

## **CRITERI DI RESISTENZA A FATICA DI COMPONENTI METALLICI IN PRESENZA DI STATI TENSIONALI COMPLESSI (MULTIASSIALITÀ E GRADIENTI TENSIONALI)**

Andrea Carpinteri, Andrea Spagnoli, Sabrina Vantadori

*Dipartimento di Ingegneria Civile, dell'Ambiente, del Territorio e Architettura  
Università di Parma, Viale G.P. Usberti 181/A, 43100 Parma, spagnoli@unipr.it*

### **SOMMARIO**

Nella presente nota, viene descritto un criterio, recentemente proposto dagli autori, per la determinazione del limite di fatica di componenti intagliati soggetti a carichi remoti multiassiali. Il criterio è stato inizialmente sviluppato dai primi due autori per componenti lisci, sulla base del cosiddetto approccio del piano critico. Secondo tale criterio la giacitura del piano critico dipende dalle direzioni principali medie di tensione. La determinazione del limite di fatica è eseguita considerando una funzione quadratica del massimo valore della componente normale e dell'ampiezza della componente tangenziale agenti sul piano critico. L'estensione del criterio proposto al caso di componenti intagliati si basa su un adattamento del cosiddetto metodo del punto critico. Le predizioni teoriche secondo il criterio proposto sono qui confrontate con i risultati di alcune prove sperimentali relative a provini con intagli circolari soggetti a carichi multiassiali proporzionali.

### **ABSTRACT**

In the present paper, a criterion recently proposed by the authors to determine the fatigue strength of notched components under remote multiaxial loadings is described. The criterion was initially developed by the first two authors for smooth components, on the basis of the so-called critical plane approach. According to such a criterion the critical plane orientation depends on the averaged directions of the principal stresses. The fatigue life is calculated through a quadratic combination of normal and shear stress components, acting on the critical plane. The extension of the proposed criterion to the case of notched components is based on the so-called critical point method. The theoretical predictions of the criterion are herein compared with some experimental results related to metallic specimens under in-phase multiaxial loadings.

### **1. INTRODUZIONE**

Numerosi criteri sono stati proposti in letteratura per la determinazione della resistenza a fatica per alto numero di cicli di componenti lisci soggetti a stati di sforzo multiassiale [1,2]. E' possibile raggruppare tali criteri, in funzione del tipo di approccio utilizzato, in alcune categorie quali ad esempio: formule empiriche, criteri basati sugli invarianti di tensione o di deformazione, criteri energetici, criteri basati sull'approccio della scala mesoscopica, ecc. Tali criteri sono generalmente rivolti a ridurre lo stato tensionale multiassiale ad uno monoassiale equivalente.

Alcuni criteri sono basati sull'approccio del piano critico, secondo il quale la verifica a fatica viene eseguita rispetto al piano ottenuto massimizzando una combinazione di specifiche componenti di tensione [2-9], oppure mettendo in relazione la giacitura del piano con le direzioni principali medie di tensione [10-13].

Nella presente nota viene illustrato un criterio di resistenza a fatica, proposto dai primi due autori (criterio C-S), basato sull'approccio del piano critico [12-13]. Il piano critico viene determinato mettendo in relazione la giacitura del piano con le direzioni principali medie di tensione. Infatti, nel caso di carichi di fatica, le direzioni principali di tensione sono generalmente variabili nel tempo e

quindi è opportuno introdurre una procedura per mediare le loro direzioni istantanee. Il metodo scelto è quello delle funzioni peso [10-11]. La verifica a fatica è eseguita considerando una funzione ottenuta dalla combinazione tra l'ampiezza della componente tangenziale ed il massimo valore della componente normale di tensione, agenti sul piano critico.

Il criterio è stato applicato ad una serie di prove sperimentali, reperibili in letteratura, relative a barre cilindriche lisce, realizzate con metalli fragili e soggette a carichi multiassiali variabili sinusoidalmente, proporzionali e non proporzionali [14].

Nella pratica applicativa però non è raro che i componenti strutturali contengano delle discontinuità geometriche, come ad esempio un intaglio. Nonostante l'importanza della valutazione della resistenza a fatica nel caso di multiassialità e gradienti tensionali dovuti ad intagli, a tutt'oggi sono pochi i criteri disponibili in letteratura per la determinazione di tale resistenza [15-18].

