

Analisi teorica di una fessura sub-superficiale in un semipiano soggetto a carico superficiale ciclico

M. Beghini^a, L. Bertini^a, V. Fontanari^b

^aDip. di Ingegneria Meccanica, Nucleare e Produzione – Università di Pisa – via
Diotisalvi 2 – 56126 Pisa e-mail: Beghini@ing.unipi.it , Bertini@ing.unipi.it

^bDip. di Ingegneria dei Materiali e delle Tecnologie industriali - Università di Trento –
via Mesiano 77 - 38050 Trento e-mail: vigilio.fontanari@ing.unitn.it

SOMMARIO

In questo lavoro viene presentato un metodo di calcolo dei parametri di meccanica della frattura per una fessura sub-superficiale parallela alla superficie esterna di un semipiano. Allo scopo è stata formulata una Funzione Peso (FP) avente una struttura a matrice per tener conto degli effetti di accoppiamento dovuti alla mancanza di simmetria del problema. L'accuratezza delle FP è stata stimata mediante confronto con analisi numeriche ad elementi finiti. Successivamente è stato affrontato lo studio di un caso pratico, che consiste nella determinazione dei Fattori di Intensità degli Sforzi (FIS) prodotti da un carico puntuale in moto sulla superficie libera del semipiano. L'analisi completa di questo problema richiede di considerare anche i fenomeni di chiusura (parziale o completa) della fessura. Infatti al variare della posizione della forza e della sua inclinazione rispetto alla superficie possono essere generate differenti condizioni di chiusura. Per affrontare questo problema è stato sviluppato un metodo che, partendo dalla formulazione matriciale della FP, permette di determinare la Green Function (GF) per il calcolo delle componenti di COD, per fessure subsuperficiali soggette a condizioni di carico del tutto generali, includendo quindi anche le condizioni di chiusura della fessura.

ABSTRACT

A general method for evaluating the fracture mechanics parameters of a subsurface crack parallel to the free surface of a semiplane is presented. A Weight Function (WF) with a matrix like structure is proposed to account for the coupling effects arising in non-symmetrical problems. An estimate of the WF accuracy is presented and a practical application is considered by evaluating the Stress Intensity Factors produced by a point like load travelling on the semiplane free surface. The complete analysis of this problem requires crack closure (either complete or partial) to be taken into account. Indeed different closure conditions are expected for different load positions or inclination. A theoretical method is proposed, that, starting from the matrix like structure of the WF, allows for the calculation of the Green Functions, by which the COD components of a subsurface crack s can be calculated under general loading conditions including those produced by crack closure.

1. INTRODUZIONE

In molti componenti meccanici soggetti a condizioni di carico ciclico si osservano sperimentalmente fessure subsuperficiali, che, nelle fasi iniziali, si accrescono parallelamente alla superficie esterna in condizioni di modo misto di frattura e sono responsabili dell'innescio del danneggiamento per numerosi cedimenti per fatica superficiale, che si manifestano sotto forma di vaiolatura della superficie interessata [1-3]. Questa tipologia di danno è stata studiata da numerosi autori con un approccio basato sui principi di meccanica della frattura e numerose analisi sono state condotte per

determinare i parametri di meccanica della frattura che caratterizzano queste fessure. Il metodo degli elementi finiti (EF) è stato usato in modo estensivo per determinare i Fattori di Intensità degli Sforzi (FIS) in condizioni di carico complesso e per predire il percorso preferenziale di frattura. [4-6]. Purtroppo le analisi EF, benché molto potenti, sono molto onerose dal punto di vista computazionale in special modo quando si deve determinare la propagazione della fessura e devono essere quindi condotte numerose valutazioni dei FIS per condizioni di carico variabile spesso in modo complesso. Il metodo delle Funzioni Peso (FP) si presta ad essere uno strumento molto potente per affrontare questo tipo di analisi. Gli autori [7-8] hanno recentemente presentato una FP per una fessura sub-superficiale parallela alla superficie esterna di un semipiano. La FP è stata formulata con una struttura matriciale per tener conto degli effetti di accoppiamento dovuti alla mancanza di simmetria del problema, inoltre, come usuale per fessure a due apici, l'espressione analitica è stata suddivisa in una parte simmetrica ed una parte emi-simmetrica in modo da rendere più immediato il calcolo dei parametri di meccanica della frattura in condizioni di carico del tutto generali. In questo lavoro viene presentata una nuova versione della FP, avente una formulazione tale da poter studiare una intervallo più esteso di variazione dei parametri geometrici che controllano il problema ed in particolare del rapporto tra la lunghezza della fessura e la sua distanza dalla superficie esterna. La FP così proposta viene quindi adottata per studiare i cicli di variazione dei FIS ai due apici a seguito del passaggio sulla superficie libera di un carico puntuale. L'analisi è stata condotta per differenti valori del rapporto tra lunghezza della fessura e sua distanza dalla superficie libera e per differenti inclinazioni della forza in movimento rispetto alla superficie, in modo da poter simulare l'effetto di differenti condizioni di attrito. Poiché l'analisi completa di questo problema richiede di tener conto anche delle condizioni di parziale o completa chiusura della fessura, in dipendenza dalla posizione del carico rispetto alla fessura stessa e dalla sua inclinazione rispetto alla superficie, è stato sviluppato un metodo teorico che, partendo dalla FP espressa in forma matriciale, permette di determinare la Green Function (GF), attraverso la quale si possono calcolare le componenti del COD per condizioni di carico del tutto generali, includendo anche le condizioni di chiusura della fessura.

