi} \int_{-a}^a b(t) \int_0^\infty \left(\frac{I_4(\alpha)}{I_1(\alpha)} - m_1 \right) \cos(\alpha t) \sin(\alpha x) d\alpha dt + \\ & \frac{2P}{\pi} \int_0^\infty \frac{I_5(\alpha)}{I_1(\alpha)} \sin(\alpha x) d\alpha + \frac{2\mu P}{\pi} (H(-x) - H(x)) \int_0^\infty \frac{I_3(\alpha)}{I_1(\alpha)} \cos(\alpha x) d\alpha = 0 \quad |x| \leq a \end{aligned} \quad (9)$$

Le funzioni I_i sono riportate in [5]. Per ottenere la (9) abbiamo sfruttato la conoscenza a priori disponibile della direzione di scorrimento delle facce della cricca.

In [8] è stato dimostrato con una espansione asintotica che gli sforzi all'apice di una cricca chiusa in un materiale omogeneo ortotropo presentano una singolarità del tipo $r^{-1/2}$ (con r indicante la distanza dell'apice). Con questa conoscenza è possibile dedurre la forma di $b(x)$ e procedere ad una soluzione numerica della (9) con la tecnica descritta in [7,9].

Determinata la funzione $b(x)$ in un numero discreto di punti essa può essere opportunamente interpolata mediante le formule date in [10] ed il problema può considerarsi risolto.

Conoscendo i campi di sforzo nella striscia è possibile calcolare il fattore di intensificazione degli sforzi come

$$K_{II} = \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{2\pi(x-a)} \tau_{xy}(x, 0) \quad (10)$$

Seguendo [11], calcoliamo il tasso di rilascio dell'energia come

$$G_{II}^T = G_{II} - G_{II}^F \quad (11)$$

con

$$G_{II} = K_{II}^2 m_2 \quad (12)$$

che rappresenta l'usuale contributo del campo di sforzo (m_2 è una costante data per es. in [5]), e

$$G_{II}^F = - \int_{-a}^a \frac{\partial \tau_{xy}(x, 0)}{\partial (2x)} |[u](x)| dx \quad (13)$$

che rappresenta il contributo dell'attrito.

3. RISULTATI E DISCUSSIONE

Nel prosieguo sia definito il seguente sforzo di riferimento

$$\tau^* = 3P/8Bh \quad (14)$$

Per ottenere i risultati numerici che verranno presentati successivamente sono stati utilizzati tre materiali, le cui costanti elastiche sono elencate nella tabella 1

Tabella 1. Costanti elastiche dei materiali analizzati.

Composito fibra di vetro/epossidica		
$E_{xx}=47.7$	$E_{yy}=12.3$	$\nu_{yz}=0.40$
$G_{xy}=4.8$	$\nu_{xy}=0.071$	
Composito fibra di carbonio/epossidica		
$E_{xx}=161$	$E_{yy}=11.8$	$\nu_{yz}=0.43$
$G_{xy}=5.17$	$\nu_{xy}=0.023$	
Composito fibra di carbonio/PEI		
$E_{xx}=84.8$	$E_{yy}=8.5$	$\nu_{yz}=0.35$
$G_{xy}=x$	$\nu_{xy}=0.035$	

Sono stati considerati coefficienti d'attrito nell'intervallo $0 \leq \mu \leq 0.5$, in accordo con i dati disponibili per compositi a matrice polimerica [12]. Il parametro h è stato fatto variare nell'intervallo compreso tra 1.5 e 10 mm; i valori tipici per i test sui materiali compositi sono 1.5 mm per compositi a fibra di carbonio e 2.5 per compositi con fibre di vetro. La lunghezza L è stata tenuta fissa al valore di 50 mm. La figura 2 mostra alcuni risultati tipici per gli andamenti delle due componenti del tasso di rilascio dell'energia.