Viene quindi presentata un'estensione del criterio C-S al caso di componenti intagliati [19], ottenuta combinando tale criterio con il metodo del punto critico, proposto da Taylor [20-24].

Il criterio di fatica presentato per componenti intagliati è applicato ad alcuni risultati sperimentali, reperibili in letteratura [25,26], relativi a barre circolari forate superficialmente e soggette a carichi multiassiali variabili sinusoidalmente in modo proporzionale. Le predizioni basate sul presente criterio sono, in generale, in buon accordo con le risultanze sperimentali.

## 2. DESCRIZIONE DEL CRITERIO C-S

Il criterio C-S, basato sull'approccio del piano critico per la valutazione della resistenza a fatica, si compone delle seguenti fasi:

- valutazione delle direzioni medie principali di tensione;
- determinazione del piano di nucleazione della fessura (piano critico) e del piano di propagazione della fessura (piano di frattura);
- valutazione della resistenza a fatica attraverso una funzione ottenuta dalla combinazione quadratica della componente di tensione normale con la componente di tensione tangenziale, agenti sul piano critico.

### 2.1 Le direzioni principali medie di tensione

Una procedura teorica è stata di recente sviluppata dai primi due autori per determinare le direzioni principali medie di tensione, attraverso il metodo delle funzioni peso [10-11].

In un generico istante di tempo, le tensioni principali,  $\sigma_n$ , con  $n=1,2,3$ , rappresentano gli autovalori del tensore degli sforzi istantaneo  $\sigma(t)$ , mentre gli autovettori forniscono i nove coseni direttori delle direzioni principali. Assumiamo che  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , cioè che le direzioni principali di tensione massima e minima siano indicate come asse 1 ed asse 3, rispettivamente. Il sistema di coordinate ortogonali P123, con origine nel punto P e assi coincidenti con le direzioni principali di tensione, può essere definito attraverso gli angoli 'principali' di Eulero,  $\phi, \theta, \psi$  ( $0 \leq \phi \leq 2\pi$ ;  $0 \leq \theta \leq \pi$ ;  $0 \leq \psi \leq 2\pi$ ) ottenuti dai coseni direttori delle direzioni principali.

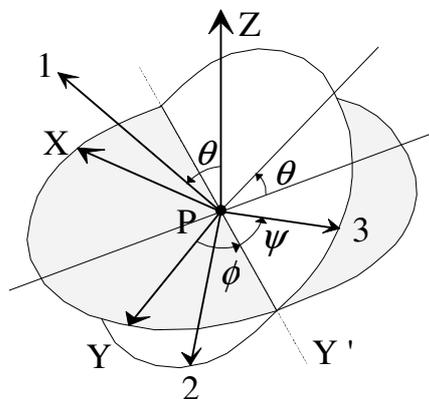


Fig. 1 - Direzioni principali di tensione 1, 2, 3 definite attraverso gli angoli di Eulero  $\phi, \theta, \psi$ .

Gli angoli di Eulero vengono opportunamente ridotti attraverso una procedura descritta in [10-13], al termine della quale si ottengono i seguenti intervalli di definizione:  $0 \leq \phi, \theta \leq \pi/2$  e  $-\pi/2 \leq \psi \leq \pi/2$ .

Per definire le direzioni principali medie di tensione  $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}$  si ricorre alla valutazione dei valori medi degli angoli di Eulero, ottenuti utilizzando opportune funzioni peso [10-13]:

$$\hat{\phi} = \frac{1}{W} \int_0^T \phi(t) W(t) dt \quad \hat{\theta} = \frac{1}{W} \int_0^T \theta(t) W(t) dt \quad \hat{\psi} = \frac{1}{W} \int_0^T \psi(t) W(t) dt \quad (1)$$

con:

$$W = \int_0^T W(t) dt \quad \text{e} \quad W(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } \sigma_1(t) < c\sigma_{af} \\ \left( \frac{\sigma_1(t)}{c\sigma_{af}} \right)^{-\frac{1}{m}} & \text{se } \sigma_1(t) \geq c\sigma_{af} \end{cases} \quad 0 < c \leq 1 \quad (2)$$

dove  $T$  è il periodo del ciclo di carico, mentre  $m$  e  $\sigma_{af}$  rappresentano, rispettivamente, il limite di fatica e la pendenza della curva di Wöhler del materiale per flessione ciclica alterna.