2. DEFINIZIONE DEL PROBLEMA

La geometria considerata è descritta in figura 1 ove è rappresentata una fessura di lunghezza $2a$ parallela alla superficie di un semipiano, posizionata ad una distanza b dalla superficie esterna. Come descritto in [7-8], per poter avere ai due apici una definizione non ambigua dei parametri di meccanica della frattura, con particolare riferimento al segno di K_{II} per il quale una definizione generale non è disponibile, sono stati introdotti due sistemi di riferimento locali che condividono l'asse y (asse di simmetria) ed hanno assi x di verso opposto.

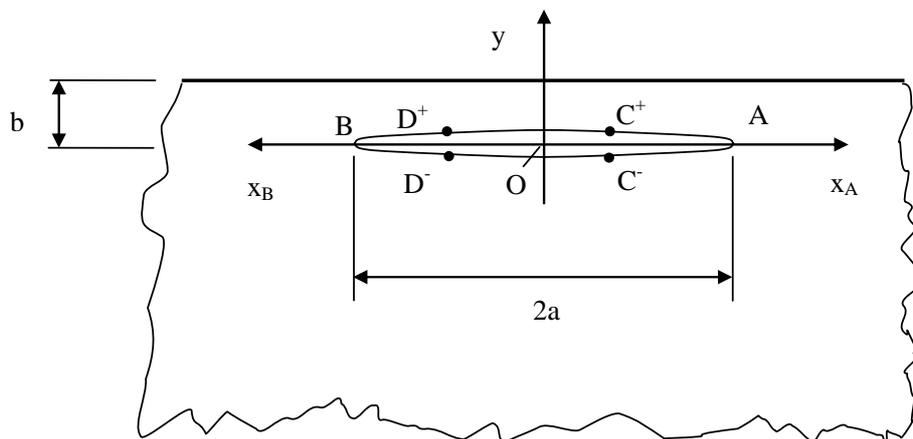


Fig.1 Fessura sub-superficiale parallela alla superficie del semipiano

Il rapporto adimensionale $r = a/b$ può essere assunto come unico parametro necessario per definire la geometria. Considerando che per tener conto della mancanza di simmetria del problema è necessario che la FP abbia una struttura matriciale, è stata adottata la seguente espressione, nella quale per gli apici A e B il contributo emi-simmetrico deve essere rispettivamente sommato (+) o sottratto (-) al contributo simmetrico.

$$\begin{pmatrix} K_I(r) \\ K_{II}(r) \end{pmatrix}^{A/B} = \int_0^a \left[\begin{pmatrix} h^{I\sigma}_S(x,r) & h^{I\tau}_S(x,r) \\ h^{II\sigma}_S(x,r) & h^{II\tau}_S(x,r) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma(x) \\ \tau(x) \end{pmatrix}_S \pm \begin{pmatrix} h^{I\sigma}_E(x,r) & h^{I\tau}_E(x,r) \\ h^{II\sigma}_E(x,r) & h^{II\tau}_E(x,r) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma(x) \\ \tau(x) \end{pmatrix}_E \right] \cdot dx \quad (1)$$

