

EFFETTO DI SCALA NELLA PROPAGAZIONE A FATICA DI FESSURE FRATTALI

Andrea Carpinteri, Andrea Spagnoli, Sabrina Vantadori

*Dipartimento di Ingegneria Civile, Università di Parma
Parco Area delle Scienze 181/A, 43100 Parma, ITALY
Fax: +39 0521 905924; E-mail: andrea.carpinteri@unipr.it*

ABSTRACT

Several experimental tests have shown that the material strength under static or fatigue loading decreases by increasing structural size, and some theoretical arguments have been proposed to interpret such a phenomenon. As far as fatigue crack growth is concerned, limited information on size effect is available in the literature. In the present paper, by exploiting some concepts of fractal geometry, new definitions of fracture energy and stress-intensity factor based on physical dimensions different from the classical ones are discussed. Then, a size-dependent crack growth law (expressing crack growth rate against stress intensity factor range) is proposed and used to interpret relevant experimental data related to concrete.

SOMMARIO

Numerose prove sperimentali hanno evidenziato una diminuzione della resistenza del materiale, sia per carichi statici che per carichi ciclici, al crescere delle dimensioni del componente strutturale e alcuni studi teorici sono stati eseguiti per interpretare tale fenomeno. In letteratura sono disponibili pochi dati relativi all'effetto di scala riscontrabile nella propagazione a fatica delle fessure. Nella presente nota, utilizzando alcuni concetti della Geometria Frattale, vengono discusse nuove definizioni dell'energia di frattura e del fattore di intensificazione degli sforzi, basate su dimensioni fisiche diverse da quelle classiche. Poi viene proposta una legge di propagazione a fatica delle fessure, che tiene conto delle dimensioni dell'elemento strutturale. Tale legge teorica è impiegata per analizzare alcune risultanze sperimentali relative a provini di calcestruzzo.

INTRODUZIONE

La resistenza nominale di un materiale cambia variando la dimensione strutturale (effetto di scala), cioè la resistenza cessa di essere una costante del materiale. Effetti di scala furono studiati da Griffith [1], il quale osservò sperimentalmente un incremento di resistenza in filamenti sottili di vetro. Tale incremento fu spiegato con il fatto che la resistenza a trazione del materiale risulta dipendente dalla presenza di microfessure, la cui dimensione è proporzionale alla dimensione caratteristica del provino o del componente strutturale (ad es. il diametro del filamento). Peterson [2] osservò un effetto di scala nel caso di frattura fragile dovuta a carichi ciclici.

Negli ultimi decenni è stato ampiamente analizzato l'effetto di scala sulla resistenza dei materiali soggetti a carichi statici e sono stati sviluppati diversi studi teorici: Teoria statistica (Weibull [3]); Teoria basata su concetti energetici (Bazant [4]); Teoria basata sui frattali (Carpinteri [5, 6]). L'approccio teorico basato sulla Teoria dei Frattali considera la natura frattale della microstruttura del materiale [7] e la Teoria del Gruppo di Rinormalizzazione [8] per spiegare l'effetto di scala sia per la resistenza a trazione che per la tenacità a frattura. La sezione resistente di una struttura (*ligament*) presenta un indebolimento autosomigliante dovuto alle eterogeneità del materiale, alle microfessure, ai difetti, ecc. [9]. Tale superficie può essere modellata attraverso un insieme frattale *lacunoso*, la cui dimensione risulta inferiore a quella del dominio euclideo nel quale esso è contenuto. Quindi è stata proposta una nuova definizione della resistenza a trazione con dimensione fisica dipendente dalla dimensione frattale della sezione resistente (procedura di rinormalizzazione) [5]. Inoltre, trattando le superfici di frattura come frattali *invasivi* (cioè aventi una dimensione maggiore rispetto a quella del dominio euclideo nel quale sono contenuti), è stata determinata la tenacità a frattura rinormalizzata [5]. Mandelbrot [10] ha evidenziato la presenza di uno *scaling* non uniforme (multifrattale) dei frattali naturali, diverso da quello uniforme dei frattali matematici, cioè nella realtà fisica interviene una transizione dal regime frattale (eterogeneo), per dimensioni strutturali piccole, ad uno euclideo (omogeneo) per dimensioni strutturali sufficientemente grandi rispetto ad una dimensione caratteristica del materiale [6]. Ciò implica che l'effetto del disordine microstrutturale di un materiale sul comportamento meccanico macroscopico tende a scomparire al crescere della dimensione strutturale.

