

# UN MODELLO DI DANNO NON LOCALE PER L'ANALISI A COLLASSO DI STRUTTURE DI MATERIALE QUASI-FRAGILE

G. Borino, B. Failla, F. Parrinello

*Dipartimento di Ingegneria Strutturale & Geotecnica, DISeG  
Università di Palermo, Viale delle Scienze, 90128 Palermo, Italia*

## ABSTRACT

The paper presents a nouvelle nonlocal damage formulation able to reproduce the typical continuum localized failure modes of quasibrittle materials. The only two variables treated as nonlocal in the formulations are the continuum damage and the energy release rate. The first is related to the actual material stiffness degradation, whereas the second enters as a driving force in the damage activation function. The model is derived in such a way to naturally comply with thermodynamic principles and the hypothesis of associative damage flow rule is assumed.

The nonlocal damage model has been implemented in a finite element program and some numerical simulations up to the complete failure of plane concrete specimens have been performed. The numerical analyses have been conducted under the hypothesis of plane stress conditions and the results match with experimental data and are fully mesh objective

## SOMMARIO

Il lavoro presenta una nuova formulazione di danno non locale capace di riprodurre la condizione di collasso con localizzazione delle deformazioni tipica dei materiali quasi fragili. Le sole variabili considerate non locali sono la variabile continua di danno e l'energia rilasciata per incremento unitario di danno. La prima è legata direttamente allo stato di degrado delle proprietà elastiche, mentre la seconda è la forza che entra direttamente nella funzione di attivazione del danno. Il modello è derivato in modo da soddisfare a priori i principi della termodinamica e sono state inoltre assunte valide le ipotesi di associatività generalizzata. Il modello non locale di danno è stato implementato in un programma agli elementi finiti e sono state effettuate alcune simulazioni numeriche su provini in calcestruzzo fino al completo collasso. Le analisi numeriche sono state effettuate nelle condizioni di stato piano di tensione ed i risultati ottenuti verificano i dati sperimentali, oltre a risultare indipendenti dalla mesh adottata.

## 1. INTRODUZIONE

Materiali quali il calcestruzzo, le rocce, i compositi e molti altri sono classificati come materiali quasi fragili e manifestano dei modi di crisi caratterizzati dalla preventiva

formazione, coalescenza e sviluppo di microvuoti e microfratture che precedono la vera e propria formazione di macrofratture. Questi fenomeni non lineari possono essere efficacemente modellati mediante le leggi della meccanica del danno continuo, che consente di descrivere un degrado progressivo delle proprietà elastiche medie ed una complessiva riduzione della resistenza meccanica al crescere della deformazione (*softening*). Si è tuttavia riscontrato che i modelli continui classici di danno presentano delle specifiche difficoltà e possono condurre a problemi strutturali mal posti [1]. Infatti, i problemi nascono dalla perdita di ellitticità delle equazioni alle derivate parziali, che nello specifico ha fra le conseguenze, la localizzazione delle deformazioni e del danno lungo bande di spessore nullo con conseguente collasso strutturale che si produce con una dissipazione totale nulla. Nel caso poi di problemi discretizzato in elementi finiti si osserva la patologica dipendenza della soluzione dalla discretizzazione adottata. Per superare queste difficoltà, mantenendo la natura continua del problema, si utilizzano delle tecniche di regolarizzazione, fra le quali, quella adottata nel presente lavoro, rientra nella classe delle tecniche di regolarizzazione non locali o integrali [2,3,4]. La formulazione proposta soddisfa a priori i principi della termodinamica espressi in un contesto non locale [5] e, nell'ipotesi di leggi di flusso danneggiativo di tipo associativo, conduce ad operatori tangenti simmetrici. Il modello proposto rientra fra le formulazioni che definiscono lo stato del materiale attraverso la conoscenza del valore della deformazione e di alcune variabili interne fra cui il danno stesso. I modelli di danno non locale partono dal presupposto che, a causa della reale eterogeneità del mezzo esaltata dallo sviluppo di micro decoesioni, lo sviluppo di danno in un punto produce effetti anche sullo stato di punti contigui e l'influenza si va smorzando in funzione della sola distanza. In questo modo lo stato in un punto risulta definito da una legge di tipo integrale definita sul dominio. Allo scopo di mantenere quanto più possibile semplice il modello, ma allo stesso tempo garantire l'efficacia della regolarizzazione, solo le variabili interne di danno e la corrispondente energia rilasciata per incremento di danno unitario sono trattate come variabili non locali. Mentre la prima definisce direttamente lo stato del materiale, la seconda si ottiene da considerazioni di coerenza energetica legate alla funzione di dissipazione. La caratteristica principale del presente modello è legata al fatto che l'operatore integrale è di tipo autoaggiunto e pertanto non si manifesta alcun problema nel preservare campi uniformi anche in prossimità dei bordi [1]. Il modello costitutivo specifico adottato è di tipo coesivo-attritivo ed inoltre considera come modi di crisi nel materiale i modi dove prevale lo stato di trazione oppure i modi misti trazione-taglio, compressione-taglio. Le leggi sono basate su una sola variabile di danno isotropo e sono formulate decomponendo la deformazione totale nelle sue componenti spettrali positive e negative secondo uno schema originariamente proposto da Mazars [6]. Il modello è stato implementato nel programma agli elementi finiti FEAP [7] e sono state effettuate alcune simulazioni numeriche su provini intagliati in calcestruzzo. Le prove condotte in stato di pura trazione ed in condizioni miste trazione taglio hanno prodotto dei risultati che riproducono i dati sperimentali disponibili e che risultano indipendenti dalla discretizzazione adottata.