Come si può osservare dall'equazione (2), non tutti i valori istantanei degli angoli di Eulero concorrono alla determinazione dei corrispondenti valori medi, in quanto la funzione peso  $W(t)$  ha lo scopo di escludere quei valori degli angoli corrispondenti ad orientazioni istantanee della terna P123 per cui la tensione massima è inferiore ad una certa soglia, pari  $c\sigma_{af}$ .

## 2.2 Il piano critico ed il piano di frattura

In accordo con Brown e Miller [4], il processo di fessurazione per fatica può essere pensato composto da due fasi:

- la prima fase (Stage I) è quella di nucleazione della fessura lungo il piano di massima tensione tangenziale, ed è caratterizzata da una propagazione di Modo II;
- la seconda fase (Stage II) è quella di propagazione della fessura lungo il piano ortogonale alla direzione della tensione principale massima, ed è caratterizzata da una propagazione di Modo I.

In accordo con le osservazioni sperimentali e gli studi teorici disponibili in letteratura, relativi al processo di fessurazione per fatica, gli autori hanno assunto la normale al piano di frattura coincidente con la direzione media  $\hat{1}$  della tensione principale massima  $\sigma_1$ , ottenuta dall'applicazione delle equazioni 1 e 2 [12].

E' stata inoltre proposta dagli autori una correlazione tra la normale al piano di frattura (assunta coincidente con  $\hat{1}$ ) e la normale al piano critico,  $w$ , correlazione descritta dall'angolo  $\delta$  (Fig. 2):

$$\delta = \frac{3\pi}{8} \left[ 1 - \left( \frac{\tau_{af}}{\sigma_{af}} \right)^2 \right] \quad (3)$$

dove  $\delta$  è l'angolo formato da  $\hat{1}$  e da  $w$ , mentre  $\tau_{af}$  è il limite di fatica del materiale per torsione ciclica alterna.

## 2.3 La valutazione della resistenza a fatica

Consideriamo il piano critico  $\Delta$ , passante per il punto P. Il vettore tensione  $S_w$  agente nel punto P del piano critico  $\Delta$  può essere determinato mediante il tensore degli sforzi  $\sigma$ :

$$S_w = \sigma \cdot w \quad (4)$$

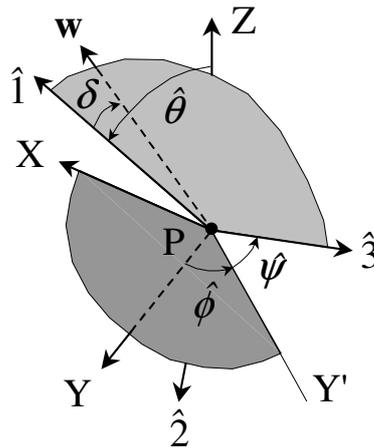


Fig. 2 – Correlazione tra le direzioni medie  $\hat{1}\hat{2}\hat{3}$  delle tensioni principali e la normale  $w$  al piano critico.

Il vettore tensione normale  $N$  ed il vettore tensione tangenziale  $C$  possono essere determinati come segue:

$$N = (w \cdot S_w)w \quad e \quad C = S_w - N \quad (5)$$

Durante la sollecitazione ciclica multiassiale, il modulo dei vettori  $N$  e  $C$  è una funzione periodica del tempo. La direzione del vettore  $N$  rimane fissa, e quindi è possibile determinare l'ampiezza  $N_a$  ed il valore medio  $N_m$  di tale vettore. La direzione del vettore  $C$ , invece, è in genere variabile nel tempo e quindi le definizioni dell'ampiezza  $C_a$  e del valore medio  $C_m$  non sono immediate. Recentemente Papadopoulos [7] ha proposto di determinare l'ampiezza  $C_a$  ed il valore medio  $C_m$  del vettore tensione tangenziale  $C$  nel seguente modo:

$$C_m = \min_{C'} \left\{ \max_{0 \leq t \leq T} \|C(t) - C'\| \right\} \quad C_a = \max_{0 \leq t \leq T} \|C(t) - C_m\| \quad (6)$$

dove il simbolo  $\|\cdot\|$  indica l'operatore norma di un vettore,  $C(t)$  è il vettore tensione tangenziale ad un generico istante di tempo  $t$ ,  $C'$  è un vettore scelto secondo la procedura descritta in [7].

