

## Metodologie di analisi per il debonding in travi rinforzate

D. Bruno<sup>a</sup>, F. Greco<sup>a</sup>, P. Nevone Blasi<sup>a</sup>

<sup>a</sup> *Dipartimento di Strutture, Università della Calabria, Via Ponte P. Bucci 39b - 87030 Arcavacata di Rende (CS), e-mail: [dbruno@unical.it](mailto:dbruno@unical.it), [fgreco@unical.it](mailto:fgreco@unical.it), [p.nevone@strutture.unical.it](mailto:p.nevone@strutture.unical.it).*

### SOMMARIO

Questo lavoro presenta un accurato modello per l'analisi dei tipici problemi di debonding all'estremità nelle travi rinforzate mediante piastre in laminato composito incollate esternamente. Il sistema rinforzato risulta essere composto da tre strati: la trave rinforzata, lo strato di adesivo e la piastra incollata. La trave è modellata mediante un assemblaggio di strati matematici i quali adottano la teoria di deformabilità tagliante al primo ordine per i laminati. Le condizioni di adesione e continuità tra i diversi strati vengono simulate mediante l'utilizzo dei modelli di interfaccia forte e collassata, rispettivamente. Le equazioni di governo per i campi di spostamento nonché le condizioni al contorno e di continuità sono state ottenute mediante un approccio variazionale. Il confronto con accurate analisi agli elementi finiti (FEA), nonché con soluzioni analitiche ottenute tramite le discontinuità nelle risultanti delle tensioni al tip della frattura, mostra come un modello costituito con soli due layer matematici consenta un'efficace previsione dell'energia di rilascio totale (ERR). Sono stati poi investigati gli effetti dei miglioramenti apportati al modello rappresentante il sistema rinforzato tramite l'infittimento del numero di strati matematici, mostrando come possano essere valutate in maniera efficace sia l'energia di rilascio totale (ERR) che la sua partizione modale. Applicazioni numeriche sono state condotte valutando le energie di rilascio (ERRs) mediante le discontinuità degli spostamenti relativi all'interfaccia, garantendo una procedura numerica assolutamente efficace.

### ABSTRACT

This work deals with an enhanced analytical model for the analysis of typical edge debonding problems in beams strengthened with externally bonded composite laminated plates. The strengthened system is viewed as composed by three physical layers: the strengthened beam, the adhesive layer and the bonded plate. The beam is modelled by an assembly of mathematical layers which adopts the first-order shear deformation laminate theory. Bonding and continuity conditions between different layers are simulated by using the strong and collapsed interface models, respectively. Governing equations for displacement fields along with boundary and continuity conditions are obtained by a variational approach. Comparisons with highly refined FE analyses, together with analytical solutions of the interfacial crack problem evaluated from stress resultant discontinuities across crack tip, show that the two-layers model provides a reasonably accurate prediction of the total ERR. The effects of refining the model representing the strengthened system, by increasing the number of mathematical layers, are then investigated, pointing out that very accurate predictions of the ERR as well as mode decomposition can be obtained. Numerical applications are carried out by calculating ERRs through interface displacement jumps, leading to a very efficient numerical procedure.

## 1. INTRODUZIONE

Recentemente, si sta diffondendo sempre più l'utilizzo dei materiali fibro-rinforzati plastici (FRP) in luogo degli usuali materiali da costruzione, per il rinforzo, il recupero o la riabilitazione di strutture civili esistenti in calcestruzzo armato o acciaio [1]. In effetti, gli FRP, specie sotto forma di laminati compositi, possono essere usati efficacemente al fine di rinforzare o riparare strutture danneggiate e deteriorate. La più usuale tecnica di rinforzo, consiste nell'incollaggio di piastre in laminato composito sulla faccia esterna tesa di travi in C.A. o acciaio, per mezzo di uno strato di adesivo. L'applicazione di piastre in FRP alla superficie esterna di elementi strutturali garantisce un tangibile miglioramento delle prestazioni meccaniche, con il minimo impatto sul sistema grazie alle ridotte modifiche, apportate alla struttura stessa, in termini di peso e dimensioni. L'inserimento di rinforzi in FRP, infatti, garantisce miglioramenti in termini di rigidità, di capacità resistente a carichi assiali, taglianti e flessionali ed in generale un aumento della durabilità della struttura [2].