## 2. MODELLAZIONE NONLOCALE DEL DANNO

Si considera un solido che nello spazio tridimensionale Euclideo occupa il dominio aperto  $V$ , di contorno  $\partial V$ , costituito da materiale elasto danneggiativo. Lo stato in un punto  $\mathbf{x} \in V$  dipende dal valore di alcune variabili di stato, fra cui la deformazione e la variabile interna di danno  $\bar{d}(\mathbf{x})$ . Tale variabile é l'unica, fra quelle di stato, ottenuta dai contributi di una variabile locale di danno secondo la relazione integrale

$$\bar{d}(\mathbf{x}) = \int_V W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d(\mathbf{y}) dV(\mathbf{y}). \quad (1)$$

dove  $W(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  é una funzione di pesatura spaziale che ha come scopo la descrizione delle interazioni tra particelle vicine. Per la conservazione di campi uniformi di danno, la seguente condizione di normalizzazione é richiesta

$$\int_V W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV(\mathbf{y}) = 1 \quad \forall \mathbf{x} \in V. \quad (2)$$

A differenza della classica definizione di  $W(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  data in [2,4] che non rispetta la simmetria, nel presente lavoro si adotta la seguente definizione

$$W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(1 - \frac{\Omega_r(\mathbf{x})}{\Omega_\infty}\right) \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \frac{1}{\Omega_\infty} \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (3)$$

dove  $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  é la funzione delta di Dirac,  $\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  é definita come funzione di attivazione spaziale ed é una funzione positiva, simmetrica,  $\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  in quanto dipende unicamente dalla distanza  $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$  e velocemente tende a zero al crescere di  $r$ . In genere  $\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  viene scelta come funzione errore di Gauss,  $\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = K_G \exp(-\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2/l_0^2)$ , oppure come funzione a campana  $\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (1 - (r/R)^2)^2$  per  $r \leq R$ . Si evidenzia che all'interno della funzione di attenuazione é sempre presente un coefficiente che controlla il modo in cui il danno si diffonde nell'intorno. Tale parametro, denominato lunghezza interna caratteristica, é  $l_0$  nel caso della funzione di Gauss, mentre é  $R$  nel caso della funzione a campana ed in quest'ultimo caso, rappresenta anche la massima distanza di influenza. Si é adottata inoltre la seguente definizione di volume caratteristico equivalente