L'espressione analitica della FP è stata definita in modo da soddisfare le proprietà asintotiche (sia per $r \rightarrow 0$ che per $x \rightarrow a$). In particolare, quando il rapporto r tende a zero, la fessura può essere assimilata ad una fessura di Griffith in un corpo infinito, per la quale sono da considerare le seguenti equazioni disaccoppiate:

$$\begin{aligned} r \rightarrow 0 \quad h^{I\sigma}_S(x,r) &= h^{II\tau}_E(x,r) = \frac{2}{\sqrt{\pi \cdot a}} \cdot \left(1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right)^{-1/2} \\ h^{I\sigma}_E(x,r) &= h^{II\tau}_S(x,r) = \frac{2}{\sqrt{\pi \cdot a}} \cdot \frac{x}{a} \cdot \left(1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right)^{-1/2} \\ h^{II\sigma}_S(x,r) &= h^{I\tau}_S(x,r) = h^{II\sigma}_E(x,r) = h^{I\tau}_E(x,r) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Di conseguenza per risolvere l'equazione integrale (1) per le componenti della FP sono state adottate le relazioni seguenti, nelle quali sono state introdotte le notazioni $M = I$ oppure II (modo di frattura), $\mu = \sigma$ oppure τ (componenti di tensione nominali) e $C=S$ oppure E (simmetrico o emisimmetrico):

$$h_C^{M\mu}(x,r,a) = \frac{2}{\sqrt{\pi \cdot a}} \cdot \sum_{i=0}^n c_C^{M\mu}_i(r) \cdot \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right]^{i-\frac{1}{2}} \quad (3)$$

oppure

$$h_C^{M\mu}(x,r,a) = \frac{2}{\sqrt{\pi \cdot a}} \cdot \frac{x}{a} \cdot \sum_{i=0}^n c_C^{M\mu}_i(r) \cdot \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right]^{i-\frac{1}{2}} \quad (4)$$

L'equazione (3) vale per $h_S^{I\sigma}(x,r,a)$, $h_S^{II\sigma}(x,r,a)$, $h_E^{I\tau}(x,r,a)$ e $h_E^{II\tau}(x,r,a)$, mentre l'eqn. (4) vale per $h_E^{I\sigma}(x,r,a)$, $h_E^{II\sigma}(x,r,a)$, $h_S^{I\tau}(x,r,a)$ e $h_S^{II\tau}(x,r,a)$. Per questa analisi il numero dei termini dell'espansione in serie di potenze è stato limitato a tre, cosicché nelle sommatorie (3) e (4), $n=2$. Inoltre, per soddisfare le condizioni asintotiche, espresse da (2), i coefficienti dei primi termini della FP diagonali e fuori diagonale, corrispondenti a $i=0$, assumono rispettivamente i valori:

$$c_S^{M\mu}_i(r) = c_E^{M\mu}_i(r) = 1 \quad \text{per } i = 0 \text{ e } M\mu = I\sigma \text{ o } II\tau \quad (5a)$$

$$c_S^{M\mu}_i(r) = c_E^{M\mu}_i(r) = 0 \quad \text{per } i = 0 \text{ e } M\mu = II\sigma \text{ o } I\tau \quad (5b)$$

Gli altri coefficienti corrispondenti ad $i > 0$ dipendono dal rapporto r . Per poter rappresentare la dipendenza su un intervallo esteso di r è stata adottata la seguente funzione:

$$c_{(S/E)_i}^{M\mu}(r) = \frac{r^{A_i}}{B_i^{A_i} + r^{A_i}} \cdot C_i \cdot r^{D_i} + E_i \cdot r^{F_i} \quad (6)$$

Le costanti A_i , B_i , C_i , D_i , E_i , F_i sono state determinate mediante regressione ai minimi quadrati dei valori di FIS calcolati per alcune condizioni di carico di riferimento a diversi valori del parametro r . In particolare, come descritto in [8], avendo assunto $n=2$, è stato necessario considerare otto condizioni linearmente indipendenti di tensione nominale applicate alle superfici della fessura. L'insieme dei valori di FIS necessari è stato costruito conducendo una serie di analisi EF, facendo variare il parametro r entro un intervallo molto ampio [0.005, 40], in modo da comprendere le due condizioni limite: la fessura di Griffith e la delaminazione estesa immediatamente sotto la superficie. I valori di K_I e K_{II} calcolati con le FP, dopo averne definito i coefficienti, sono stati confrontati con i valori originali ottenuti dall'analisi EF, riscontrando un notevole accordo: la differenza relativa percentuale si è mantenuta entro l'1% per l'intero intervallo di r considerato. Differenze di questo tipo sono interne

all'intervallo di accuratezza ottenibile per i FIS con gli EF, per questo si può considerare l'equazione (6) del tutto adeguata per interpolare i valori dell'analisi EF sull'intero l'intervallo di r.