D'altro canto, gli studi sperimentali hanno mostrato che le migliorie in termini di rigidità e resistenza apportate dall'applicazione del rinforzo sono accompagnate da una progressiva diminuzione della duttilità legata al fenomeno del debonding tipico dei sistemi rinforzati mediante piastre in FRP, di natura fragile e instabile, il quale può compromettere l'efficacia del rinforzo. Il debonding o la delaminazione della piastra in FRP è causato dall'alta concentrazione delle tensioni normali e tangenziali che si verifica all'estremità della piastra incollata. Partendo da queste regioni, sedi di concentrazione delle tensioni, la frattura si propaga all'interno di uno dei materiali costituenti il sistema rinforzato o all'interfaccia tra essi, secondo modalità dipendenti dall'energia di frattura del singolo materiale, dalle leggi costitutive delle interfacce tra i materiali o da difetti iniziali. A tal riguardo, l'innesco del crack all'interfaccia calcestruzzo/adesivo, contenendo l'inizio e la propagazione di una frattura interfacciale tra lo strato di adesivo e la superficie inferiore della trave dove le tensioni interfacciali sono di trazione, risulta essere favorito da una cattiva applicazione della piastra in FRP ed è di grande interesse in quanto può essere causa di danneggiamenti locali nonché di probabili collassi catastrofici [3,4].

Per migliorare le prestazioni del rinforzo in FRP, occorre quindi sviluppare delle metodologie in grado di analizzare in maniera dettagliata i problemi del danneggiamento per debonding. In particolare, un'accurata modellazione delle interfacce danneggiate e lo studio approfondito dell'avanzamento della delaminazione associato diventa necessario al fine di progettare un efficace sistema rinforzato in grado di utilizzare al pieno l'incremento della resistenza a trazione garantito dalla piastra in composito. Le procedure usualmente seguite per la simulazione dei problemi di debonding possono suddividersi sostanzialmente in due gruppi: il primo si basa sulla diretta applicazione delle analisi di resistenza, mentre il secondo formula il problema mediante l'utilizzo della meccanica del danneggiamento o della meccanica della frattura o mediante l'accoppiamento delle due tecniche. In accordo con le analisi di resistenza il debonding si innesca quando le tensioni di interfaccia soddisfano un criterio di rottura dipendente dalle proprietà meccaniche del materiale [5]. Come conseguenza di ciò, vari modelli per la valutazione delle tensioni interfacciali sono stati proposti [6]. La presenza di vari punti sedi di singolarità tensionali, quali le interfacce tra il calcestruzzo e l'adesivo e il calcestruzzo e la piastra di rinforzo, richiede un approccio basato sulla meccanica della frattura per analizzare la propagazione del crack. A tal fine, diventa necessario valutare in maniera efficace sia l'energia di rilascio totale sia la sua partizione modale. Altro interessante aspetto è il problema delle singolarità oscillatorie delle tensioni che si generano alle estremità della piastra di rinforzo, che conduce a problemi numerici quando si adottano modelli agli elementi finiti. Inoltre gli effetti della deformabilità tagliente deve essere tenuta accuratamente in conto. Questo articolo presenta uno studio numerico del problema del danneggiamento per delaminazione all'estremità di travi rinforzate mediante piastre in composito incollate sulla superficie esterna della trave stessa. L'obiettivo è di stabilire delle procedure e delle opportune modellazioni che possano essere utilizzate nella progettazione, al fine di prevenire collassi prematuri causati dai fenomeni di debonding.

## 2. MODELLO MULTI-LAYER DEL SISTEMA RINFORZATO

Il sistema strutturale considerato in questo articolo è composto da tre strati fisici, la trave di base, lo strato di adesivo e la piastra in FRP, e si assume che esso contenga una delaminazione di estremità, la quale può trovarsi localizzata nelle varie interfacce tra i materiali costituenti, come viene mostrato nella figura 1. La struttura delaminata viene rappresentata mediante una sequenza di strati matematici all'interno del suo spessore retti dalla classica teoria di deformabilità tagliente al primo ordine dei laminati (FSDLT). Ciascun layer matematico può essere rappresentativo di un layer fisico o di parte di uno strato all'interno dello spessore della trave. Il primo strato è il più interno e lo spessore dell' $i$ -esimo layer viene indicato con  $t_i$ . I carichi sono assunti costanti nello spessore ed il problema è analizzato a livello bi-dimensionale. Sono state adottate le condizioni di stato piano di tensione nella modellazione.