$$\Omega_r(\mathbf{x}) = \int_V \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV(\mathbf{y}), \quad (4)$$

ed  $\Omega_\infty$  é sempre l'integrale (4), ma valutato sul dominio illimitato  $V_\infty$ . Con riferimento alla definizione dell' eq. (1) e (3) si ottiene che

$$\bar{d}(\mathbf{x}) = \left(1 - \frac{\Omega_r(\mathbf{x})}{\Omega_\infty}\right) d(\mathbf{x}) + \frac{1}{\Omega_\infty} \int_V \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d(\mathbf{y}) dV(\mathbf{y}). \quad (5)$$

Il primo termine in eq. (5) é un termine locale che risulta efficace solo per punti in prossimitá del contorno, in quanto per punti  $\mathbf{x}$  lontani dal contorno (lontani rispetto alla lunghezza interna  $l_0$  o ad  $R$ )  $\Omega_r \rightarrow \Omega_\infty$  ed il primo termine si estingue. Il secondo termine nell'eq. (5) é il classico contributo nonlocale presente nei solidi illimitati. Si

conclude osservando che il nucleo della relazione integrale (1), definito dall'eq. (3), oltre ad essere simmetrico, coincide con quello classico nel caso di solidi illimitati o con riferimento a punti solidi limitati sufficientemente lontani dal contorno del solido.

### 3. IL MODELLO COSTITUTIVO

Il modello costitutivo proposto appartiene alle formulazioni termodinamiche dove lo stato é descritto, oltre che dalla deformazione, da un opportuno numero di variabili interne che descrivono l'evoluzione dello stato del materiale. Si sono voluti modellare i principali modi deformativi anelastici del calcestruzzo, dove come noto prevalgono gli effetti dovuti a prevalenti stati di trazione. Tali stati infatti inducono microdecoesioni ed una generale riduzione delle proprietà elastiche. Il modello proposto rientra nella classe dei modelli di danno lineare isotropo dove é possibile definire la seguente densità di energia libera di Helmholtz

$$\begin{aligned}
\psi(\boldsymbol{\varepsilon}', \bar{d}, \xi) &= \psi_e(\boldsymbol{\varepsilon}', \bar{d}) + \psi_{in}(\xi) \\
&= \frac{(1 - \bar{d})E}{2(1 + \nu)(1 - 2\nu)} [(1 - 2\nu)\boldsymbol{\varepsilon}'_+ : \boldsymbol{\varepsilon}'_+ + \nu \langle \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}' \rangle_+^2 - c_0 \nu \langle \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}' \rangle_-^2] \\
&+ \frac{E}{2(1 + \nu)(1 - 2\nu)} [(1 - 2\nu)\boldsymbol{\varepsilon}'_- : \boldsymbol{\varepsilon}'_- + (1 + c_0)\nu \langle \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}' \rangle_-^2] \\
&+ K(1 - \xi) \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!} \left[ \ln \frac{c}{1 - \xi} \right]^i,
\end{aligned} \tag{6}$$

dove  $\psi_e$  é la densità di energia di deformazione con danno e  $\psi_{in}$  é la componente interna di energia libera, cioè quella parte di energia immagazzinata nella microstruttura che, attraverso la variabile interna cinematica  $\xi$ , descrive l'evoluzione della soglia di attivazione del danno. L'espressione adottata per la componente interna dell'energia libera é la stessa di quella proposta da Comi e Perego [3] e  $c, K$  ed  $n$  sono costanti che governano il modo con cui evolve il danno.  $\boldsymbol{\varepsilon}'$  é il tensore della deformazione infinitesimo definito nel sistema di riferimento principale e  $\bar{d}$  é la variabile di danno compresa tra zero ed uno cosiccome definita nell'eq. (1) o (5).  $E$  e  $\nu$  sono il modulo di Young e di Poisson e  $c_0$  é una costante costitutiva che regola i valori limite elastico iniziale in compressione ed in trazione. Nell' eq. (6) il tensore della deformazione é stato decomposto nelle sue componenti principali positiva  $\boldsymbol{\varepsilon}'_+$  e negativa  $\boldsymbol{\varepsilon}'_-$ , seguendo uno schema originariamente proposto da Mazars [6]

$$\langle \varepsilon_I \rangle_+ = \frac{|\varepsilon_I| + \varepsilon_I}{2} \quad \langle \varepsilon_I \rangle_- = -\frac{|\varepsilon_I| - \varepsilon_I}{2}. \tag{7}$$

