

ANALISI DI SISTEMI BIMATERIALE IN PRESENZA DI DIFETTI ALL'INTERFACCIA MEDIANTE ELEMENTI FINITI IBRIDI

M. Alfano, F. Furgiuele, A. Leonardi, C. Maletta

Dipartimento di Meccanica, Università della Calabria, Via Ponte P. Bucci 44c - 87030 Arcavacata di Rende (CS), e-mail: alfano@unical.it, furgiuele@unical.it, leonardi@unical.it, carmine.maletta@unical.it

SOMMARIO

Nel presente lavoro, viene proposto un approccio agli elementi finiti ibridi per l'analisi di sistemi bimatériauale in presenza di difetti all'interfaccia. In generale, valori accurati del fattore di intensificazione delle tensioni complesso (SIF) possono essere ottenuti mediante il tradizionale metodo degli elementi finiti. Tuttavia, ciò comporta l'utilizzo di maglie di elementi estremamente fitte con un conseguente elevato onere computazionale. L'approccio proposto in questo lavoro consiste nell'utilizzare una procedura di calcolo basato su elementi finiti ibridi per l'analisi piana di sistemi bimatériauale.

ABSTRACT

In the present work, a hybrid finite element approach to analyze a bimatériau system, with a crack lying at the interface, is proposed. Unfortunately, the traditional finite element method needs a fine mesh to obtain accurate values of the Complex Stress Intensity Factor (Complex SIF) and consequently a great computational effort is required. The proposed approach is based on a hybrid finite element formulation to analyze bidimensional bimatériau systems.

1. INTRODUZIONE

Molte applicazioni in campo ingegneristico prevedono la giunzione tra due o più materiali che presentano proprietà differenti. Ad esempio nelle moderne industrie automobilistiche ed aerospaziali molto spesso la realizzazione di sistemi complessi prevede che siano unite tra loro parti metalliche e ceramiche. Questi componenti sono soggetti in condizioni di esercizio a sollecitazioni termomeccaniche che, unitamente alla brusca variazione delle proprietà elastiche, causano un elevato gradiente di tensione in corrispondenza dell'interfaccia. In casi estremi queste sollecitazioni possono condurre al collasso del componente a seguito della formazione e della crescita di difetti [1]. Per tale motivo l'analisi dello stato tensionale e del campo di spostamenti di componenti bimatériauale in presenza di difetti all'interfaccia diventa cruciale durante la fase di progettazione. In queste condizioni il campo di tensioni è definito dal fattore di intensificazione delle tensioni complesso, del quale è necessario identificare modulo e fase. Il tipo di analisi più diffuso in questi casi per identificare il fattore di intensificazione delle tensioni complesso è il tradizionale metodo degli elementi finiti; tuttavia, pur essendo in grado di fornire buoni risultati, richiede la generazione di maglie molto fitte per la modellazione dell'apice del difetto, con conseguente crescita dell'onere computazionale. Il metodo proposto nel presente lavoro consiste nella discretizzazione di una struttura piana bimatériauale mediante elementi poligonali, con un numero generico di lati, la cui formulazione è basata sul funzionale ibrido di Hellinger-Reissner.

La validazione del programma è stata eseguita confrontando i risultati con quelli ottenuti con un codice commerciale agli elementi finiti e, ove possibile, con alcuni risultati analitici disponibili in letteratura [2].

2. FORMULAZIONE DELL'ELEMENTO

La formulazione dell'elemento bimateriale con difetto all'interfaccia è basata, come per l'elemento omogeneo con difetto laterale, sul funzionale ibrido di Hellinger-Reissner [3]. Con riferimento alla Fig. 1 il funzionale di Hellinger-Reissner, Π_H , di un sistema bimateriale assume, in assenza di forze di volume ($\sigma_{ij,j}=0$), la forma seguente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi_H = \sum_{m=1}^2 \pi_m \\ \pi_m = \frac{1}{2} \int_{A_m} [\sigma_{ij}(u_{i,j} + u_{j,i}) - S_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl}] dA + \int_{\delta A_m} (\tilde{u}_i - u_i) T_i ds - \int_{(S_\sigma)_m} \tilde{u}_i \bar{T}_i dS \end{array} \right. \quad (1)$$

dove m indica i sottodomini relativi ai due materiali, π_m è il funzionale dell' m -esimo sottodominio, A_m è l'area, δA_m il contorno di A_m , $(S_\sigma)_m$ è il tratto del contorno esterno lungo il quale agiscono le trazioni \bar{T}_i assegnate, σ_{ij} ed u_i sono le tensioni e gli spostamenti nel dominio A_m , S_{ijkl} è la matrice di flessibilità, \tilde{u}_i è il campo di spostamenti assegnato lungo il contorno δA_m . Le componenti delle trazioni T_i sono espresse dalla seguente relazione:

$$\{T\} = [n]\{\sigma\}$$

dove $[n]$ è la matrice dei versori normali uscenti dal contorno δA_m .