Le analisi del sistema composito sono state condotte ipotizzando uno spessore unitario nella direzione y della trave.

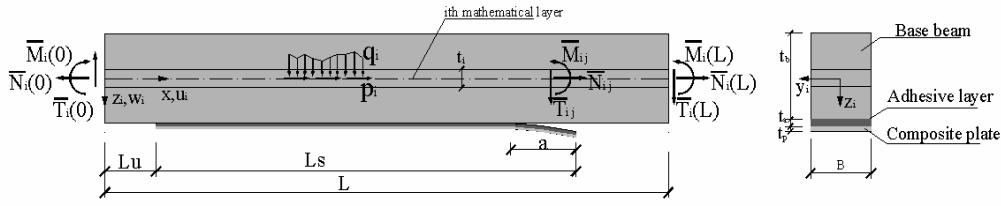


Figura 1. Schema del sistema rinforzato.

Con riferimento all'i-esimo layer le relazioni cinematiche per la deformazione assiale, la curvatura e la deformazione da taglio, assumono rispettivamente la seguente forma:

$$\varepsilon_i = u_i', \quad \kappa_i = \psi_i', \quad \gamma_i = \psi_i + w_i' \quad (1)$$

dove  $u_i(x)$  e  $w_i(x)$  sono, rispettivamente, gli spostamenti assiali e trasversali del piano medio dell'i-esimo strato,  $\psi_i(x)$  rappresenta la rotazione della sezione normale alla linea media e l'apice indica la derivata rispetto ad  $x$ .

Le relazioni costitutive per l'i-esimo strato matematico vengono definite mediante le classiche relazioni della rigidità estensionale  $A_i$ , dell'accoppiamento della rigidità flessionale-estensionale  $B_i$ , della rigidità flessionale  $D_i$  e tagliante  $H_i$ , nella seguente forma:

$$\begin{Bmatrix} N_i \\ M_i \\ T_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i & B_i & 0 \\ B_i & D_i & 0 \\ 0 & 0 & H_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_i \\ \kappa_i \\ \gamma_i \end{Bmatrix} \quad (2)$$

dove le rigidità possono essere espresse mediante le relazioni:

$$(A_i, B_i, D_i) = \int_{-t_i/2}^{t_i/2} E_i(z_i)(1, z_i, z_i^2) dz_i, \quad H_i = \int_{-t_i/2}^{t_i/2} f G_i(z_i) dz_i \quad (3)$$

dove  $E_i$  è il modulo di elasticità longitudinale,  $G_i$  è il modulo di elasticità trasversale,  $f$  è il fattore di correzione per il taglio assunto pari 5/6 nel lavoro. I moduli longitudinali e trasversali dipendono dalle proprietà costitutive del singolo strato. In particolare, quando la trave di base è modellata mediante un solo strato le relazioni di rigidità assumono la forma:

$$A_2 = E_2 t_2, \quad D_2 = E_2 t_2^3 / 12, \quad B_2 = 0, \quad H_2 = f G_2 t_2 \quad (4)$$

Mentre per uno strato composito formato dall'adesivo e dalla piastra in FRP:

$$A_1 = E_p t_p + E_a t_a, \quad D_1 = \frac{E_p t_p (3t_a^2 + t_p^2) + E_a t_a (3t_p^2 + t_a^2)}{12}, \quad B_1 = \frac{(E_p - E_a) t_p t_a}{2}, \quad H_1 = f (G_p t_p + G_a t_a) \quad (5)$$

## 2.1 Formulazione dell'interfaccia

La continuità degli spostamenti alle interfacce tra i vari strati matematici nella zona della trave non delaminata è tenuta in conto nella modellazione mediante l'utilizzo di appropriati layer d'interfaccia di spessore nullo. Sono stati considerati due tipi di interfacce, denominate interfaccia forte e interfaccia collassata.