La verifica a fatica è eseguita attraverso l'utilizzo di una funzione quadratica del massimo valore della componente normale ( $N_{max}$ ) e dell'ampiezza della componente tangenziale ( $C_a$ ), agenti sul piano critico:

$$\left( \frac{N_{max}}{\sigma_{af}} \right)^2 + \left( \frac{C_a}{\tau_{af}} \right)^2 \leq 1 \quad (7)$$

Il criterio di fatica (7) corrisponde alla seguente ampiezza di tensione equivalente,  $\sigma_{eq,a}$ , da confrontare con il limite di fatica del materiale,  $\sigma_{af}$  :

$$\sigma_{eq,a} = \sqrt{N_{max}^2 + \left( \frac{\sigma_{af}}{\tau_{af}} \right)^2 C_a^2} \leq \sigma_{af} \quad (8)$$

### 3. CONFRONTO CON DATI SPERIMENTALI PER COMPONENTI LISCI

Il criterio di fatica multiassiale proposto è stato applicato ad alcuni risultati sperimentali, reperibili in

letteratura, relativi a barre circolari lisce soggette a flessione ( $\sigma_y$ ) e torsione ( $\tau_{xy}$ ), in presenza di carichi sinusoidali in fase e fuori fase [14].

Il punto considerato per la determinazione delle direzioni principali medie di tensione, in cui individuare la giacitura del piano critico ed eseguire la verifica a fatica, è quello di maggiore sollecitazione per il componente strutturale in esame.

Il criterio (8) mostra che, in una rappresentazione  $N_{max} - C_a$ , la crisi per fatica ha luogo per i punti che giacciono al di fuori dell'ellisse con semiassi pari a  $\sigma_{af}$  e  $\tau_{af}$ .

In Figura 3 sono riportati i valori sperimentali relativi alle prove di Nishihara e Kawamoto [14] su un acciaio duro. Si osserva una buona correlazione tra l'ellisse teorica (linea a tratto continuo in Fig. 3) ed i risultati sperimentali relativi allo stato limite di fatica, per i diversi valori dell'angolo di fase  $\gamma$  e del rapporto  $\tau_{xy,a} / \sigma_{y,a}$  tra le ampiezze delle tensioni applicate.

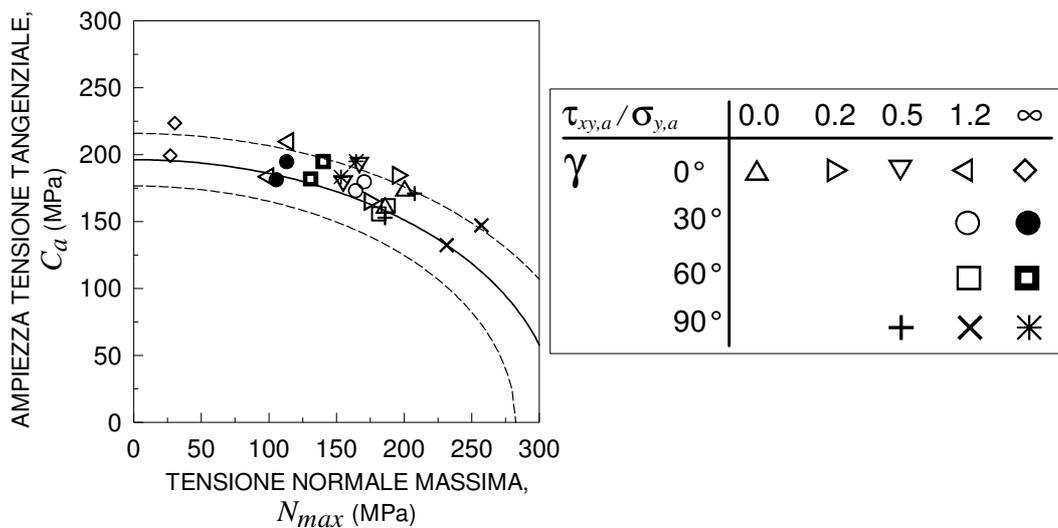


Fig. 3 - Ampiezza della tensione tangenziale,  $C_a$ , vs tensione normale massima,  $N_{max}$ , agenti sul piano critico: risultati teorici e sperimentali [14].