3. ANALISI DEL PROBLEMA DI UNA FORZA IN MOTO SULLA SUPERFICIE

In figura 2 è riportato lo schema di analisi considerato, consistente di un semipiano recante una fessura subsuperficiale, caricato da una forza uniformemente distribuita sullo spessore ed avente intensità P (forza per unità di spessore).

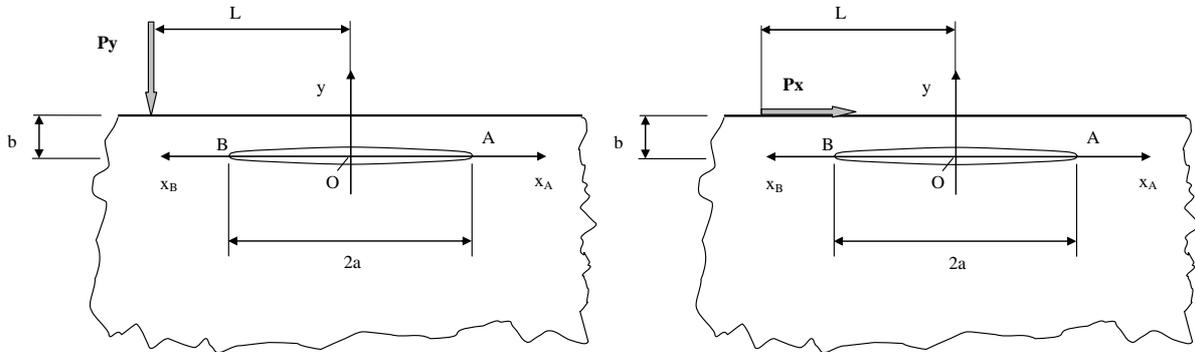


Fig. 2: carico puntuale in moto sulla superficie del semipiano

Per riprodurre la condizione di forza in movimento, le componenti normale (P_y) e tangenziale (P_x) della forza sono state applicate ad una distanza parametrica L dal centro della fessura. Sono state trascurate le azioni inerziali. Il materiale è stato considerato a comportamento elastico lineare e non si è considerata la possibilità che vi sia contatto tra le superfici della fessura. Questa assunzione comporta il fatto che possa avvenire compenetrazione di materiale benché priva di un significato fisico.

Le condizioni di tensione nominale, da usare nell'eqn. (1), prodotte dalle forze P_y o P_x nel corpo non fessurato, sono state desunte dall'analisi teorica di Boussinesq [9] e suddivise in una componente simmetrica ed una emisimmetrica. Risolvendo l'equazione integrale in (1) sono stati calcolati i valori di K_I e K_{II} per diversi valori di r e per diverse posizioni del carico, definite da L/a. Due esempi degli andamenti ottenuti sono riportati nelle figure 3 e 4 e confrontati con i risultati dell'analisi EF del problema. In questo caso è stato adottato il valore caratteristico del FIS: $K_o = P \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a}}$, per normalizzare i

risultati numerici. E' stato ottenuto un accordo molto buono tra i risultati degli EF e quelli della FP, infatti la differenza relativa è contenuta entro l'1%.

Per quanto riguarda il carico normale alla superficie, diretto verso l'interno del semipiano, si producono storie di FIS con K_I sempre negativo (fig. 3). Per questa condizione è quindi ragionevole supporre una completa chiusura della fessura, la quale va soggetta quindi solo ad un ciclo alternato di K_{II} . Al contrario, per carichi tangenziali alla superficie libera si producono storie di K_I e K_{II} molto complesse (fig.4) e si devono attendere condizioni di parziale o completa chiusura della fessura.

Il problema di una forza in moto, genericamente inclinata rispetto alla superficie può infine essere studiato, se si trascurano le condizioni di contatto tra le face della fessura, come sovrapposizione dei due casi di forza normale e di forza tangenziale. Questa analisi è tuttavia consistente dal punto di vista fisico solo se la fessura si mantiene sempre completamente aperta durante il passaggio della forza. Nel caso di parziale chiusura della fessura il problema della valutazione dei FIS diviene non lineare in quanto le condizioni al contorno sono incognite a priori e dipendono dal carico applicato. Infatti è necessario conoscere l'estensione della porzione di fessura chiusa per poter valutare gli sforzi di contatto scambiati tra le due facce. Note le azioni di contatto è possibile, utilizzando il metodo delle FP, valutare i valori effettivi dei FIS, sovrapponendo il contributo delle azioni di contatto a quello delle condizioni di carico esterno. Il problema può essere affrontato in modo molto efficiente se è disponibile una formulazione analitica della Green Function (GF), tramite la quale si possono calcolare i componenti del COD per qualsiasi condizione di carico.