Il modello è implementato mediante una legge costitutiva lineare tra le tensioni interlaminari normali e tangenziali e i corrispondenti salti negli spostamenti d'interfaccia, e coinvolge due parametri di rigidità  $k_z$ ,  $k_{xy}$ :

$$\sigma_{zz} = \left[ 1 - \frac{1}{2}d(1 + \text{sign}(\Delta w)) \right] k_z \Delta w, \quad \sigma_{zx} = (1-d)k_{xy} \Delta u \quad (6)$$

dove  $d$  è una variabile di danneggiamento, che assume il valore 1 in assenza di adesione e valore 0 in caso di perfetta adesione, mentre  $\text{sign}$  è la funzione segno introdotta per simulare il contatto nella regione delaminata. Considerare i parametri di rigidezza come parametri di penalizzazione consente di cogliere le singolarità tensionali nel fronte di delaminazione, le quali, nella situazione limite in cui le rigidzze dell'interfaccia tendono all'infinito, divengono delle forze interfacciali concentrate e consentono il seguente calcolo delle energie di rilascio:

$$G = G_I + G_{II}, \quad G_I = \begin{cases} \lim_{k_z, k_{xy} \rightarrow \infty} \frac{1}{2} k_z \Delta w^2 (s) & \Delta w \geq 0 \\ 0 & \Delta w < 0 \end{cases}, \quad G_{II} = \lim_{k_z, k_{xy} \rightarrow \infty} \frac{1}{2} k_{xy} \Delta u^2 \quad (7)$$

dove i salti negli spostamenti d'interfaccia sono valutati nel tip della frattura. La formulazione mediante interfaccia forte consente un'efficiente analisi numerica per il debonding e sarà adottata nelle applicazioni numeriche.

D'altro canto, il modello con interfaccia collassata è implementato introducendo i moltiplicatori di Lagrange, rappresentanti le tensioni interlaminari, ed è adottato al fine di ridurre il numero di variabili spostamento generalizzate. Le relative equazioni di constraint impongono la continuità negli spostamenti tra due layer adiacenti,  $i$  ed  $i+1$ :

$$\Delta u_i = \Delta w_i = 0 \quad (8)$$

$$\Delta u_i = u_i - \frac{t_i}{2} \psi_i - u_{i+1} - \frac{t_{i+1}}{2} \psi_{i+1}, \quad \Delta w_i = w_i - w_{i+1}$$

Nel caso in cui venga adottato un modello ad interfaccia collassata l'energia di rilascio e la sua partizione modale possono essere valutate applicando la tecnica della chiusura virtuale della frattura (VCCT) in termini di forze interfacciali concentrate nel tip della frattura, ottenute come reazioni alle equazioni di constraint (8). Si può mostrare come i risultati ottenuti mediante tale modellazione coincidono con quelli ottenuti mediante l'impiego di un'interfaccia forte. Infatti, nella procedura al limite per l'interfaccia forte le singolarità tensionali risultano essere equivalenti alle citate forze concentrate.

### 3. RISULTATI NUMERICI

A questo punto, dopo aver stabilito la formulazione generale del problema, in questo paragrafo saranno mostrati i risultati numerici relativi a varie condizioni al contorno, [7]. Sono state esaminate, in particolare, due tipi di configurazioni geometriche, vale a dire la trave a mensola e la trave semplicemente appoggiata. Nel primo caso è stata investigata la trave soggetta a forza trasversale applicata all'estremità libera; nel secondo caso, invece, si è analizzata la soluzione per uno schema tipico di trave inflessa su tre punti. Si mostrerà che la soluzione per la trave a mensola può essere adottata come un'approssimazione ragionevole per ottenere l'energia di rilascio totale per lo schema di trave semplicemente appoggiata.

Nella seguente tabella (Tab. 1) sono mostrati i dati geometrici e meccanici dello schema di trave rinforzata al quale ci si è riferiti per i test numerici; le caratteristiche della piastra di rinforzo sono rappresentative di un tipico laminato unidirezionale con fibre di carbonio e matrice in resina epossidica (carbon-epoxy).