#### 4. ESTENSIONE DEL CRITERIO A COMPONENTI INTAGLIATI

A tutt'oggi, sono pochi i criteri disponibili in letteratura per la determinazione della resistenza a fatica nel caso di multiassialità e gradienti tensionali (dovuti ad intagli) [15-18].

Il metodo della distanza critica, proposto da Taylor [21], prevede che la crisi per fatica di un elemento intagliato si verifichi quando l'ampiezza di una specifica componente di tensione, valutata in un punto dell'elemento ad una certa distanza dalla radice dell'intaglio, raggiunge il valore  $\sigma_{af}$  (metodo del punto critico), oppure quando l'ampiezza del valore medio di tale componente di tensione, mediato su una linea o su un'area in prossimità della radice dell'intaglio, raggiunge il valore  $\sigma_{af}$  (metodo rispettivamente della linea o dell'area critica). La direzione di tale componente di tensione è scelta ortogonale alla bisettrice dell'intaglio.

La distanza dalla radice dell'intaglio, la lunghezza della linea e la superficie dell'area sopra citate possono essere calcolate attraverso una costante del materiale, rappresentata dalla lunghezza intrinseca della fessura di ElHaddad [20],  $L$ , ed assumono valori pari a  $L/2$ ,  $2L$ , ed  $L$ :

$$L = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\Delta K_{th}}{2\sigma_{af}} \right)^2 \quad (9)$$

dove  $\Delta K_{th}$  è il valore di soglia del fattore di intensità degli sforzi per fessure lunghe.

Susmel et al. [23] e Naik [24] hanno mostrato che è possibile combinare un generico criterio di resistenza a fatica multiassiale basato sull'approccio del piano critico, con uno dei metodi della distanza critica (metodo del punto critico, o metodo della linea critica, o metodo dell'area critica).

Nella presente nota viene descritta un'estensione del criterio C-S al caso di componenti intagliati [19]. Tale estensione si basa su un adattamento del metodo del punto critico introdotto da Taylor [21].

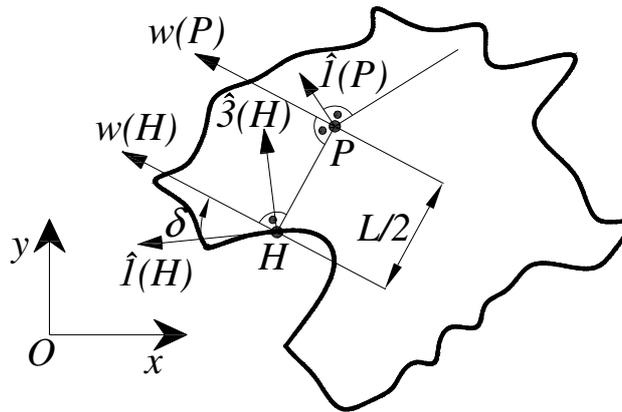


Fig. 4 - Giacitura del piano critico in prossimità della superficie dell'intaglio, nell'ipotesi di stato tensionale/deformativo piano.

Consideriamo la superficie di un intaglio presente in un corpo soggetto ad una sollecitazione ciclica ad ampiezza costante (Fig. 4). In ogni punto della superficie intagliata la tensione principale massima assume valore nullo e la sua direzione si mantiene ortogonale alla superficie dell'intaglio. Si ipotizza che il punto  $H$  della superficie intagliata, dal quale la fessura ha origine, sia quello in cui l'ampiezza della tensione equivalente  $\sigma_{eq,a}$  raggiunge il valore massimo.

Poiché le direzioni principali di tensione non variano nel tempo indipendentemente dal tipo di carico multiassiale applicato al corpo, le direzioni principali medie  $\hat{1}$  e  $\hat{3}$  sono rispettivamente tangenti e normali alla superficie dell'intaglio in corrispondenza del punto  $H$  (Fig. 4).