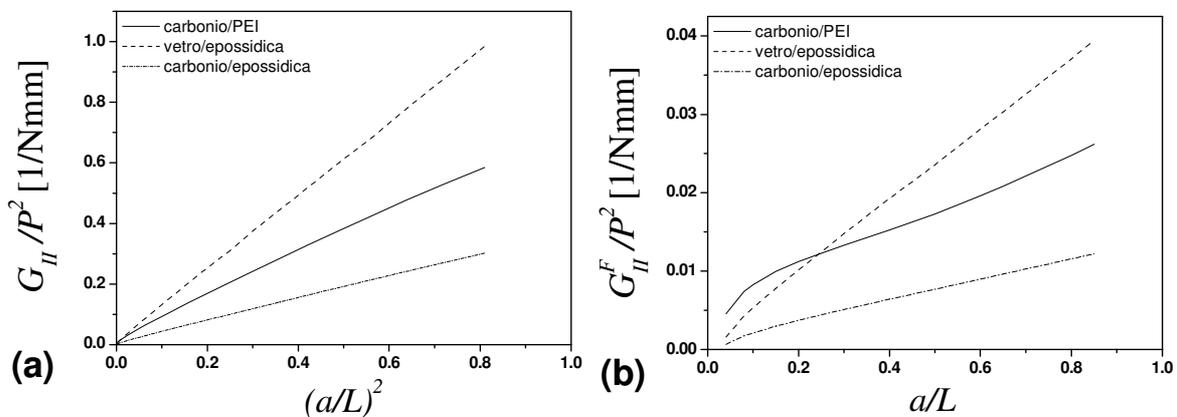


Fig. 2. Esempi di andamento di G_{II} (a) e G_{II}^F (b) con la lunghezza di cricca. Dati ottenuti per $h=2.5$ mm e $\mu=0.3$.

G_{II} dipende linearmente dal quadrato della lunghezza di cricca (come previsto dalla teoria delle travi; si veda comunque il punto 3.2) l'andamento di G_{II}^F è più complesso dipendendo da tutti i parametri del problema.

Poiché gli sforzi di taglio causati dall'attrito sono antisimmetrici rispetto all'asse y e hanno lo stesso segno degli sforzi di taglio nominali essi contribuiscono positivamente ad incrementare il fattore di intensificazione degli sforzi in modo che dipende dal valore del coefficiente d'attrito; nel campo di geometrie studiate però l'effetto è evidente solo per alti h e basse lunghezze di cricca. Cos l'esame della Fig. 3 mostra che per bassi h ed elevati a i fattori di intensificazione degli sforzi sono indipendenti dal coefficiente di attrito.

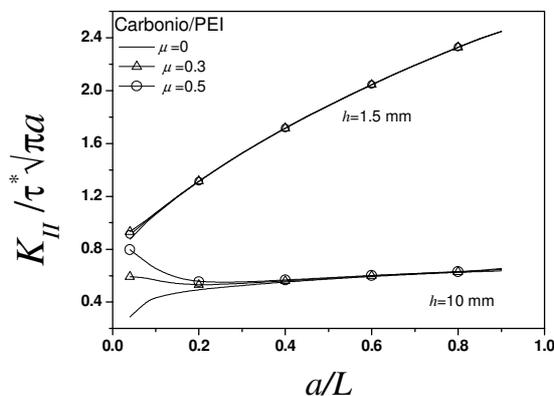


Fig. 3. Effetto del coefficiente di attrito sul fattore di intensificazione degli sforzi

3.1 Confronto con una soluzione ad elementi finiti

Per verificare che l'ipotesi di assimilare il laminato unidirezionale in esame ad una striscia infinita fosse ragionevole sono state condotte alcune simulazioni agli elementi finiti su di una struttura reale con $2L=100$ mm e lunghezza finita complessiva pari a 125 mm. Per ulteriori dettagli si veda [5].

La figura 4.a mostra il confronto in termini di sforzo normale in direzione y in prossimità di uno dei punti esterni di carico a $y=0$ per due casi. Le analisi agli elementi finiti sono state condotte solo per il composito carbonio/PEI che in virtù delle sue proprietà elastiche è il più sensibile all'eventuale presenza di effetti di bordo [13].

L'accordo è ottimo e mostra che gli effetti di bordo sono trascurabili nel campo di altezze che sono state esaminate in questo lavoro.