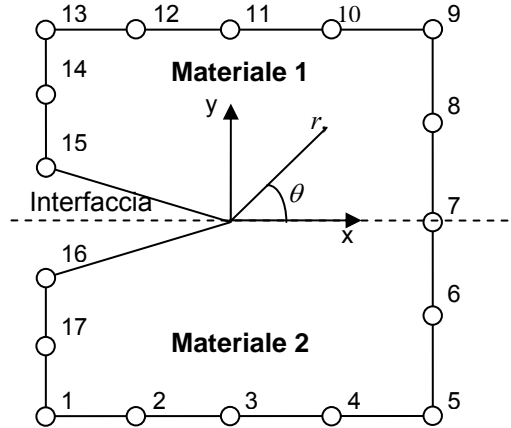


Fig. 1 Elemento finito ibrido contenente un difetto all'interfaccia

Se il campo di tensione $\{\sigma\}$ è equilibrato ed il campo di spostamento $\{u\}$ è congruente nell'elemento, applicando il teorema di Green, l'eq. (1) assume la forma seguente:

$$\pi_m(\sigma_{ij}, u_i, \tilde{u}_i) = \int_{\delta A_m} (\tilde{u}_i - u_i) T_i ds + \frac{1}{2} \int_{A_m} \sigma_{ij} \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) dA \quad (2)$$

Un campo di tensione e spostamento che soddisfa le condizioni precedenti può essere espresso in funzione della variabile complessa z ($z = x + iy$), dipendente dalle coordinate x e y del punto all'interno del dominio A_m , secondo la soluzione analitica riportata in [4]:

$$\{\sigma\}^{(m)} = [P]^{(m)} \{\beta\} \quad (3)$$

$$\{u\}^{(m)} = [U]^{(m)} \{\beta\} \quad (4)$$

$$\{\tilde{u}\} = [L]\{q\} \quad (5)$$

dove le matrici $[P]$ ed $[U]$ permettono di definire il campo di tensione e spostamento nell'elemento mediante il vettore termini incogniti $\{\beta\}$, mentre $[L]$ è la matrice delle funzioni di forma che permette di correlare gli spostamenti sul contorno $\{\tilde{u}\}$ a quelli nodali $\{q\}$.

Per la costruzione delle matrici $[P]$ ed $[U]$ viene utilizzata la soluzione analitica riportata in [4, 5]:

$$\begin{aligned}\sigma_x + i\sigma_{xy} &= \phi'(z) + \overline{\phi'(z)} - z\overline{\phi''(z)} - \overline{\psi'(z)} \\ \sigma_y - i\sigma_{xy} &= \phi'(z) + \overline{\phi'(z)} + z\overline{\phi''(z)} + \overline{\psi'(z)} \\ 2\mu(u_x + iu_y) &= \kappa\phi(z) - \overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)}\end{aligned}\quad (6)$$

con $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ nel caso di stato piano di tensione e $\kappa = 3 - 4\nu$ nel caso di stato piano di deformazione. Le funzioni olomorfe $\phi(z)$ e $\psi(z)$ possono essere rappresentate in serie di Laurent nel modo seguente:

$$\phi(z) = \sum_{k=1}^n a_k z^{\lambda_k} \quad \text{e} \quad \psi(z) = \sum_{k=1}^n b_k z^{\lambda_k} \quad (7)$$

dove i coefficienti a_k e b_k sono numeri complessi.

Applicando le (7) separatamente ai due diversi materiali ed imponendo le condizioni al contorno (continuità degli spostamenti e delle trazioni all'interfaccia e trazioni nulle sulle superfici del difetto) si perviene al seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} a_1 - a_2[\beta - \alpha(1 - e^{i2\lambda\theta_2})] + \overline{a_2}\lambda\alpha(1 - e^{i2\theta_2}) = 0 \\ \overline{a_1} + a_2\lambda\alpha(1 - e^{-i2\theta_2}) - \overline{a_2}[\beta - \alpha(1 - e^{-i2\lambda\theta_2})] = 0 \\ a_1(1 - e^{i2\lambda\theta_1}) - a_2(1 - e^{i2\lambda\theta_2}) = 0 \\ \overline{a_1}(1 - e^{-i2\lambda\theta_1}) - \overline{a_2}(1 - e^{-i2\lambda\theta_2}) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

nelle quali sono stati introdotti i cosiddetti "composite parameters" definiti nel modo seguente:

$$\alpha = \frac{\frac{\mu_1}{\gamma_1} - 1}{\gamma_1}, \quad \beta = \frac{\mu_1 \gamma_2}{\mu_2 \gamma_1} \quad (9)$$

dove: $\gamma_m = 1 + \kappa_m$.