La giacitura del piano critico in  $H$ , di normale  $w(H)$ , viene determinata attraverso l'angolo  $\delta$ , misurato a partire dalla direzione principale media,  $\hat{1}$ . L'orientazione del piano critico in  $P$  si assume sia la stessa di quella che si ha nel punto  $H$ .

Sulla base del metodo del punto critico proposto da Taylor [21], l'ampiezza della tensione equivalente,  $\sigma_{eq,a}$ , viene valutata nel punto  $P$ , ad una distanza pari ad  $L/2$  dal punto  $H$  (l'espressione di  $L$  è fornita dall'Eq. 9). La crisi per fatica viene raggiunta quando  $\sigma_{eq,a}$  è uguale a  $\sigma_{af}$  (si veda, Eq. 8).

## 5. CONTRONTO CON DATI SPERIMENTALI PER COMPONENTI INTAGLIATI

Il criterio di fatica proposto per componenti intagliati è applicato ad alcuni risultati sperimentali, reperibili in letteratura, relativi a barre circolari forate superficialmente, soggette a flessione e torsione ciclica alterna, con ampiezza rispettivamente pari a  $\sigma_{x,a}$  e  $\tau_{xy,a}$ , e alla loro combinazione in fase [25,26]. I diametri (del foro) esaminati sono compresi tra 100 e 500  $\mu\text{m}$ . Il materiale considerato è un acciaio al carbonio JIS S35C ( $\sigma_{af} = 233 \text{ MPa}$ ,  $\tau_{af} = 145 \text{ MPa}$ ,  $\Delta K_{th} = 7.6 \text{ MPa}\sqrt{m}$ ,  $L = 340 \mu\text{m}$ ).

Nelle suddette prove sperimentali sono stati considerati i seguenti valori del rapporto di biassialità  $\lambda = \tau_{xy,a} / \sigma_{x,a}$ : 0 (flessione pura), 0.5, 1.0, 2.0,  $\infty$  (torsione pura).

La posizione del punto  $H$  è individuata dall'angolo  $\alpha$  (Fig. 5). In Tabella 1 è riportata la posizione del punto "caldo"  $H$  (hot spot) in funzione dell'angolo  $\alpha$ , al variare della giacitura del piano critico individuata dall'angolo  $\beta$ .

In Figura 6 è riportato l'andamento del limite di fatica in funzione del diametro del foro  $D$ , al variare del rapporto di biassialità  $\lambda$ . I risultati teorici sono confrontati con quelli ottenuti sperimentalmente da Endo [25,26]. Tale confronto appare abbastanza soddisfacente, con un errore pari al 25% circa.

## 6. CONCLUSIONI

Nella presente nota, viene descritto un criterio proposto recentemente dagli autori (criterio C-S) per la determinazione del limite di fatica di componenti intagliati soggetti a carichi remoti multiassiali.

Il criterio è stato inizialmente sviluppato per i componenti lisci attraverso il cosiddetto approccio del

piano critico.

L'applicazione del criterio proposto al caso di componenti intagliati si basa su un adattamento del metodo del punto critico. In particolare si assume che la crisi per fatica si verifichi quando l'ampiezza della tensione equivalente, definita sulla base del criterio C-S, raggiunge il limite di fatica per flessione alterna. La tensione equivalente viene valutata in un punto (del componente) ad una distanza pari alla metà della lunghezza intrinseca della fessura di ElHaddad, lungo una direzione che dipende dalle proprietà del materiale.

Le predizioni teoriche del limite di fatica secondo il criterio proposto sono state confrontate con i risultati di alcune prove sperimentali relative a provini metallici con intagli circolari, soggetti a carichi multiassiali proporzionali. Il confronto è stato abbastanza soddisfacente (errore pari al 25% circa).