Seguendo un classico percorso logico basato sulla termodinamica, originariamente introdotto per processi elastoplastici nonlocali in [8] e recentemente esteso a problemi elasto danneggiativi nonlocali [9], si ricavano le seguenti leggi

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}' &= \frac{\partial \psi_e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}'} = \frac{(1 - \bar{d})E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} [(1 - 2\nu)\boldsymbol{\varepsilon}'_+ + \nu \langle \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}' \rangle_+ \boldsymbol{\delta} - c_0 \nu \langle \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}' \rangle_- \boldsymbol{\delta}] \\
&+ \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} [(1 - 2\nu)\boldsymbol{\varepsilon}'_- + (1 + c_0)\nu \langle \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}' \rangle_- \boldsymbol{\delta}],
\end{aligned} \tag{8}$$

$$Y := -\frac{\partial\psi_e}{\partial\bar{d}} = \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ (1-2\nu) \boldsymbol{\varepsilon}'_+ : \boldsymbol{\varepsilon}'_+ + \nu \langle \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}' \rangle_+^2 - c_0 \nu \langle \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}' \rangle_-^2 \right], \quad (9)$$

$$\chi := \frac{\partial\psi_{\text{in}}}{\partial\xi} = K \left[ \ln \frac{c}{1-\xi} \right]^n, \quad (10)$$

dove  $\boldsymbol{\sigma}'$  é il tensore degli sforzi di Cauchy definito nel sistema di riferimento principale,  $Y$  é l'energia rilasciata per incremento unitario di danno nonché la variabile termodinamicamente coniugata al danno nonlocale  $\bar{d}$ , ed infine  $\chi$  é la variabile interna energeticamente coniugata a  $\xi$ . La funzione di dissipazione intrinseca in termini di variabili di flusso locali si può scrivere come

$$D = \bar{Y}\dot{d} - \chi\dot{\xi} \geq 0 \quad \text{in } V, \quad (11)$$

che afferma che il lavoro speso per incrementare il danno meno l'energia incamerata nella microstruttura per cambiarne lo stato, é l'energia (positiva) dissipata in calore. Nell'eq. (11) l'energia nonlocale rilasciata per incremento di danno unitario é definita dalla relazione

$$\bar{Y}(\mathbf{x}) = \left( 1 - \frac{\Omega_r(\mathbf{x})}{\Omega_\infty} \right) Y(\mathbf{x}) + \frac{1}{\Omega_\infty} \int_V \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) Y(\mathbf{y}) dV(\mathbf{y}). \quad (12)$$

Si evidenzia che l'energia rilasciata risulta regolarizzata dalla stessa relazione, eq. (5), impiegata per il danno, cioè mediante lo stesso operatore integrale. Questa condizione implica che l'operatore integrale é autoaggiunto e quindi anche i campi uniformi  $Y(\mathbf{x})$  sono conservati nel processo di regolarizzazione.

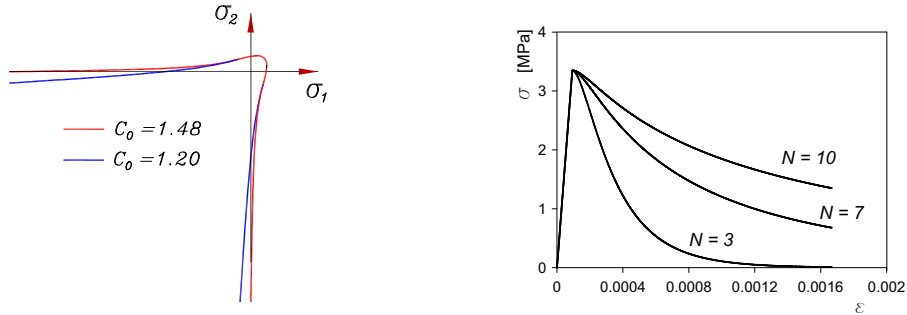


Fig. 1. (a) dominio elastico iniziale per due diversi valori della costante  $c_0$ ; (b) evoluzione della legge sforzo deformazione nel caso monoassiale per differenti valori del coefficiente  $n$ .