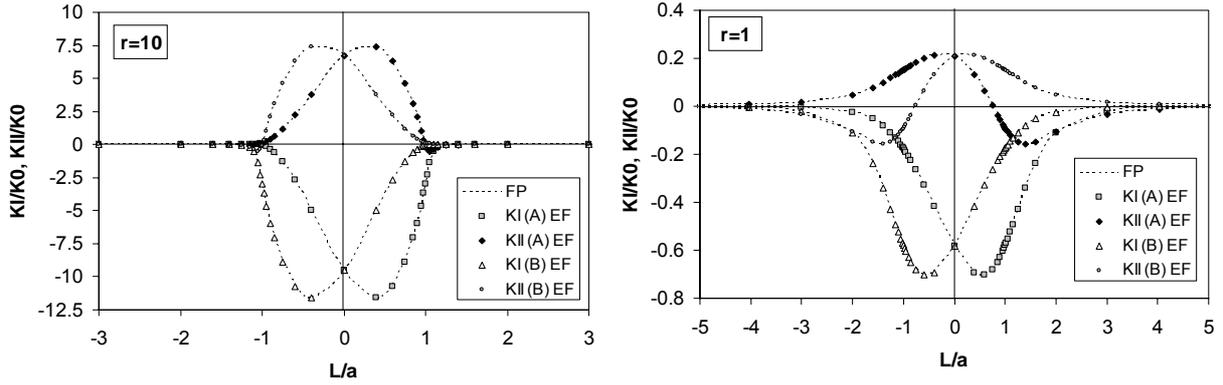


Fig. 3 FIS prodotto dalla forza normale (compressiva) P_y in moto sulla superficie per due valori del rapporto r

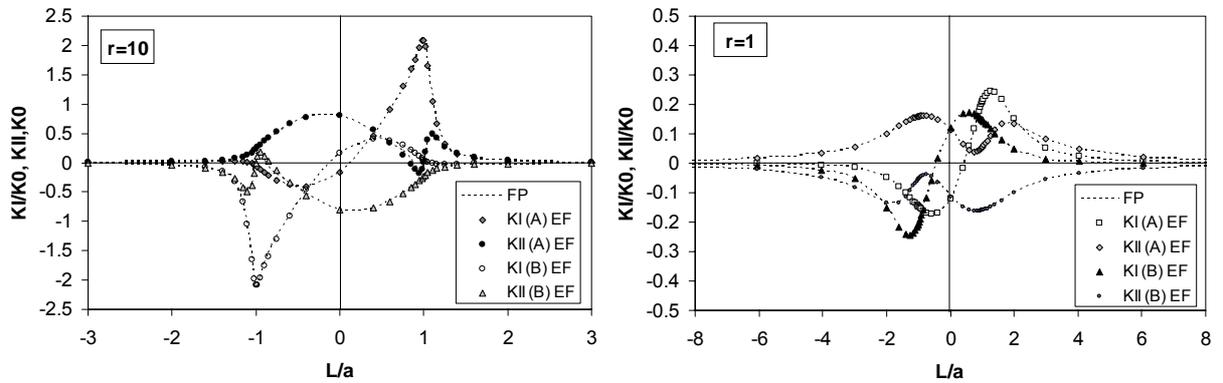


Fig. 4 FIS prodotto dalla forza tangenziale P_x in moto sulla superficie per due valori del rapporto r

4. VALUTAZIONE DELLA GREEN'S FUNCTION PER IL COD

In base alla definizione della FP, le componenti di COD u e v , indicanti gli spostamenti relativi nelle direzioni x ed y , di punti corrispondenti sulle superfici di frattura affacciate (es. i punti C^+, C^- e D^+, D^- in figura 1), possono essere calcolate per condizioni di carico simmetrico ed emi-simmetrico usando rispettivamente le componenti simmetrica ed emi-simmetrica della FP. Qualsiasi condizione di carico può essere suddivisa in una parte simmetrica ed una parte emi-simmetrica, così che i corrispondenti valori di COD si possono ottenere sommando i COD prodotti dalle due condizioni di carico. Generalizzando la formulazione riportata in [10] si ottengono le seguenti equazioni:

$$v^{A/B}(x, a, r) = \frac{2}{H} \int_x^a [h_{I\sigma S}(x, b, r) \cdot K_{IS}(b, r) + h_{II\sigma S}(x, b, r) \cdot K_{IIS}(b, r)] db \quad (7a)$$