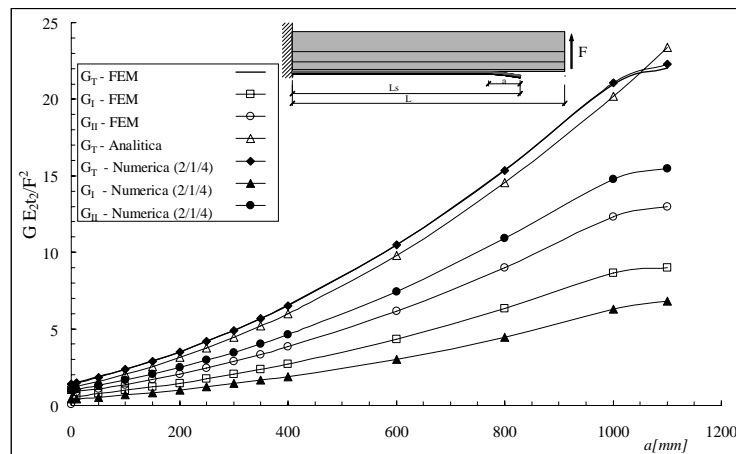
**Tabella 1.** Proprietà geometriche e dei materiali del sistema rinforzato analizzato.

Componente fisico	Spessore [mm]	Lunghezza [mm]	Modulo di Young [Mpa]	Modulo di Taglio [Mpa]
Trave in calcestruzzo	$t_2=300$	$L_2=1,500$	$E_2=30,000$	$G_2=12,820.5$
Adesivo	$t_a=2$	$L_a=1,200$	$E_a=2,000$	$G_a=740.74$
Piastra in FRP	$t_p=4$	$L_p=1,200$	$E_p=160,000$	$G_p= 5,333.3$

I valori teorici previsti con la presente formulazione sono stati confrontati con i valori ottenuti con un'analisi numerica agli elementi finiti, FEM. Le analisi numeriche agli elementi finiti sono state fatte modellando il sistema con uno stato di tensione piano 2D, con elementi a quattro nodi, e calcolando l'energia di rilascio con l'aiuto della tecnica della chiusura virtuale (VCCT). Per una lunghezza della frattura appartenente all'intervallo  $300\text{mm} \leq a \leq 1100\text{mm}$ , sulla valutazione dell'energia di rilascio totale c'è un soddisfacente accordo tra la presente soluzione ed i risultati numerici con differenze, rispetto a questi ultimi, inferiori al 10%.

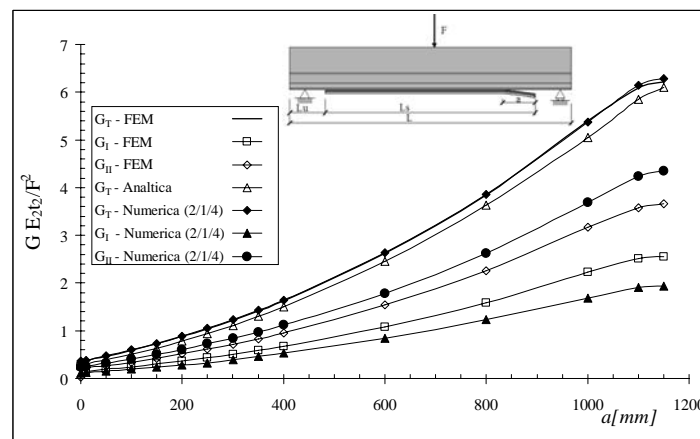
Il modello con soli due strati matematici, risulta essere sufficiente solo per ottenere, con una ragionevole approssimazione, l'energia di rilascio totale, peraltro, utile da un punto di vista ingegneristico; gli errori in queste previsioni, al confronto con soluzioni agli elementi finiti, sono dell'ordine del 10%. Al contrario, per poter valutare in maniera efficace la partizione modale dell'energia di rilascio, risulta essere necessaria l'introduzione di più di uno strato matematico per descrivere ogni strato fisico del sistema analizzato. Tuttavia, l'uso di un modello multistrato richiede un onere computazionale eccessivo per la valutazione di una soluzione in forma chiusa del sistema di equazioni differenziali, che pertanto possono essere risolte soltanto per via numerica.

Nell'analisi più accurata, eseguita con il modello qui proposto, la struttura è stata divisa in 7 strati matematici: 2 per la piastra in FRP, 1 per l'adesivo e 4 per la trave in calcestruzzo. Partendo dallo strato inferiore e considerando la delaminazione che avanza all'interfaccia trave/adesivo, gli spessori dei singoli strati matematici sono, rispettivamente, 0.5 tp, 0.5 tp, ta, 0.01 tb, 0.07 tb, 0.32 tb, 0.6 tb. Questo assemblaggio di strati è stato indicato come (2/1/4).