Le soluzioni non banali per a_1 , a_2 , $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$ si ottengono imponendo che il determinante associato al sistema di equazioni (8) sia nullo:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -[\beta - \alpha(1 - e^{-i2\lambda\pi})] & 0 & 0 \\ 1 - e^{i2\lambda\pi} & -(1 - e^{-i2\lambda\pi}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -[\beta - \alpha(1 - e^{i2\lambda\pi})] \\ 0 & 0 & 1 - e^{-i2\lambda\pi} & -(1 - e^{i2\lambda\pi}) \end{vmatrix} \quad (10)$$

$$= 2(1 - \cos 2\lambda\pi)[(1 + \alpha)^2 + (\alpha - \beta)^2 + 2(1 + \alpha)(\beta - \alpha)\cos 2\lambda\pi] = 0$$

Le soluzioni dell'equazione caratteristica (10) sono le seguenti:

$$\lambda = n \quad \text{e} \quad \lambda = \lambda_R + i\lambda_J,$$

dove

$$\lambda_R = \frac{2n-1}{2}, \quad \lambda_J = \varepsilon = \pm \frac{1}{2\pi} \cosh^{-1} \left[\frac{(1 + \alpha)^2 + (\alpha - \beta)^2}{2(1 + \alpha)(\beta - \alpha)} \right] = \pm \frac{1}{2\pi} \ln \left[\frac{1 + \alpha}{\beta - \alpha} \right]$$

con n intero positivo.

Le matrici $[U]$ e $[P]$ possono essere ottenute mediante uno sviluppo in serie di Laurent [6], e il vettore $\{\beta\}$ contiene i coefficienti della serie:

$$[P]^{(m)} = \sum_{k=m_l}^{m_u} \begin{bmatrix} P^{(m)}_{11} & P^{(m)}_{12} & P^{(m)}_{13} & P^{(m)}_{14} \\ P^{(m)}_{21} & P^{(m)}_{22} & P^{(m)}_{23} & P^{(m)}_{24} \\ P^{(m)}_{31} & P^{(m)}_{32} & P^{(m)}_{33} & P^{(m)}_{34} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$[U]^{(m)} = \frac{1}{2\mu^{(m)}} \sum_{k=m_l}^{m_u} \begin{bmatrix} U^{(m)}_{11} & U^{(m)}_{12} & U^{(m)}_{13} & U^{(m)}_{14} \\ U^{(m)}_{21} & U^{(m)}_{22} & U^{(m)}_{23} & U^{(m)}_{24} \end{bmatrix} \quad (12)$$

dove m_u ed m_l rappresentano i limiti, superiore ed inferiore, della serie di Laurent, $\mu^{(m)}$ è il modulo di elasticità tangenziale dei due materiali; le funzioni $P_{ij}^{(m)}$ e $U_{ij}^{(m)}$ dipendono dalla variabile complessa z e le relative espressioni sono riportate in Appendice.

Utilizzando la (2) ed il campo di tensione e spostamento riportato rispettivamente nelle equazioni (3) e (4), si perviene al funzionale Π_H :

$$\Pi_H = \frac{1}{2} \{\beta\}^T [H] \{\beta\} - \{\beta\}^T [G] \{q\} \quad (13)$$

dove le matrici $[H]$ e $[G]$ assumono la forma seguente:

$$[H] = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} \int_{\delta A_m} ([R]^{(m)T} [U]^{(m)} + [U]^{(m)T} [R]^{(m)}) ds \quad (14)$$

$$[G] = \sum_{i=1}^2 \int_{\delta A_m} [R]^{(m)T} [L] ds \quad (15)$$

nelle quali $[R]^{(m)}$ è la matrice che interpola le trazioni sul contorno δA_m :

$$[R]^{(m)} = [n][P]^{(m)}$$

Imponendo la stazionarietà del funzionale (13) rispetto al vettore $\{\beta\}$ si perviene alla seguente equazione:

$$\Pi_H = \frac{1}{2} \{q\}^T [K] \{q\} \quad (16)$$

dove la matrice di rigidezza $[K]$ può essere espressa come segue:

$$[K] = [G]^T [H]^{-1} [G] \quad (17)$$

Le matrici che compaiono nelle equazioni (14) e (15) vengono calcolate numericamente utilizzando il classico metodo della quadratura di Gauss. I limiti della serie di Laurent m_u e m_l , per il calcolo delle matrici $[P]^{(m)}$ ed $[U]^{(m)}$ delle equazioni (11) e (12), sono stati scelti in modo da garantire la stabilità della matrice di rigidezza dell'elemento, in particolare soddisfano la seguente condizione:

$$n_\beta \geq 2(n_q - 3)$$

dove n_β è il numero dei coefficienti incogniti del vettore $\{\beta\}$ ed n_q è il numero totale di gradi di libertà dell'elemento. Per l'interpolazione degli spostamenti sul contorno δA_m sono state utilizzate funzioni di forma $[L]$ di tipo lineare. Infatti, l'onere computazionale richiesto dall'utilizzo di funzioni di forma di grado più elevato, a parità di nodi dell'elemento, non è giustificato da un significativo beneficio in termini di accuratezza della soluzione. Infine il fattore di intensificazione delle tensioni complesso si ottiene dalla seguente relazione [6-7]:

$$\bar{K}^1 = K_1 - iK_2 = 4\sqrt{2\pi} e^{\pi\varepsilon} \bar{\lambda}_1 (\bar{\lambda}_1 + 1) \bar{\beta}_1 \cosh(\pi\varepsilon) \quad (18)$$

dove:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} + i\varepsilon \quad \text{e} \quad \beta_1 = \beta_{1R} + i\beta_{1I}$$