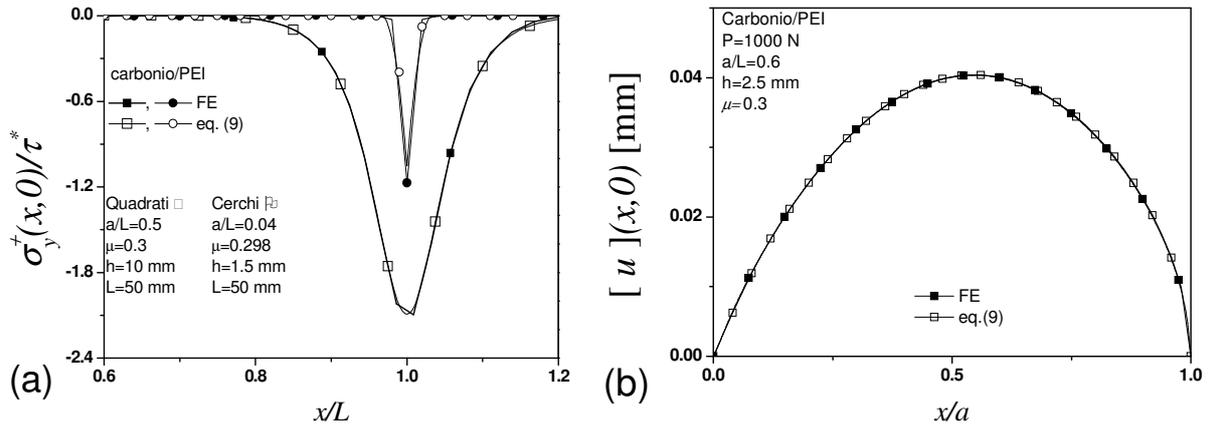


Figura. 4-(a) Confronto tra gli sforzi normali sul piano della cricca in prossimità del punto più esterno di carico ottenuti dalla soluzione dell'equazione (9) e da una analisi agli elementi finiti (FE). (b) confronto tra le discontinuità di spostamento calcolate con gli elementi finiti e risolvendo il problema (9)

A titolo di esempio la Fig. 4.b mostra anche il raffronto tra le discontinuità di spostamento orizzontale ottenute coi due sistemi di calcolo in un caso particolare.

3.2 Confronto con la teoria delle travi

La soluzione in forma chiusa derivata dalla teoria delle travi per il problema in esame è riportata in [4]; detto G_{II}^{BT} è il valore dell'ERR colà calcolato, è possibile ed interessante confrontare le due soluzioni. La teoria delle travi è infatti usualmente utilizzata per l'analisi dei dati provenienti dai test CNF.

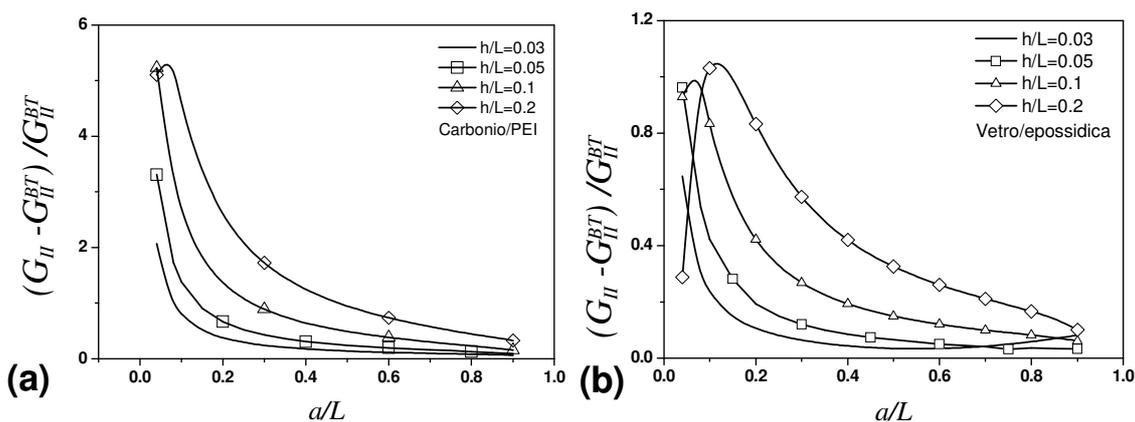


Fig. 5. Confronto tra la soluzione ottenuta dall'equazione (9) e quella fornita dalla teoria delle travi per due diversi materiali a vari valori del rapporto h/L

Poiché la cinematica della trave permette di soddisfare il vincolo in impenetrabilità delle facce della cricca senza sviluppo di sforzi normali, limiteremo questo confronto al caso senza attrito.

Il confronto è riportato in forma grafica in Fig 5 per due dei materiali esaminati.

Si può notare la forte dipendenza della risposta dal materiale; lo scostamento è particolarmente accentuato per il composito a matrice PEI, che ha un elevato valore del rapporto E_{xx}/G_{xy} per cui è facile

prevedere che le manchevolezze cinematiche della teoria delle travi si manifestino in modo più chiaro per questo materiale [14].

In generale per basse lunghezze di cricca la teoria delle travi sembra totalmente inadeguata; lo stesso per elevati valori del rapporto h/L .

Per quanto riguarda specificamente la riduzione dei dati derivanti da test sulla configurazione CNF, che vengono solitamente eseguiti con valori di h/L ordine di qualche percento e con lunghezze di cricca intorno ad $a/L = 0.5$ [4] lo scostamento può essere contenuto entro il 10%, trascurando però il contributo dell'attrito. E' inoltre utile notare che l'uso della teoria delle travi restituisce valori conservativi della tenacità apparente.