$$\pm \frac{2}{H} \int_x^a [h_{I\sigma E}(x, b, r) \cdot K_{IE}(b, r) + h_{II\sigma E}(x, b, r) \cdot K_{IIE}(b, r)] db$$

$$u^{A/B}(x, a, r) = \frac{2}{H} \int_x^a [h_{I\tau S}(x, b, r) \cdot K_{IS}(b, r) + h_{II\tau S}(x, b, r) \cdot K_{IIS}(b, r)] db \quad (7a)$$

$$\pm \frac{2}{H} \int_x^a [h_{I\tau E}(x, b, r) \cdot K_{IE}(b, r) + h_{II\tau E}(x, b, r) \cdot K_{IIE}(b, r)] db$$

nelle quali, come per l' eqn. (1), A/B rappresentano gli apici destro e sinistro, H è uguale ad E (Modulo di Young) per condizioni di sforzo piano ed $E/(1-\nu^2)$ per condizioni di deformazione piana (ν è il rapporto di Poisson). I valori (K_{IS}, K_{IIS}) e (K_{IE}, K_{IIE}) sono prodotti rispettivamente dai casi di carico simmetrico ed emi-simmetrico e, ricordando l'eqn. (1), possono essere valutati come segue:

$$\begin{pmatrix} K_{IS}(b,r) \\ K_{HS}(b,r) \end{pmatrix}^{A/B} = \int_0^b \begin{bmatrix} h^{I\sigma}_S(x',r) & h^{I\tau}_S(x',r) \\ h^{II\sigma}_S(x',r) & h^{II\tau}_S(x',r) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma(x') \\ \tau(x') \end{pmatrix}_S \cdot dx' \quad (8a)$$

$$\begin{pmatrix} K_{IE}(b,r) \\ K_{HE}(b,r) \end{pmatrix}^{A/B} = \int_0^b \begin{bmatrix} h^{I\sigma}_E(x',r) & h^{I\tau}_E(x',r) \\ h^{II\sigma}_E(x',r) & h^{II\tau}_E(x',r) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma(x') \\ \tau(x') \end{pmatrix}_E \cdot dx' \quad (8b)$$

La FP può essere rappresentata con una notazione matriciale::

$$[W(x,b,r)]_{S/E} = \begin{bmatrix} h_{I\sigma}(x,b,r) & h_{I\tau}(x,b,r) \\ h_{II\sigma}(x,b,r) & h_{II\tau}(x,b,r) \end{bmatrix}_{S/E} \quad (9)$$

Dopo aver introdotto le espressioni delle equazioni (8) nelle equazioni (7), ed aver cambiato l'ordine di integrazione [10], si ottiene la seguente espressione:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v(x,a) \\ u(x,a) \end{bmatrix}^{A/B} &= \frac{2}{H} \cdot \int_0^a \left[\int_{\max(x,x')}^a [W(x,b,r)]_S^T \cdot [W(x',b,r)]_S db \right] \cdot \begin{pmatrix} \sigma(x') \\ \tau(x') \end{pmatrix}_S \cdot dx' \\ &\pm \frac{2}{H} \cdot \int_0^a \left[\int_{\max(x,x')}^a [W(x,b,r)]_E^T \cdot [W(x',b,r)]_E db \right] \cdot \begin{pmatrix} \sigma(x') \\ \tau(x') \end{pmatrix}_E \cdot dx' \end{aligned} \quad (10)$$

Dove la notazione $[]^T$ rappresenta la matrice trasposta. Introducendo la seguenti matrici 2x2:

$$G(x,x',r)_S = \begin{bmatrix} G_{v\sigma}(x,x',r) & G_{v\tau}(x,x',r) \\ G_{u\sigma}(x,x',r) & G_{u\tau}(x,x',r) \end{bmatrix}_S = \int_{\max(x,x')}^a [W(x,b,r)]_S^T \cdot [W(x',b,r)]_S db \quad (11a)$$

$$G(x,x',r)_E = \begin{bmatrix} G_{v\sigma}(x,x',r) & G_{v\tau}(x,x',r) \\ G_{u\sigma}(x,x',r) & G_{u\tau}(x,x',r) \end{bmatrix}_E = \int_{\max(x,x')}^a [W(x,b,r)]_E^T \cdot [W(x',b,r)]_E db \quad (11b)$$