3. RISULTATI

Il codice di calcolo sviluppato è stato inizialmente validato considerando difetti presenti in lastre omogenee e confrontando i risultati ottenuti con quelli riportati in [8]; le differenze percentuali risultano sempre inferiori all'1%. Successivamente, sono stati analizzati dei sistemi bimateriale; in particolare sono state analizzate configurazioni di piastra infinita e piastra finita con difetto centrale. Mentre nel primo caso la modellazione è stata effettuata utilizzando un singolo elemento ed imponendo opportune condizioni al contorno, nel secondo l'elemento è stato inserito in una maglia realizzata con elementi finiti tradizionali. Le simulazioni sono state condotte in stato piano di deformazione, al variare del rapporto tra la dimensione del difetto e la larghezza della lastra. Nei grafici successivi verranno, inoltre, mostrati gli andamenti dei fattori di forma definiti dalle seguenti relazioni [2]:

$$y_1 = \frac{K_1}{\sigma_y^\infty \sqrt{\pi a} \cosh(\pi\varepsilon)} \quad (19)$$

$$y_2 = \frac{K_2}{\sigma_y^\infty \sqrt{\pi a} \cosh(\pi\varepsilon)} \quad (20)$$

3.1 Piastra infinita con difetto centrale

In Fig. 2 è mostrato lo schema di carico e di vincolo adottato per eseguire le simulazioni nel caso di piastra infinita con difetto centrale. I vincoli in direzione x riportati sul lato sinistro dell'elemento, sono stati utilizzati per simulare la simmetria geometrica e di carico. Per rappresentare la condizione di piastra infinita e carico remoto, è stato necessario introdurre dei vincoli di dipendenza sui lati superiore e destro dell'elemento ricorrendo al metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Sebbene le condizioni al contorno siano relative ad una lastra infinita, le simulazioni sono state condotte al variare del rapporto tra la lunghezza del difetto e la larghezza dell'elemento (a/b). Ciò ha permesso di identificare la configurazione dell'elemento, in termini di rapporto a/b , che fornisce la differenza percentuale più bassa del SIF rispetto ai valori teorici riportati in letteratura [2].

Il valore di a/b che ha fornito i risultati migliori, ovvero le differenze percentuali più basse rispetto alla soluzione di riferimento relativamente a y_1 ed y_2 , è 0.2. In tale configurazione le differenze rilevate sono inferiori al 2% su y_1 (0.995) e poco al di sopra del 2% su y_2 (0.133). Pertanto, nelle successive modellazioni gli elementi ibridi utilizzati hanno un rapporto $a/b=0.2$.

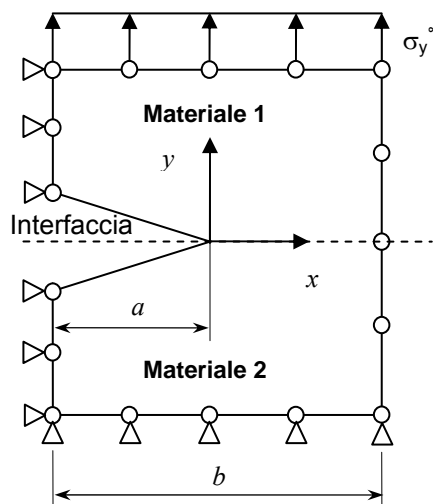


Fig. 2 Crack element: vincoli e carichi

3.2 Piastra finita con difetto centrale

In questa sezione vengono analizzati sistemi piani bimateriale di dimensioni finite, contenenti un difetto centrale di dimensione $2a$. In particolare in Fig. 3 è mostrata una di maglia di elementi finiti

insieme alle condizioni di vincolo e di carico adottate. Le proprietà elastiche utilizzate nelle simulazioni sono relative ad un sistema vetro - resina epossidica (vetro: $E_1= 70.2$ GPa, $\nu_1= 0.24$, resina epossidica: $E_2= 3.9$ GPa, $\nu_2= 0.34$); pertanto i valori dei parametri caratteristici dei materiali risultano i seguenti: $\alpha=0.888$, $\beta= 0.21$ ed $\varepsilon=0.678$.