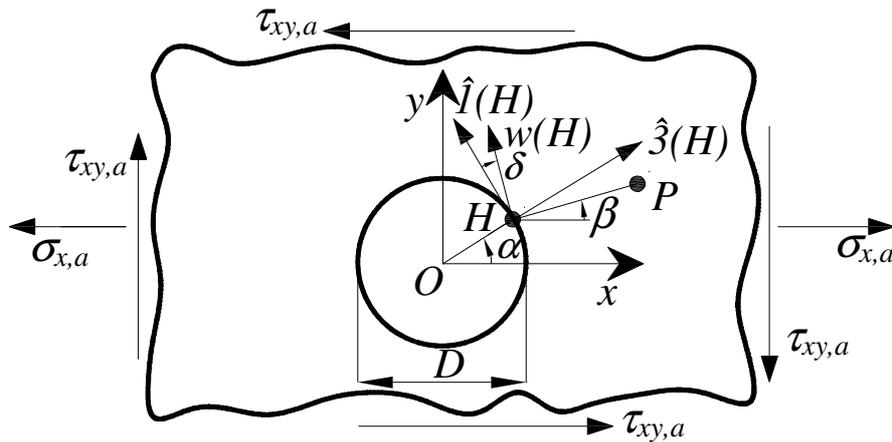


Fig. 5 - Giacitura del piano critico in prossimità del foro circolare per sollecitazione normali e tangenziali, nell'ipotesi di stato tensionale/deformativo piano.

Tabella 1 – Posizione del punto H sulla superficie del foro e giacitura del piano critico.

$\lambda$	$ \alpha $	$ \beta $
0.0	$90^\circ$	$90^\circ - \delta$
0.5	$70^\circ$	$70^\circ - \delta$
1.0	$60^\circ$	$60^\circ - \delta$
2.0	$50^\circ$	$50^\circ - \delta$
$\infty$	$45^\circ$	$45^\circ - \delta$