Dall'espressione della dissipazione di eq. (11) si evince che le due "forze" che guidano la dissipazione sono  $\bar{Y}$  e  $\chi$  e pertanto la funzione di attivazione del danno,  $\phi$ , deve dipendere dai valori di queste due variabili. Inoltre, se si assume l'ipotesi di associativit  generalizzata, cio  la funzione di attivazione  $\phi$  svolge anche il ruolo di potenziale danneggiativo sia per il flusso di danno  $\dot{d}$  che per il flusso della variabile interna  $\dot{\xi}$ , allora le relazioni costitutive del danno nonlocale risultano

$$\phi(\bar{Y}, \chi) = \bar{Y} - \chi \leq 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad \dot{\lambda}\phi = 0 \quad \dot{\lambda}\dot{\phi} = 0 \quad \text{in } V \quad (13)$$

$$\dot{d} = \frac{\partial \phi}{\partial \bar{Y}} \dot{\lambda} = \dot{\lambda}, \quad \dot{\xi} = -\frac{\partial \phi}{\partial \chi} \dot{\lambda} = \dot{\lambda}. \quad \text{in } V \quad (14)$$

Sulla base delle definizioni date in eq. (9) e (10) unitamente alla condizione di non-località (12), il dominio elastico iniziale definito dalla relazione (13)<sub>1</sub> é rappresentato in Fig. 1a nello spazio bidimensionale delle tensioni principali  $\sigma'_1, \sigma'_2$ . Il modo con cui le resistenze evolvono é tracciato nella Fig. 1b dove si riportano le curve tensione-deformazione nel caso di trazione monoassiale.

#### 4. PROBLEMA INCREMENTALE AGLI ELEMENTI FINITI

Le equazioni alle derivate parziali che descrivono il comportamento strutturale incrementale continuo sono discretizzate nello spazio, mediante elementi finiti, mentre l'integrazione lungo la storia di carico si ottiene adottando una discretizzazione in passi di carico e per ogni passo di carico si impiega il metodo di integrazione implicito di Eulero. Con riferimento al generico passo di carico  $(n, n+1)$ , l'equazione di equilibrio di una struttura discretizzata in elementi finiti alla fine del passo si scrive

$$\mathbf{F}_{int}^{n+1} = \sum_{g=1}^{N_g} w_g \mathbf{B}_g^T \boldsymbol{\sigma}_g^{n+1} \quad (15)$$

dove  $N_g$  é il numero totale di punti di Gauss di tutti gli elementi,  $\mathbf{B}_g$  é la matrice di compatibilitá,  $w_g$  sono i coefficienti di peso di Gauss,  $\boldsymbol{\sigma}_g^{n+1}$  é il vettore della tensione. L'indice  $g$  indica che le rispettive quantitá sono definite nel punto di Gauss  $\mathbf{x}_g$ . Il sistema di equazioni (15) richiede la conoscenza dello stato tensionale alla fine del passo ed inoltre tale stato tensionale deve verificare le condizioni costitutive presentate nel precedente paragrafo. Le relazioni costitutive integrate nel passo assumono la forma

$$\boldsymbol{\sigma}_g^{n+1} = s(\bar{d}_g^{n+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_g^{n+1}), \quad \chi_g^{n+1} = \chi_g^n + f(\Delta \lambda_g), \quad Y_g^{n+1} = r(\boldsymbol{\varepsilon}_g^{n+1}) \quad (16)$$