L'apice del difetto è stato modellato utilizzando l'elemento ibrido, mentre per la restante parte della geometria la maglia è costituita da 384 elementi finiti isoparametrici a 4 nodi. Modificando opportunamente il modello, ovvero spostando l'elemento ibrido all'interno della maglia, sono state eseguite simulazioni al variare del rapporto a/w , dove w è la semilarghezza della lastra. I risultati ottenuti sono riportati in Tabella 1 e sono confrontati con quelli forniti dal codice commerciale ABAQUS, utilizzando una maglia costituita da 5200 elementi piani ad 8 nodi.

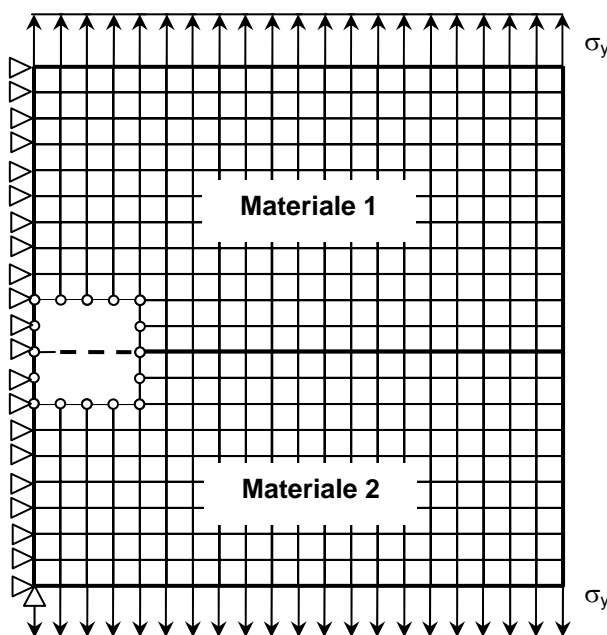


Fig. 3 Piastra in bimatériale di dimensioni finite: schema di vincolo e carico

Tab. 1: Risultati ottenuti per i fattori di forma y_1 ed y_2 per la lastra finita bimatériale con difetto centrale

a/w	y_1			y_2		
	Formulazione e Ibrida	ABAQUS	Differenza Percentuale	Formulazione Ibrida	ABAQUS	Differenza Percentuale
0.10	1.050	1.061	1.03	0.208	0.211	1.47
0.13	1.074	1.085	0.95	0.181	0.182	0.31
0.16	1.102	1.095	0.63	0.165	0.165	0.07
0.20	1.104	1.099	0.43	0.149	0.149	0.03
0.23	1.118	1.102	1.53	0.139	0.138	0.45
0.26	1.124	1.104	1.77	0.132	0.131	1.16
0.30	1.126	1.107	1.74	0.127	0.125	1.69
0.33	1.132	1.110	2.07	0.122	0.119	3.16

E' interessante osservare come la differenza percentuale si mantenga sempre accettabile sia per quanto riguarda il fattore di forma y_1 che per y_2 . Inoltre, come mostrato in tabella, il fattore di forma y_1 tende sempre a crescere all'aumentare del rapporto a/w , mentre il fattore y_2 decresce. La tabella mostra inoltre che le differenze percentuali aumentano per i valori di a/w più elevati.

In Fig. 4 è riportato l'andamento del fattore di forma y_1 al variare di a/w e per differenti valori dell'indice di oscillazione ε , ovvero per differenti sistemi bimatériale. Si può notare che y_1 aumenta al diminuire dell'indice di oscillazione ε e continua ad essere crescente all'aumentare di a/w . Analogamente in Fig. 5 è riportato l'andamento del fattore di forma y_2 al variare di a/w parametrizzato in funzione dell'indice

di oscillazione ε . In questo caso y_2 diminuisce al diminuire di ε , e risulta decrescente all'aumentare di a/w .