L'equazione (10) può essere riscritta come:

$$\begin{bmatrix} v(x,a,r) \\ u(x,a,r) \end{bmatrix}^{A/B} = \frac{2}{H} \cdot \left\{ \int_0^a [G(x,x',r)]_S \cdot \begin{pmatrix} \sigma(x') \\ \tau(x') \end{pmatrix}_S dx' \pm \int_0^a [G(x,x',r)]_E \cdot \begin{pmatrix} \sigma(x') \\ \tau(x') \end{pmatrix}_E dx' \right\} \quad (12)$$

Dimostrando che $[G(x,x',r)]$ rappresenta la Green's Function (GF) in quanto correla il generico carico applicato alle facce della fessura con lo spostamento relativo delle stesse (COD). Se si considera la espansione in serie di potenze troncata proposta per la FP (eqn. 3-4) e si tiene conto della combinazione tra i differenti termini della FP nel prodotto matriciale delle equazioni (11), si può osservare che la GF si può calcolare risolvendo $3(n+1)^2$ integrali di una variabile. Avendo assunto $n=2$ per l'espressione della FP, il numero totale di integrali è 27. Tuttavia, in considerazione del fatto che per la proprietà asintotiche della FP, alcuni dei suoi coefficienti sono nulli, il numero di integrali da calcolare si riduce da 27 a 22. In particolare, si possono individuare tre classi di integrali da valutare al variare dell'indice i:

$$I_{1\ kj}(x,x') = \int_{\max(x,x')}^a \frac{1}{b} \cdot \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{\binom{i-1}{2}} \cdot \left(1 - \frac{x'}{b}\right)^{\binom{j-1}{2}} db \quad k, j, = 0, n \quad (13a)$$

$$I_{2kj}(x, x') = \int_{\max(x, x')}^a \frac{1}{b^2} \cdot \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{\binom{k-1}{2}} \cdot \left(1 - \frac{x'}{b}\right)^{\binom{j-1}{2}} db \quad k, j, = 1, n \quad (13b)$$

$$I_{3kj}(x, x') = \int_{\max(x, x')}^a \frac{1}{b^3} \cdot \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{\binom{k-1}{2}} \cdot \left(1 - \frac{x'}{b}\right)^{\binom{j-1}{2}} db \quad k, j, = 0, n \quad (13c)$$

Gli integrali di tipo I_1 ed I_3 sono stati risolti analiticamente adottando una strategia di tipo ricorsivo, mentre gli integrali di tipo I_2 possono essere ridotti alla soluzione di integrali ellittici. Disponendo di una espressione analitica per le GF, è possibile determinare le componenti di COD per qualsiasi posizione della fessura e per qualsiasi condizione di carico utilizzando la eqn. (12) una volta determinate le componenti di sforzo nominale $\sigma(x)$ e $\tau(x)$ risolte sul segmento BA rappresentativo della fessura. Pertanto si può affrontare in modo efficiente anche il problema della chiusura della fessura usando la procedura riportata in [11] valida per problemi non simmetrici in quanto tiene conto degli effetti di accoppiamento attivi tra sforzo normale e spostamento tangenziale e tra sforzo tangenziale e spostamento normale. Un esempio dell'andamento della componente v del COD, generata da una forza P inclinata di 45° rispetto alla superficie e rivolta verso l'interno del semipiano, è descritto in figura 5 in cui sono riportati sia risultati ottenuti mediante applicazione della GF proposta, sia quelli ottenuti dalla corrispondente modellazione ad EF.