$$\phi_g^{n+1} = \bar{Y}_g^{n+1} - \chi_g^{n+1} \leq 0, \quad \Delta \lambda_g \geq 0, \quad \phi_g^{n+1} \Delta \lambda_g = 0. \quad (17)$$

con  $s$  ed  $r$  funzioni che possono essere esplicitate dalle relazioni (8) e (10), mentre  $f(\Delta \lambda_g)$  é una funzione che raccoglie tutti i termini nell'incremento incognito  $\Delta \lambda$ . Le relazioni integrali nonlocali, definite dalle eq. (1) e (5) sono valutate sfruttando la stessa discretizzazione in elementi finiti con i relativi punti di Gauss, cioé

$$\begin{aligned} \bar{Y}_p^{n+1} &= \sum_{q=1}^{N_g} w_q W_{pq} Y_q^{n+1} = \sum_{q=1}^{N_g} w_q W_{pq} \boldsymbol{\varepsilon}_q^{n+1 T} \mathbf{D}^e \boldsymbol{\varepsilon}_q^{n+1}, \\ \bar{d}_g^{n+1} &= \bar{d}_g^n + \sum_{l=1}^{N_g} w_l W_{gl} \Delta \lambda_l. \end{aligned} \quad (18)$$

Sostituendo la (18)<sub>1</sub>, la (16)<sub>2</sub> e la (16)<sub>3</sub> nelle relazioni (17), la condizione di ammissibilitá a fine passo é data come

$$\phi_g^{n+1} = \phi_g^{n+1tr} - f(\Delta \lambda_g) \leq 0 \quad \Delta \lambda_g \geq 0 \quad \phi_g^{n+1} \Delta \lambda_g = 0, \quad (19)$$

dove il valore di tentativo elastico é definito come  $\phi_g^{n+1^{tr}} \equiv \bar{Y}_g^{n+1} - \chi_g^n$ . Come fatto osservare da Comi e Perego [3] la scelta della variabile di danno  $\bar{d}$  come variabile non-locale, unitamente al fatto del modello di danno lineare isotropo, mantiene la condizione di ammissibilit a danneggiativa, eq. (19)<sub>1</sub>, algoritmicamente locale, essendo la forza  $\bar{Y}_g^{n+1}$  ottenuta in modo esplicito dalla distribuzione nota delle deformazioni nei punti di Gauss. Il problema (19) si risolve quindi seguendo le classiche tecniche di predizione elastica e di correzione danneggiativa, cio e solamente nel caso in cui  $\phi_g^{n+1^{tr}} > 0$  si calcola nel punto  $x_g$  l'incremento di danno risolvendo l'equazione algebrica non lineare  $\phi_g^{n+1^{tr}} - f(\Delta\lambda_g) = 0$  nell'incognita  $\Delta\lambda_g = \Delta d_g$ . Una volta valutati tutti gli incrementi di danno si calcola il valore del danno nonlocale dalla eq. (18)<sub>2</sub> e quindi lo stato di tensione a fine passo dalla (16)<sub>1</sub>. Le tensioni calcolate si sostituiscono nell'eq. (15) di equilibrio e l'eventuale forza non equilibrata si utilizza per un ulteriore ciclo iterativo di equilibrio fino all'avvenuta convergenza. La procedura descritta, così come il modello costitutivo,   stata implementata in un programma agli elementi finiti e sono state effettuate una serie di applicazioni numeriche descritte nel paragrafo che segue.

## 5. APPLICAZIONE NUMERICA

La applicazione numerica realizzata   relativa ad una prova di trazione diretta su di un provino intagliato in calcestruzzo semplice. La geometria del provino e le condizioni di carico sono riportate in Fig. 2. La prova   stata condotta a controllo di spostamento verticale seguendo i dettagli forniti da Hassanzadeh [10] che ha effettuato sperimentalmente la prova.