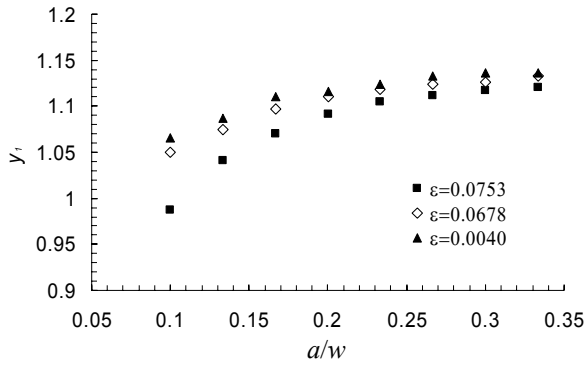


Fig. 4 Fattore di forma y_1 al variare di a/w per differenti valori di ε

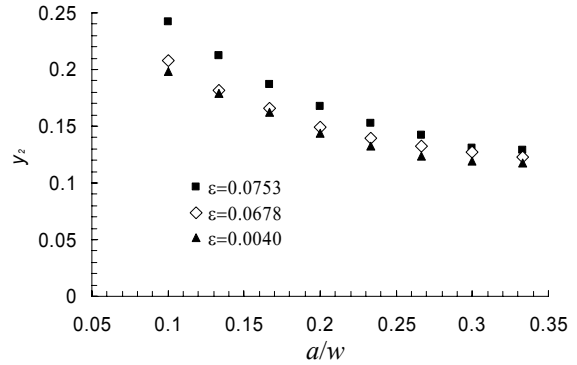


Fig. 5 Fattore di forma y_2 al variare di a/w per differenti valori di ε

4. CONCLUSIONI

In questo lavoro è stato presentato un elemento finito ibrido per l'analisi piana di componenti bimatériale in presenza di difetti all'interfaccia. I casi analizzati hanno mostrato una buona accuratezza della formulazione dell'elemento nella determinazione del fattore di intensificazione delle tensioni complesso; inoltre le procedure di calcolo sviluppate hanno permesso l'analisi di modelli numerici misti, contenenti sia elementi ibridi bimatériale che elementi finiti isoparametrici. Si ritiene che le procedure sviluppate possano essere applicate con successo anche all'analisi piana di sistemi bimatériale di forma più complessa.

APPENDICE

In Appendice sono riportate le espressioni degli elementi delle matrici $[P]^{(i)}$ e $[U]^{(i)}$.

$$P_{11}^{(i)} = Re[4r^{\bar{\lambda}_{2k}-1} A^{(i)} (\bar{\lambda}_{2k}+1) \bar{\lambda}_{2k} e^{i(\bar{\lambda}_{2k}-1)\vartheta} - 2r^{\bar{\lambda}_{2k}-1} A^{(i)} (\bar{\lambda}_{2k}+1) (\bar{\lambda}_{2k}-1) \bar{\lambda}_{2k} e^{i(\bar{\lambda}_{2k}-3)\vartheta} + 2r^{\lambda_{2k}-1} B^{(i)} (\lambda_{2k}+1) \lambda_{2k} e^{i(\lambda_{2k}-1)\vartheta} + 2r^{\bar{\lambda}_{2k}-1} A^{(i)} (\bar{\lambda}_{2k}+1) \bar{\lambda}_{2k}^2 e^{i(\bar{\lambda}_{2k}-1)\vartheta}]$$

$$P_{21}^{(i)} = Re[4r^{\bar{\lambda}_{2k}-1} A^{(i)} (\bar{\lambda}_{2k}+1) \bar{\lambda}_{2k} e^{i(\bar{\lambda}_{2k}-1)\vartheta} + 2r^{\bar{\lambda}_{2k}-1} A^{(i)} (\bar{\lambda}_{2k}+1) (\bar{\lambda}_{2k}-1) \bar{\lambda}_{2k} e^{i(\bar{\lambda}_{2k}-3)\vartheta} + 2r^{\lambda_{2k}-1} B^{(i)} (\lambda_{2k}+1) \lambda_{2k} e^{i(\lambda_{2k}-1)\vartheta} - 2r^{\bar{\lambda}_{2k}-1} A^{(i)} (\bar{\lambda}_{2k}+1) \bar{\lambda}_{2k}^2 e^{i(\bar{\lambda}_{2k}-1)\vartheta}]$$

$$P_{31}^{(i)} = Im[2r^{\bar{\lambda}_{2k}-1} A^{(i)} (\bar{\lambda}_{2k}+1) (\bar{\lambda}_{2k}-1) \bar{\lambda}_{2k} e^{i(\bar{\lambda}_{2k}-3)\vartheta} + 2r^{\lambda_{2k}-1} B^{(i)} (\lambda_{2k}+1) \lambda_{2k} e^{i(\lambda_{2k}-1)\vartheta} - 2r^{\bar{\lambda}_{2k}-1} A^{(i)} (\bar{\lambda}_{2k}+1) \bar{\lambda}_{2k}^2 e^{i(\bar{\lambda}_{2k}-1)\vartheta}]$$

$$P_{12}^{(i)} = Im[4r^{\bar{\lambda}_{2k}-1} A^{(i)} (\bar{\lambda}_{2k}+1) \bar{\lambda}_{2k} e^{i(\bar{\lambda}_{2k}-1)\vartheta} - 2r^{\bar{\lambda}_{2k}-1} A^{(i)} (\bar{\lambda}_{2k}+1) (\bar{\lambda}_{2k}-1) \bar{\lambda}_{2k} e^{i(\bar{\lambda}_{2k}-3)\vartheta} + 2r^{\lambda_{2k}-1} B^{(i)} (\lambda_{2k}+1) \lambda_{2k} e^{i(\lambda_{2k}-1)\vartheta} + 2r^{\bar{\lambda}_{2k}-1} A^{(i)} (\bar{\lambda}_{2k}+1) \bar{\lambda}_{2k}^2 e^{i(\bar{\lambda}_{2k}-1)\vartheta}]$$