**Figura 2.** Convergenza con risultati agli elementi finiti per la trave rinforzata a mensola e caricata da una forza di taglio al bordo.

Le Fig. 2 e 3 mostrano che, sia nel caso di trave a mensola che per la trave appoggiata, l'energia di rilascio totale ha un eccellente accordo con i risultati ottenuti con i FEM, con errori relativi inferiori all'1%.



**Figura 3.** Convergenza con i risultati agli elementi finiti per la trave semplicemente appoggiata rinforzata e inflessa su tre punti (TPB).

Al fine di migliorare la partizione modale, lo schema di trave rinforzata viene raffinato usando un appropriato assemblaggio di strati, e l'accuratezza della soluzione aumenta all'aumentare degli strati matematici stessi.

### 3.1 Analisi dei diversi modi di collasso

Per descrivere meglio il comportamento di un elemento rinforzato è necessaria un'investigazione sui possibili modi con cui si può verificare il collasso per scollamento o delaminazione. A tal fine, con riferimento allo schema di trave semplicemente appoggiata su tre punti, è stata analizzata l'influenza che hanno le diverse localizzazioni della delaminazione sul comportamento dell'energia di rilascio totale e delle sue componenti. Sono state prese in considerazione tre diverse posizioni, vale a dire l'interfaccia trave adesivo (B/A), l'interfaccia adesivo/piastra di rinforzo (A/P) e l'interfaccia posta nel piano medio dello strato di adesivo (MA), come mostra la Fig. 4.

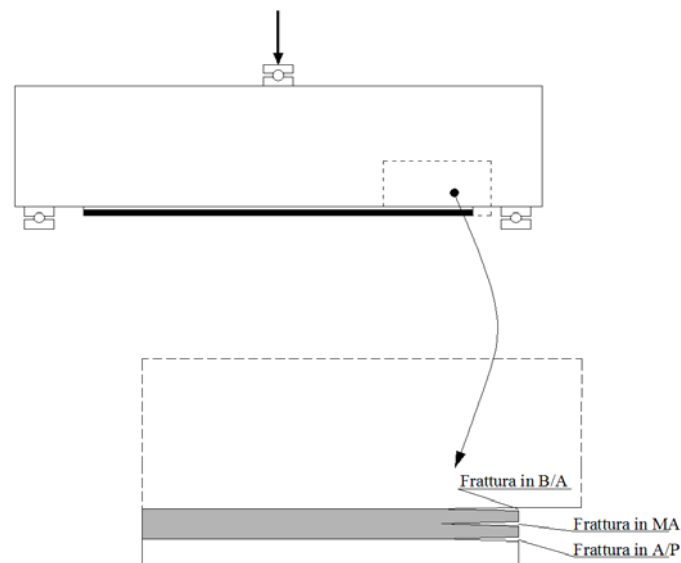


Fig. 4. Punti di innesco della frattura interlaminare considerati.

Un'analisi simile [8], condotta mediante l'impiego di tecniche agli elementi finiti, mostra che l'interfaccia B/A si caratterizza per avere le tensioni interlaminari normali maggiori. In particolare, viene sottolineato che, nelle sezioni di bordo del rinforzo le tensioni all'interfaccia trave/adesivo sono di trazione e questo può incoraggiare la frattura ad innescarsi in tale interfaccia, al contrario di quello che accade all'interfaccia adesivo/piastra di rinforzo dove le tensioni interlaminari normali sono di compressione e la frattura difficilmente potrà partire da questo punto. Tale aspetto è stato investigato mediante analisi FEM ed i risultati sono visibili nelle Fig. 5.

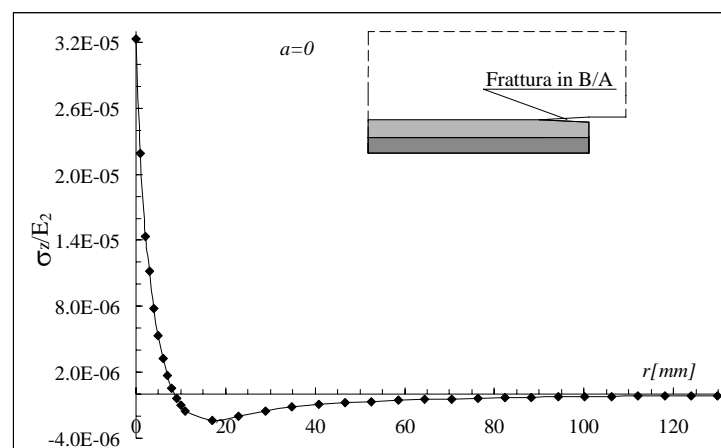


Fig. 5. Tensioni interlaminari normali in funzione della distanza  $r$  dal tip, all'interfaccia B/A.