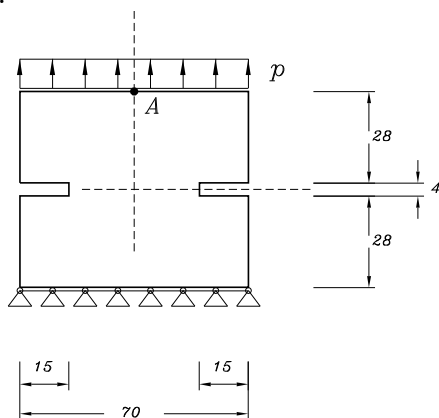


Figura 2. Schema geometrico e condizioni di carico per il provino in calcestruzzo

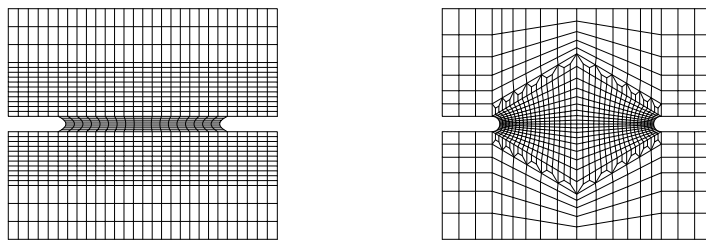


Figura 3. Le due meshes adottate nell'analisi: (a) mesh regolare con 968 elementi, (b) mesh con la zona centrale infittita per un totale di 864 elementi.

Per riprodurre il materiale adottato in [10] sono stati fissati i seguenti parametri costitutivi:  $E = 36000$  MPa,  $\nu = 0.3$ , la tensione limite elastica a trazione  $\sigma_f = 3.34$  MPa,  $n = 10$ ,  $c = 148,413$ ,  $K = 1.606 \cdot 10^{-11}$  MPa,  $c_0 = 1.45$ .

L'analisi numerica è stata effettuata utilizzando elementi finiti isoparametrici a quattro nodi, con quattro punti di Gauss, in stato piano di tensione. La funzione di attenuazione adottata è la funzione a campana con  $R = 5$  mm e  $K = 15/16R$ . L'analisi è stata condotta adottando le due meshes illustrate in Fig. 3.

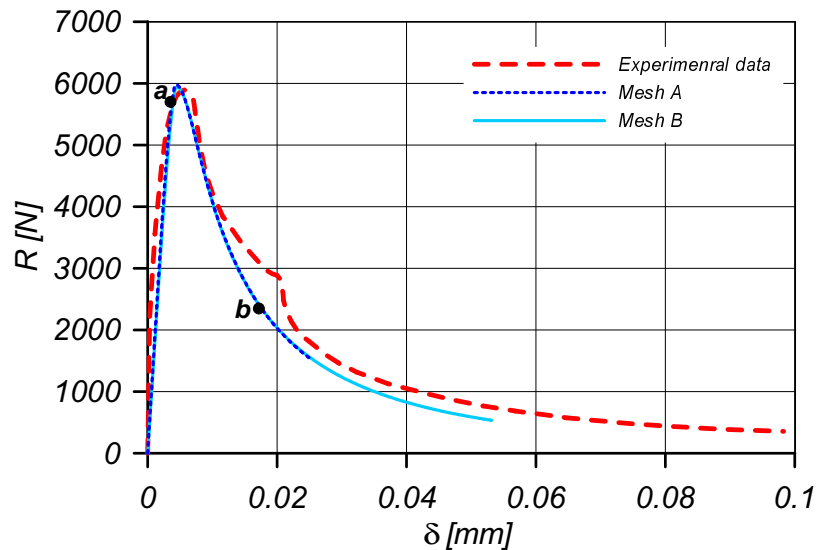


Figura 4. Forza,  $R$ , in funzione dello spostamento relativo,  $\delta$ , all'intaglio per le due meshes di Fig. 3a and 3b. Sono inoltre ripostati i risultati sperimentali di Hassanzadeh [10].