$$P_{22}^{(i)} = Im[4r^{\bar{\lambda}_{2k}-1} A^{(i)} (\bar{\lambda}_{2k}+1) \bar{\lambda}_{2k} e^{i(\bar{\lambda}_{2k}-1)\vartheta} + 2r^{\bar{\lambda}_{2k}-1} A^{(i)} (\bar{\lambda}_{2k}+1) (\bar{\lambda}_{2k}-1) \bar{\lambda}_{2k} e^{i(\bar{\lambda}_{2k}-3)\vartheta} - 2r^{\lambda_{2k}-1} B^{(i)} (\lambda_{2k}+1) \lambda_{2k} e^{i(\lambda_{2k}-1)\vartheta} - 2r^{\bar{\lambda}_{2k}-1} A^{(i)} (\bar{\lambda}_{2k}+1) \bar{\lambda}_{2k}^2 e^{i(\bar{\lambda}_{2k}-1)\vartheta}]$$

$$P_{32}^{(i)} = Re[-2r^{\bar{\lambda}_{2k}-1} A^{(i)} (\bar{\lambda}_{2k}+1) (\bar{\lambda}_{2k}-1) \bar{\lambda}_{2k} e^{i(\bar{\lambda}_{2k}-3)\vartheta} + 2r^{\lambda_{2k}-1} B^{(i)} (\lambda_{2k}+1) \lambda_{2k} e^{i(\lambda_{2k}-1)\vartheta} + 2r^{\bar{\lambda}_{2k}-1} A^{(i)} (\bar{\lambda}_{2k}+1) \bar{\lambda}_{2k}^2 e^{i(\bar{\lambda}_{2k}-1)\vartheta}]$$

$$\begin{aligned}
P_{13}^{(i)} &= \lambda_{1k} r^{\lambda_{1k}-1} \zeta^{(i)} \{(\lambda_{1k} + 3) \cos[(\lambda_{1k} - 1)\vartheta] - (\lambda_{1k} - 1) \cos[(\lambda_{1k} - 3)\vartheta]\} \\
P_{23}^{(i)} &= \lambda_{1k} r^{\lambda_{1k}-1} \zeta^{(i)} \{(1 - \lambda_{1k}) \cos[(\lambda_{1k} - 1)\vartheta] + (\lambda_{1k} - 1) \cos[(\lambda_{1k} - 3)\vartheta]\} \\
P_{33}^{(i)} &= \lambda_{1k} r^{\lambda_{1k}-1} \zeta^{(i)} \{-(1 + \lambda_{1k}) \sin[(\lambda_{1k} - 1)\vartheta] + (\lambda_{1k} - 1) \sin[(\lambda_{1k} - 3)\vartheta]\} \\
P_{14}^{(i)} &= \lambda_{1k} r^{\lambda_{1k}-1} \zeta^{(i)} \{(\lambda_{1k} + 1) \sin[(\lambda_{1k} - 1)\vartheta] - (\lambda_{1k} - 1) \sin[(\lambda_{1k} - 3)\vartheta]\} \\
P_{24}^{(i)} &= \lambda_{1k} r^{\lambda_{1k}-1} \zeta^{(i)} \{(3 - \lambda_{1k}) \sin[(\lambda_{1k} - 1)\vartheta] + (\lambda_{1k} - 1) \sin[(\lambda_{1k} - 3)\vartheta]\} \\
P_{34}^{(i)} &= \lambda_{1k} r^{\lambda_{1k}-1} \zeta^{(i)} \{(\lambda_{1k} - 1) \cos[(\lambda_{1k} - 1)\vartheta] - (\lambda_{1k} - 1) \cos[(\lambda_{1k} - 3)\vartheta]\} \\
U_{11}^{(i)} &= Re[2\kappa r^{\bar{\lambda}_{2k}} A^{(i)}(\bar{\lambda}_{2k} + 1) e^{i\bar{\lambda}_{2k}\vartheta} - 2r^{\bar{\lambda}_{2k}} A^{(i)}(\bar{\lambda}_{2k} + 1) \bar{\lambda}_{2k} e^{i(\bar{\lambda}_{2k}-2)\vartheta} \\
&\quad - 2r^{\lambda_{2k}} B^{(i)}(\lambda_{2k} + 1) e^{i\lambda_{2k}\vartheta} + 2r^{\bar{\lambda}_{2k}} A^{(i)}(\bar{\lambda}_{2k} + 1) \bar{\lambda}_{2k} e^{i\bar{\lambda}_{2k}\vartheta}] \\
U_{21}^{(i)} &= Im[2\kappa r^{\bar{\lambda}_{2k}} A^{(i)}(\bar{\lambda}_{2k} + 1) e^{i\bar{\lambda}_{2k}\vartheta} + 2r^{\bar{\lambda}_{2k}} A^{(i)}(\bar{\lambda}_{2k} + 1) \bar{\lambda}_{2k} e^{i(\bar{\lambda}_{2k}-2)\vartheta} \\
&\quad + 2r^{\lambda_{2k}} B^{(i)}(\lambda_{2k} + 1) e^{i\lambda_{2k}\vartheta} - 2r^{\bar{\lambda}_{2k}} A^{(i)}(\bar{\lambda}_{2k} + 1) \bar{\lambda}_{2k} e^{i\bar{\lambda}_{2k}\vartheta}] \\
U_{12}^{(i)} &= Im[2\kappa r^{\bar{\lambda}_{2k}} A^{(i)}(\bar{\lambda}_{2k} + 1) e^{i\bar{\lambda}_{2k}\vartheta} - 2r^{\bar{\lambda}_{2k}} A^{(i)}(\bar{\lambda}_{2k} + 1) \bar{\lambda}_{2k} e^{i(\bar{\lambda}_{2k}-2)\vartheta} \\
&\quad + 2r^{\lambda_{2k}} B^{(i)}(\lambda_{2k} + 1) e^{i\lambda_{2k}\vartheta} + 2r^{\bar{\lambda}_{2k}} A^{(i)}(\bar{\lambda}_{2k} + 1) \bar{\lambda}_{2k} e^{i\bar{\lambda}_{2k}\vartheta}] \\
U_{22}^{(i)} &= Re[-2\kappa r^{\bar{\lambda}_{2k}} A^{(i)}(\bar{\lambda}_{2k} + 1) e^{i\bar{\lambda}_{2k}\vartheta} - 2r^{\bar{\lambda}_{2k}} A^{(i)}(\bar{\lambda}_{2k} + 1) \bar{\lambda}_{2k} e^{i(\bar{\lambda}_{2k}-2)\vartheta} \\
&\quad + 2r^{\lambda_{2k}} B^{(i)}(\lambda_{2k} + 1) e^{i\lambda_{2k}\vartheta} + 2r^{\bar{\lambda}_{2k}} A^{(i)}(\bar{\lambda}_{2k} + 1) \bar{\lambda}_{2k} e^{i\bar{\lambda}_{2k}\vartheta}] \\
U_{13}^{(i)} &= r^{\lambda_{1k}} \zeta^{(i)} \{-\lambda_{1k} \cos[(\lambda_{1k} - 2)\vartheta] + (\lambda_{1k} + \kappa + 1) \cos(\lambda_{1k}\vartheta)\} \\
U_{23}^{(i)} &= r^{\lambda_{1k}} \zeta^{(i)} \{\lambda_{1k} \cos[(\lambda_{1k} - 2)\vartheta] + (-\lambda_{1k} + \kappa - 1) \sin(\lambda_{1k}\vartheta)\} \\
U_{14}^{(i)} &= r^{\lambda_{1k}} \zeta^{(i)} \{-\lambda_{1k} \sin[(\lambda_{1k} - 2)\vartheta] + (\lambda_{1k} + \kappa - 1) \sin(\lambda_{1k}\vartheta)\} \\
U_{24}^{(i)} &= r^{\lambda_{1k}} \zeta^{(i)} \{-\lambda_{1k} \cos[(\lambda_{1k} - 2)\vartheta] + (\lambda_{1k} - \kappa - 1) \cos(\lambda_{1k}\vartheta)\}
\end{aligned}$$