3.3 Studi parametrici

Per quantificare l'importanza dell'attrito rispetto allo tasso di rilascio dell'energia si esaminerà la variazione del rapporto G_{II}^F / G_{II}^T al variare dei parametri del problema.

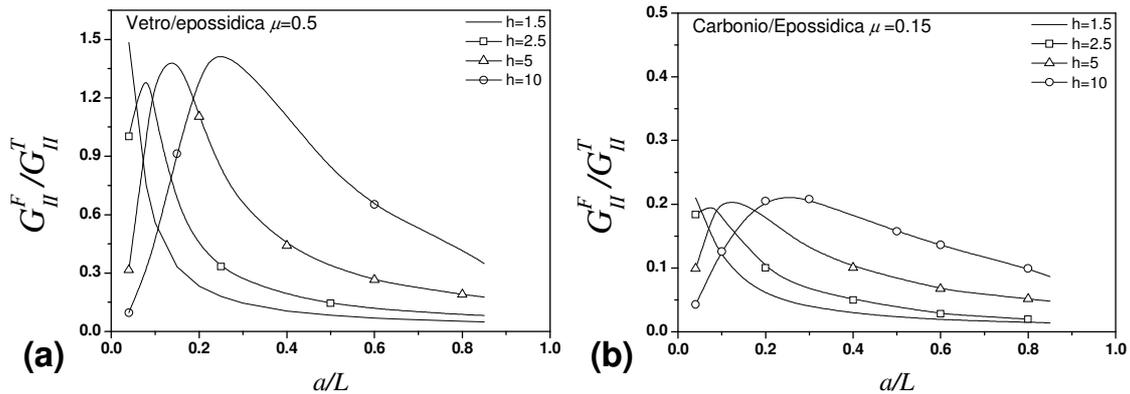


Fig 6. Effetto di h sul rapporto G_{II}^F / G_{II}^T per due materiali

La Fig. 6 esemplifica l'effetto dell'altezza della striscia h . L'andamento può interpretarsi agevolmente considerando che la distribuzione degli sforzi normali sotto un carico concentrato è stretta ed intensa immediatamente al di sotto del carico e va via allargandosi e diminuendo di intensità massima allontanandosi dalla sorgente. La forma di questa distribuzione si riflette sugli sforzi di taglio agenti tra le facce della cricca mediante la (8). Per bassi h la zona interessata dagli sforzi d'attrito è pertanto molto ristretta e può essere accolta interamente all'interno della delaminazione anche per cricche molto corte. Per h più grandi il picco di sforzo normale non riesce ad essere accolto completamente all'interno della cricca se questa è molto corta. In questi casi si osserva un massimo nel valore del rapporto G_{II}^F / G_{II}^T .

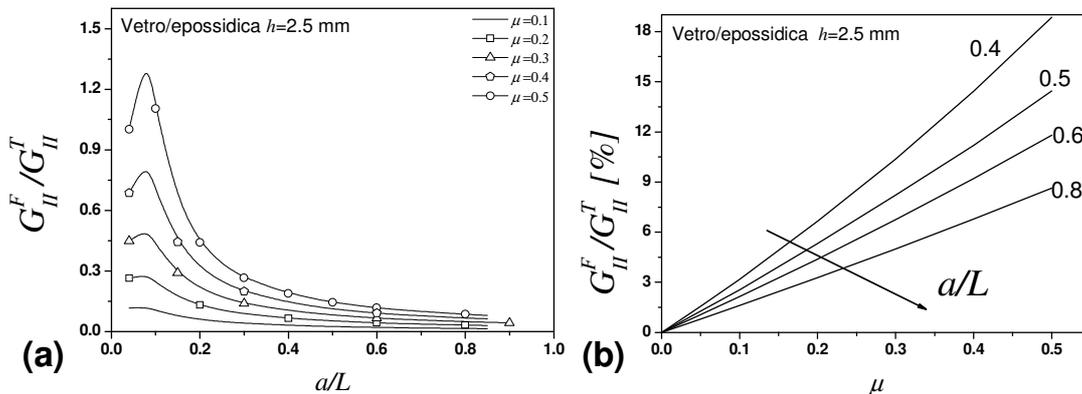


Fig. 7. Effetto del coefficiente di attrito sul rapporto G_{II}^F / G_{II}^T per il composito fibra di vetro/resina epossidica. (a) curve in funzione della lunghezza di cricca. (b) curve in funzione del coefficiente d'attrito per alcune lunghezze di cricca

L'effetto del coefficiente d'attrito è illustrato in figura 7.a. L'andamento in questo caso è interpretabile con le considerazioni espone all'inizio del paragrafo 3 sul fattore di intensificazione degli sforzi.