I risultati mostrati nelle Fig. 6, 7 e 8, mostrano come sia più probabile che la frattura interlaminare si inneschi e progredisca all'interfaccia trave/adesivo B/A, piuttosto che in corrispondenza delle altre due interfacce considerate, adesivo/piastra di rinforzo A/P o all'interno dello strato di adesivo stesso MA. Dagli stessi tre grafici si può notare ancora come l'energia di rilascio totale sia influenzata pochissimo dalla posizione della frattura, mentre le sue componenti modali, ne risentono molto di più.

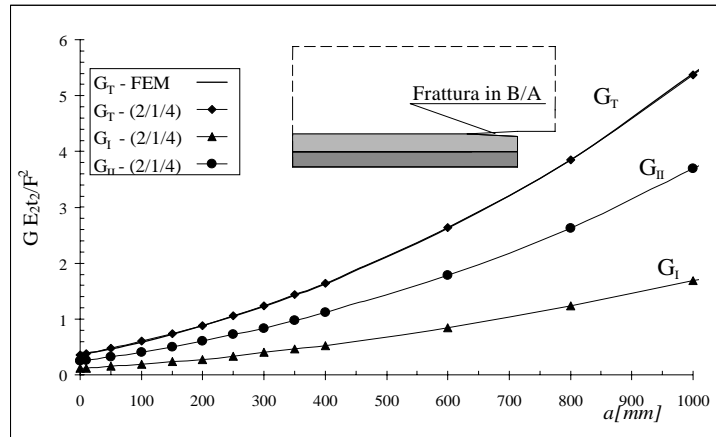


Fig. 6. Energia di rilascio per diverse lunghezze della delaminazione nell'interfaccia B/A.

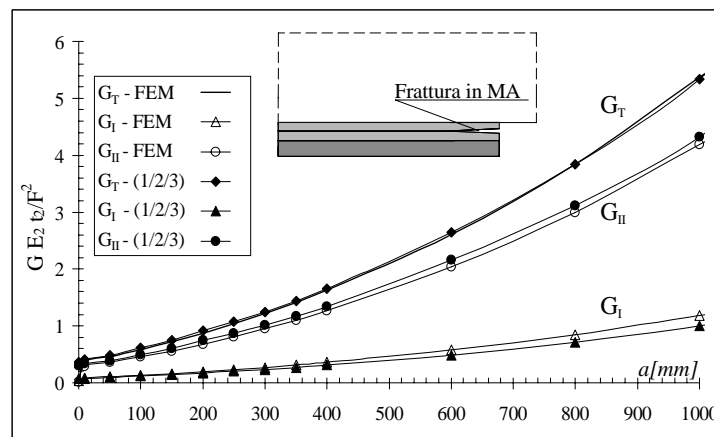


Fig. 7. Energia di rilascio per diverse lunghezze della delaminazione nell'interfaccia MA.

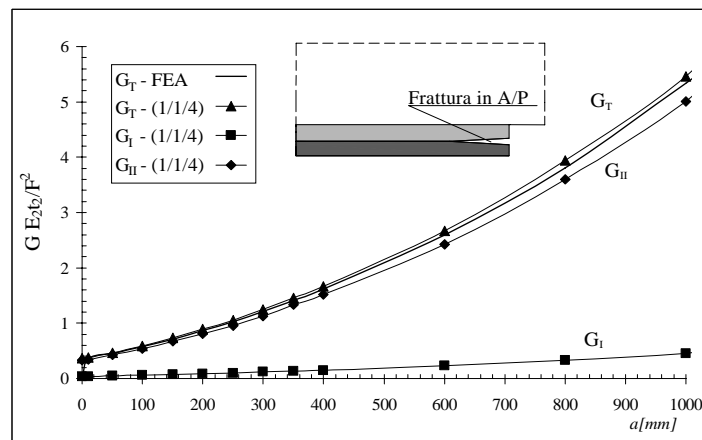


Fig. 8. Energia di rilascio per diverse lunghezze della delaminazione nell'interfaccia A/P.