dove $\lambda = \lambda_R + i\lambda_I$ e k intero positivo.

Nelle relazioni precedenti le grandezze $A^{(i)}$, $B^{(i)}$ e $C^{(i)}$ assumono i seguenti valori:

$$A^{(1)} = 1, \quad A^{(2)} = e^{2\pi\varepsilon}$$

$$B^{(1)} = e^{2\pi\varepsilon}, \quad B^{(2)} = 1$$

$$\zeta^{(1)} = \beta, \quad \zeta^{(2)} = 1$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] M.D. Thouless, "Some mechanics for the adhesion of thin films", *Thin Solids Films*, 1989, vol. 181, pp. 397-406.
- [2] G. C. Sih, E. P. Chen, Mechanics of Fracture 6: Cracks in Composite materials, Martinus Nijhoff Publishers, London, 1981.
- [3] K. Y. Lin, "The Stress Intensity of a Crack at an Interface between Two Materials", M.I.T. ASRL TR 162-5, 1973.
- [4] P. Tong, T. H. H. Pian, S. Lasry, "A Hybrid Element Approach to Crack problems in Plane Elasticity", *Int. J. Num. Met. Eng.*, 7 (3), 297-308, 1973.
- [5] N. I. Muskhelishvili, Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, Noordhoff, Groningen", Holland, 1953, pp. 105-128.
- [6] J. R. Rice, G. C. Sih, "Plane Problems of Cracks in Dissimilar Media", *J. Appl. Mech.*, 32, 418-423, 1965.

- [7] K. Y. Lin, J. W. Mar, "Finite Element Analysis of Stress Intensity Factors for Cracks at a Bi-Material Interface", *Int. J. Fracture*, 12, 521-531, 1976.
- [8] D. P. Rooke, D. J. Cartwright, Compendium of Stress Intensity Factors, H. M. Stationary Office, London, 1975.