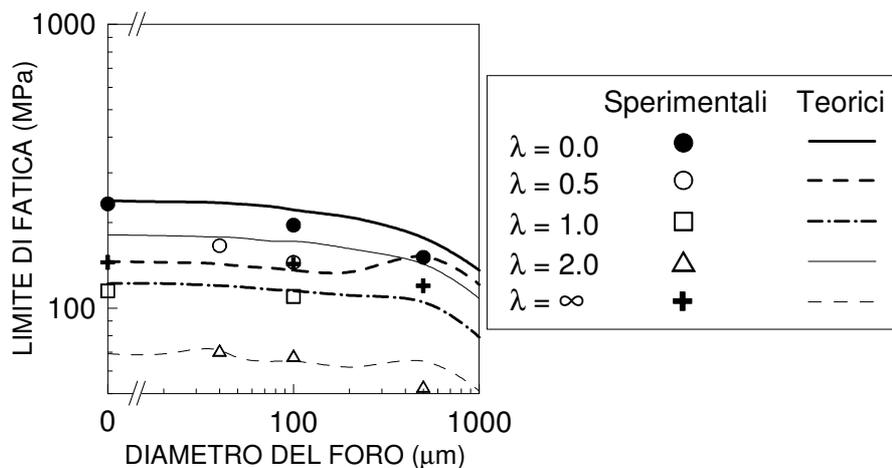


Fig. 6 - Confronto tra i risultati sperimentali [24,25] e le predizioni teoriche in termini di limite di fatica in funzione del diametro del foro.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Garud YS. Multiaxial fatigue: a survey of the state of the art. *J. Testing Eval.* 1981; 40: 165-178.
- [2] You B-R, Lee S-B. A critical review on multiaxial fatigue assessments of metals. *Int. J. Fatigue.* 1996; 18: 235-244.
- [3] Findley WN. A theory for the effect of mean stress on fatigue of metals under combined torsion and axial load or bending. *J. Engng Industry, Trans.* 1959; ASME 81: 301-306.
- [4] Brown MW, Miller KJ. A theory for fatigue failure under multiaxial stress-strain condition. *Proc. Institute Mech. Engineers.* 1973; 187: 745-755.
- [5] Mataka T. An explanation on fatigue limit under combined stress. *Bull. JSME.* 1977; 20: 257-263.
- [6] McDiarmid DL. A general criterion for high cycle multiaxial fatigue failure. *Fatigue Fract. Engng Mater. Struct.* 1991; 14: 429-453.
- [7] Papadopoulos IV. Critical plane approaches in high-cycle fatigue: on the definition of the amplitude and mean value of the shear stress acting on the critical plane. *Fatigue Fract. Engng Mater. Struct.* 1998; 21: 269-285.
- [8] Susmel L, Lazzarin P. A bi-parametric Wöhler curve for high cycle multiaxial fatigue assessment. *Fatigue Fract. Engng Mater. Struct.* 2002; 25: 63-78.
- [9] Lazzarin P, Susmel L. A stress-based method to predict lifetime under multiaxial fatigue loading. *Fract. Engng Mater. Struct.* 2003; 26: 1171-1187.
- [10] Carpinteri A, Brighenti R, Macha E, Spagnoli A. Expected principal stress directions for multiaxial random loading-part I: theoretical aspects of the weight function method. *Int. J. Fatigue.* 1999; 21: 83-88.
- [11] Carpinteri A, Brighenti R, Macha E, Spagnoli A. Expected principal stress directions for multiaxial random loading - Part II: Numerical simulation and experimental assessment through the weight function method. *Int. J. Fatigue.* 1999; 21: 89-96.
- [12] Carpinteri A, Brighenti R, Spagnoli A. A fracture plane approach in multiaxial high-cycle fatigue of metals. *Fatigue Fract. Engng Mater. Struct.* 2000; 23: 355-364.
- [13] Carpinteri A, Spagnoli A. Multiaxial high-cycle fatigue criterion for hard metals. *Int. J. Fatigue.* 2001; 23: 135-145.
- [14] Nishihara T, Kawamoto M. The strength of metals under combined alternating bending and torsion with phase difference. *Memories of the College of Engineering, Kyoto Imperial University.* 1945; 11: 85-112.
- [15] Flavenot J-F, Skalli NA. Biaxial and Multiaxial Fatigue ECF 3: A critical depth criterion for the evaluation of long-life fatigue strength under multiaxial loading and a stress gradient. *Mechanical Engineering Publications (Eds Brown MW, Miller KJ),* 1989.
- [16] Seweryn A, Mroz Z. On the criterion of damage evolution for variable multiaxial stress states. *Int. J. Solids Struct.* 1998; 35: 1589-1616.
- [17] Papadopoluos IV, Panoskaltis VP. Invariant formulation of a gradient dependent multiaxial high-cycle fatigue criterion. *Engng Fract. Mechs.* 1996; 55: 513-528.
- [18] Tanaka K. Engineering formulae for fatigue strength reduction due to crack-like notches. *Int. J. Fract.* 1983; 22: R39-R45.
- [19] Carpinteri A, Spagnoli A, Vantadori S, Viappiani D. A multiaxial criterion for notch high-cycle fatigue using a critical-point method. *Engng Fract. Mechs.* 2007; in press: available online.
- [20] ElHaddad MH, Dowling NF, Topper TH, Smith KN. J integral applications for short fatigue cracks at notches. *Int. J. Fract.* 1980; 16: 15-24.
- [21] Taylor D. Geometrical effects in fatigue: a unifying theoretical model. *Int. J. Fatigue.* 1999; 21: 413-420.
- [22] Taylor D, Wang G. The validation of some methods of notch fatigue analysis. *Fatigue Fract. Engng Mater. Struct.* 2000; 23: 387-394.
- [23] Susmel L, Taylor D. Two methods for predicting the multiaxial fatigue limits of sharp notches fatigue. *Fract. Engng Mater. Struct.* 2003; 26: 821-833.
- [24] Naik RA, Lanning DB, Nicholas T, Kallmeyer AR. A critical plane gradient approach for the prediction of notched HCF life. *Int. J. Fatigue.* 2005; 27: 481-492.
- [25] Endo M. *Small Fatigue Cracks: Mechanics, Mechanisms and Applications: Effects of small defects on the fatigue strength of steel and ductile iron under combined axial/torsional loading.* Elsevier (Eds Ravichandran KS, Ritchie RO, Murakami Y), 1999.
- [26] Endo M. *Biaxial/Multiaxial Fatigue and Fracture ESIS Publication 31: The multiaxial fatigue strength of specimens containing small defects.* Elsevier (Eds Carpinteri A, de Freitas M, Spagnoli A), 2003.