#### 4. CONCLUSIONI

Modellando un sistema strutturale rinforzato mediante un assemblaggio di strati matematici deformabili a taglio, è stato proposto un modello meccanico in grado di analizzare i problemi di debonding in travi rinforzate mediante l'applicazione di piastre in composito.

L'uso di soli due strati matematici per la modellazione della trave rinforzata consente un'efficace valutazione dell'energia di rilascio totale (ERR), mentre, al fine di valutare in maniera accurata la partizione modale dell'energia di rilascio, risulta necessario l'arricchimento del modello mediante un numero di strati matematici superiori all'unità per ciascuno strato fisico del modello. Nelle applicazioni numeriche sono state valutate le componenti dell'energia di rilascio associate ai modi I e II della frattura, adottando uno schema di interfaccia forte. I risultati ottenuti per via numerica, confrontati mediante accurate analisi 2D agli elementi finiti, mostrano la capacità del modello proposto di prevedere in maniera efficace il comportamento del sistema strutturale in presenza di debonding. Le curve rappresentative delle energie di rilascio in funzione della lunghezza del crack mostrano il comportamento fragile ed instabile che caratterizza la crescita della delaminazione. Le analisi possono essere raffinate mediante l'infittimento del numero di layer matematici all'interno di ciascun layer fisico. Contrariamente alle modellazioni agli elementi finiti (FE), caratterizzate dalle notevoli complessità legate alla richiesta di un' accurata mesh al fine di cogliere le singolarità nelle tensioni di estremità, l'approccio numerico proposto risulta essere computazionalmente più efficace, conservando comunque una soddisfacente accuratezza nei risultati. Inoltre, occorre notare come tale approccio non sia afflitto dai problemi di non-convergenza nel calcolo delle componenti modali dell'energia di rilascio tipici della analisi agli elementi finiti (FE).

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] Meier U. Strengthening of structures using carbon fibre/epoxy composites. *Construct Build Mater* 1995; 9(6):341–51.
- [2] Ramana VPV, Kant T, Morton SE, Dutta PK, Mukherjee A, Desai YM. Behavior of CFRPC strengthened reinforced concrete beams with varying degrees of strengthening. *Composites Part B* 2000; 31:461-470.
- [3] Rabinovitch O, and Frostig Y. Experiments and analytical comparison of RC beams strengthened with CFRP composites. *Composites: Part B* 2003; 34: 663-677.
- [4] Rabinovitch O. Fracture-mechanics failure criteria for RC beams strengthened with FRP strips-a simplified approach. *Composite Structures* 2004; 64: 479-492.
- [5] Ziraba YN, Baluch MH, Basunbul IA, Sharif AM, Azad AK, Al-Sulaimani GJ. Guidelines toward the design of reinforced concrete beams with external plates. *ACI Struct* 1994;91(6):639 –46.
- [6] Smith ST, Teng JG. Interfacial stresses in plated beams. *Eng Struct* 2001;23(7):857 –71.
- [7] Greco F., Nevone Blasi P., Lonetti P. An analytical investigation of debonding problems in beams strengthened using composite plates. Submitted to *Engineering Fracture Mechanics*.
- [8] Theng J.G., Zhang J.W., Smith S.T., 2002. Interfacial stress in reinforced concrete beams bonded with a soffit plate: a finite element study. *Construction and Building Materials* 16, 1-14.
- [9] Bruno, D., Greco, F., Lonetti, P., 2003. A coupled interface-multilayer approach for mixed mode delamination and contact analysis in laminated composites. *Int. J. Solids Structures* 40, 7245–7268.
- [10] Raju, I.S., Crews Jr., J.H., Aminpour, M.A., 1988. Convergence of strain energy release rate components for edge-delaminated composite
- [11] Hutchinson, J.W. and Suo, Z., 1992. Mixed mode cracking in layered materials. In *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 28, Academic Press, New York.
- [12] Akinanya A.R., Fleck N.A., 1997. Interfacial cracking from the free-edge of a long bi-material strip. *Int. J. Solids Structures* Vol. 34, No. 11, pp. 1645-1665.