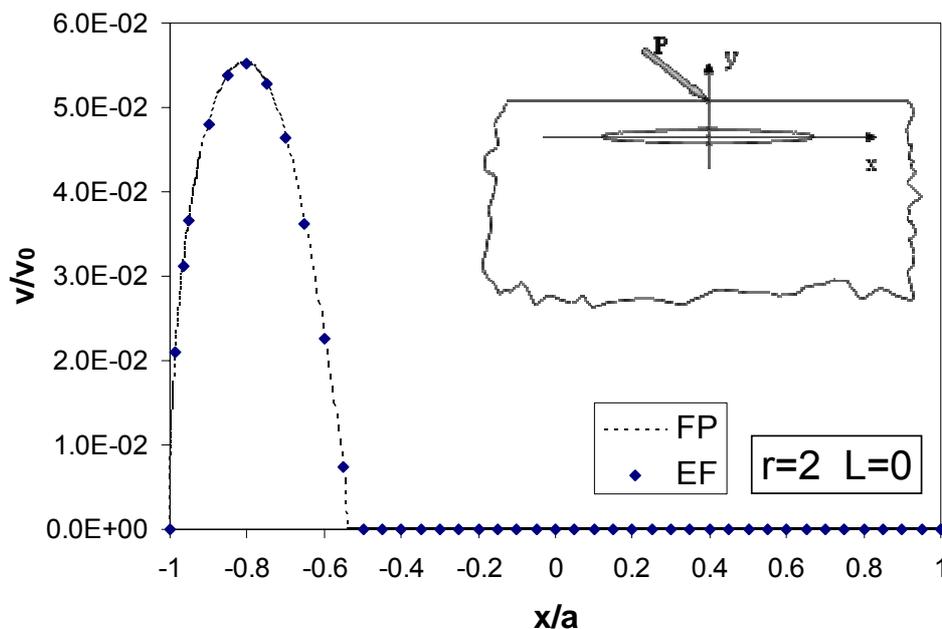


Fig. 5: componenti v del COD calcolate con la GF proposta e con una analisi EF. I valori di v sono normalizzati mediante il parametro caratteristico $v_0 = a \sigma_0 / E$ ($\sigma_0 = 2P / \pi a$)

5. CONCLUSIONI

E' stata proposta una funzione peso avente struttura matriciale per una fessura subsuperficiale parallela alla superficie di un semipiano. I coefficienti numerici della funzione peso sono stati determinati utilizzando l'insieme dei valori di K_I e K_{II} generati da analisi ad elementi finiti, condotte per un certo numero di condizioni di carico indipendenti al variare dei parametri geometrici descrittivi del problema. La funzione peso così ottenuta ha dimostrato di riprodurre con buona accuratezza i risultati della analisi ad elementi finiti.

La funzione peso è stata utilizzata quindi per studiare il caso pratico di una forza genericamente inclinata in moto sulla superficie di un semipiano recante una fessura subsuperficiale. Le condizioni di parziale chiusura della fessura non sono state inizialmente prese in considerazione. Sotto questa ipotesi i valori di K_I e K_{II} calcolati dalla funzione peso sono in ottimo accordo con quelli delle analisi ad

elementi finiti, configurando una verifica indipendente della correttezza e dell'utilizzabilità della funzione peso. Successivamente è stata proposta una analisi teorica per tener conto degli effetti sui valori dei fattori di intensità degli sforzi, dovuti ai fenomeni di contatto tra le superfici della fessura nel caso di parziale chiusura. Partendo dalla struttura matriciale della funzione peso e considerando la definizione teorica del COD è stata ricavata una formulazione della Green's Function per il COD espressa sotto forma di integrali simbolici.

BIBLIOGRAFIA

1. Glodez S.; Ren Z.; Flaker J.: 'Surface fatigue of gear teeth flanks' *Computers and Structures*, vol. 73, no. 1, pp. 475-483, 1999
2. Ringsberg J.W.: 'Life prediction of rolling contact fatigue crack initiation' *International Journal of Fatigue*, vol. 23, no. 7, pp. 575-586, 2001
3. Lukas P., Kunz L.: 'Specific features of high-cycle and ultra-high-cycle fatigue' *Fatigue Fract Engng Mater & Struc*, vol. 25, no. 8-9, pp. 747-753, 2002
4. Yang F., Qian C., Li J.C.M.: 'Finite element analysis of a subsurface crack' *International Journal of fracture*, 77, pp. 337-350, 1996
5. Kudish I.I., Burris K.W., : 'Modeling of surface and subsurface crack behaviour under contact load in the presence of lubricant', *International Journal of fracture*, vol. 125, pp.125-147, 2004
6. Komvopoulos K., Cho S.-S.: 'Finite element analysis of subsurface crack propagation in a half-space due to a moving asperity contact' *Wear*, vol. 209, pp. 57-68, 1997
7. Beghini M., Bertini L. , Fontanari V.: 'Stress intensity factors for a Subsurface crack in a two dimensional half-space', Proceedings of IGF 2004, XVII Congress of the Italian Group of Fracture, 15-18 June 2004, Bologna (Italy) (on CD-Rom)
8. Beghini M., Bertini L. , Fontanari V.: 'A general Weight Function for a subsurface crack in a two dimensional half-space' Proceedings of ICF11 –International Congress of Fracture, Turin (Italy) 20-25 March 2005 (on CD-ROM)
9. Timoshenko S.P., Goodier J.N. : *Theory of elasticity* Mc Graw-Hill, 1970
10. Beghini M., Bertini L., Fontanari V.: 'Weight function for an inclined edge crack in a semiplane', *International Journal of fracture*, 99, 281-292, 1999
11. Beghini M., Bertini L. , Fontanari V.: 'A weight function technique for partially closed inclined edge crack analysis' *International Journal of Fracture*, 112, pp. 57-68, 2001