La figura 7.b mostra, mediante un *crossplot*, un ingrandimento del grafico 7.a nella regione delle lunghezze di cricca elevate (quelle usualmente impiegate in prove sperimentali per misurare la tenacità). In dipendenza dal materiale (cfr. Fig. 6.b) anche per spessori modesti il contributo dell'attrito può essere significativo.

Come si evince osservando anche solo gli esempi delle figure 6 e 7 è difficile dare delle indicazioni quantitative sull'effetto dell'attrito: la soluzione del problema dipende fortemente sia dalla geometria che dalle proprietà dei materiali coinvolti. Delaminazioni profonde e piccoli spessori del laminato minimizzano l'effetto dell'attrito, in accordo con quanto trovato con altri mezzi di indagine sulle geometrie ENF e 4ENF [12,14]. I casi in cui l'effetto dell'attrito è trascurabile, ovvero è di solo qualche per cento del valore dell'ERR totale, sono più l'eccezione che la regola.

4. CONCLUSIONI E SVILUPPI FUTURI

E' stato formulato il problema elastico per una striscia trasversalmente isotropa caricata in flessione in tre punti e contenente una delaminazione centrale con attrito coulombiano tra le facce delle delaminazione ed è stato risolto sotto alcune ipotesi semplificative.

Il confronto con la teoria delle travi ha mostrato come questa possa ritenersi ragionevolmente valida per quel che riguarda la riduzione di dati che provengono da esperimenti tipo CNF ma che sia assolutamente inadeguata per stimare la gravosità dello stato di sforzo in strutture che non siano molto sottili e con delaminazione estese.

Uno studio parametrico del problema ha mostrato come il contributo dell'attrito allo ERR possa essere assai importante, da cui la necessità di tenerne conto sia in fase di riduzione dei dati sia in fase di analisi strutturale.

Futuri sviluppi includono sia l'applicazione di questa analisi a dati generati in laboratorio sia misure locali di deformazione in prossimità dell'apice della delaminazione a scopo di validazione della soluzione ottenuta sia una estensione dell'analisi a casi più generali.

BIBLIOGRAFIA

- [1] K.B. Broberg. Cracks and Fracture. Academic Press, San Diego-London, 1999.
- [2] C. Fan, P.-B. Jar, J.J.R. Cheng. Energy-based analyses of delamination development in fibre-reinforced polymers under 3-point bending. *Comp Sci Tech* 2006; 66:2143-2155
- [3] Davies P, Blackman BRK, Brunner AJ. Standard test methods for delamination resistance of composite materials: current status. *Appl Compos Mater* 1998;5:345-64
- [4] H. Maikuma, J.W. Gillespie, Jr., J. M. Whitney. Analysis and experimental characterization of the center notch flexural test specimen for mode II interlaminar fracture. *J Comp Mat* 1989; 23: 756-785
- [5] F.Caimmi, A. Pavan. A mode II crack problem with contact in an orthotropic strip. 2007, In preparazione
- [6] S. G. Lekhnitskii. Theory of elasticity of anisotropic elastic body. Holden Day Inc., San Francisco, 1963
- [7] F. Erdogan, A.C. Kaya, P.F. Joseph. The crack problem in bonded nonhomogeneous materials. NASA-CR-184897, 1988
- [9] J.C. Sung, W.G. Chung. Frictional interface crack in anisotropic bimaterial under combined shear and compression. *Int J Sol Stru* 2003;40:6839-6857
- [9] F. Erdogan, G. D. Gupta, T. S. Cook. Numerical solution of singular integral equations. In: G.C. Sih (Ed.), *Mechanics of fracture*, Noordhoff, Leyden, 1973; pp. 368-425
- [10] S. Krenk. On the use of the interpolation polynomial for solution of singular integral equations. *Quart App Math* 1975;32:479-485
- [11] M. Bach, A. M. Khludnev, V. A. Kovtunenkov. Derivatives of the energy functional for 2-D problems with a crack under Signorini and friction conditions. *Math Meth App Sci* 2000;23:515-534
- [12] B.D. Davidson, . Sun. Effect, of friction geometry and fixture compliance on the perceived toughness from three- and four- point bend end notched flexure tests. *J Reinif Plas Comp* 2005; 24:1611-1628
- [13] C. O. Horgan. Saint-Venant end effects in composites. *J Comp Mat* 1982;16:411-422
- [14] L. A. Carlsson, J.W. Gillespie Jr. Mode II interlaminar fracture of composites. In : K. Friedrich (Ed.), *Application of fracture mechanics to composite material*. Elsevier, Amsterdam, 1989