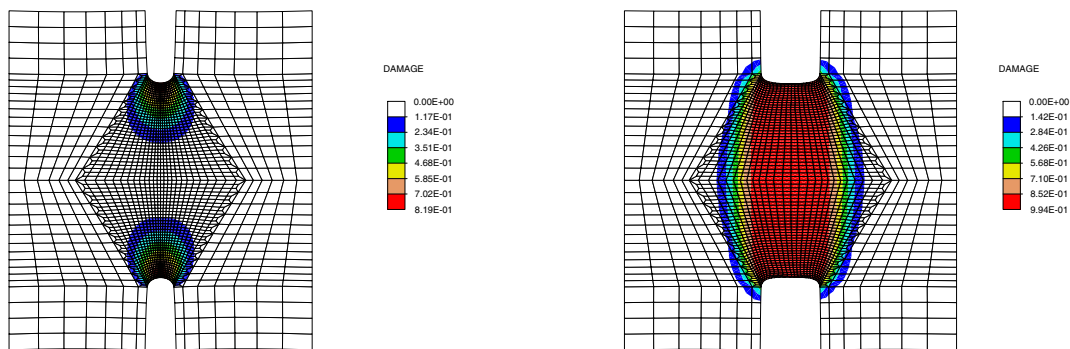


Figura 5. Distribuzioni del danno: (a) nella condizione di carico a di Fig. 4, in prossimità del picco, e (b) nella condizione di carico nel ramo discendente contrassegnato con la lettera b in Fig. 4.

La Fig. 4 mostra la risposta globale del provino in termini di reazione globale verticale in funzione dello spostamento relativo valutato sull'intaglio. Oltre alle risposte numeriche ottenute con le due meshes, Fig. 4 mostra anche i risultati della prova sperimentale [10]. Si rileva una buona corrispondenza fra risposta numerica e risposta sperimentale, inoltre si osserva una completa indipendenza della risposta numerica



dalla mesh adottata. Infine, in Fig. 5 si riportano le distribuzioni del danno in corrispondenza alle condizioni di carico evidenziate rispettivamente con la lettera (a) (condizione di picco) e con la lettera (b) in Fig. 4. Si conclude osservando che il modello proposto è pienamente capace di rappresentare il modo di collasso con formazione di una localizzazione del danno per un materiale quasi-fragile come il calcestruzzo.

### Ringraziamenti

La ricerca è stata effettuata grazie al supporto finanziario fornito dal MIUR con il finanziamento PRIN-2001

### Bibliografia

1. Comi C., Perego U., “*Symmetric and non-symmetric non-local damage formulations: An assessment of merits*”, CD Proc. of ECCM 2001, Cracow, Poland, 2001
2. Pijaudier-Cabot G., Bažant Z.P., “*Nonlocal damage theory*”, J. Eng. Mech., **113**, 1512–1533, **1987**.
3. Comi C., Perego U., “*Numerical aspects of nonlocal damage analysis*”, Eur. J. Finite Elements, **10**, 227–242, **2001**
4. Jirasek M., “*Nonlocal models for damage and fracture: Comparison of approaches*”, Int. J. Solid and Structures, **35**, 4133–4145, **2002**
5. Edelen D.G.B., Laws N., “*Nonlocal continuum mechanics*”, Arch. Rat. Mech. Anal., **43**, 36–44, **1971**
6. Mazars J., Pijaudier-Cabot G., “*Continuum damage theory: Application to concrete*”, ASCE J. Engng. Mech., **89**<sub>2</sub>, 345–365, **1989**.
7. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., The finite element method, Butterworth-Heinemann, 2000.
8. Borino G., Failla B., Polizzotto C., “*A thermodynamic formulation with local and nonlocal internal variables*” IUTAM Symposium on Analytical and Computational Fracture Mechanics of Non-Homogeneous Materials, Cardiff, England, 271–280, 2001.
9. Borino G., Failla B., “*Nonlocal damage theory with self adjoint integral kernel*”, Proc. of SIMAI VI, Cagliari, Italy, 2002
10. Hassanzadeh, M., *Behaviour of fracture process zone in concrete influenced by simultaneously applied normal and shear displacements*, Ph.D. Thesis, Division of Building Materials, Lund Institute of Technology (1991).