Per quanto riguarda l'effetto di scala relativo alla resistenza a fatica, numerose risultanze sperimentali sono espresse in termini di curve S-N [11]. La resistenza a fatica decresce all'aumentare della dimensione strutturale, ma le condizioni di carico nella prova sperimentale (tensione-compressione, flessione semplice alternata, flessione rotante, ecc) influenzano significativamente tale decremento. Le due teorie comunemente accettate per interpretare l'effetto di scala nella fatica sono: Teoria statistica (Weibull [3]); Teoria basata sul gradiente della tensione (ad es. [12]). Quest'ultima interpretazione è fondata sull'ipotesi che, affinché avvenga la rottura per fatica, occorre che una regione finita di materiale sia soggetta ad un'ampiezza di tensione più grande di un valore caratteristico. La dimensione di tale regione dipende dalla microstruttura del materiale (nei metalli, ad esempio, dalla dimensione del grano). Gli autori della presente nota hanno recentemente proposto una spiegazione dell'effetto di scala relativamente al limite di fatica applicando concetti frattali, cioè modellando la sezione reagente della struttura attraverso un insieme frattale lacunoso. Sono state pertanto ricavate una legge di scala monofrattale [13] ed una multifrattale [14].

Anche nel fenomeno di propagazione di una fessura dominante soggetta a carichi ciclici si può riscontrare un effetto di scala. Utilizzando un'analisi dimensionale e concetti di similitudine, è stata proposta un'interpretazione dell'effetto di scala sulla propagazione a fatica di fessure in materiali metallici [15]. Alcuni dati sperimentali relativi alla propagazione a fatica di fessure nel calcestruzzo [16] mostrano che, per un dato valore dell'ampiezza del fattore di intensificazione degli sforzi, la velocità di propagazione della fessura decresce all'aumentare della dimensione strutturale.

Nella presente nota vengono utilizzati alcuni concetti della geometria frattale per modellare le superfici di frattura. Quindi vengono discusse alcune definizioni sia per l'energia di frattura che per il fattore di intensificazione degli sforzi, basate su

dimensioni fisiche diverse da quelle classiche. Viene infine proposta una legge di propagazione a fatica di fessure, che tiene conto delle dimensioni strutturali, per interpretare alcuni dati sperimentali relativi ad un calcestruzzo ad alta resistenza.

ENERGIA DI FRATTURA E FATTORE DI INTENSIFICAZIONE DEGLI SFORZI PER FESSURE FRATTALI

Esaminiamo il problema piano di un solido contenente una fessura. Dal punto di vista macroscopico, la fessura è considerata come un taglio rettilineo di lunghezza a (dimensione proiettata o euclidea). Trattando la fessura come una curva frattale invasiva autosomigliante deterministica, la sua morfologia è simile alle diverse scale di osservazione (cioè ai diversi passi nella procedura di generazione frattale). Alla n -esima scala di osservazione la lunghezza della fessura è pari ad a_n , mentre la lunghezza della fessura frattale alla 0 -esima scala è uguale a quella euclidea, cioè $a_0 = a$. L'applicabilità del modello frattale autosomigliante è confinata al cosiddetto intervallo di scala mesoscopico del materiale, definito da un limite superiore, corrispondente alla dimensione geometrica del corpo fessurato, e da uno inferiore, rappresentato dalla dimensione della microstruttura del materiale (dalla dimensione degli inerti nel calcestruzzo oppure dalla dimensione dei grani nei metalli) [6].

E' stata proposta una nuova definizione dell'energia di frattura, detta energia di frattura rinormalizzata G^* , che risulta indipendente dalla scala di osservazione [5]. Quindi l'energia totale dissipata dalle superfici di frattura può essere scritta in funzione di G^* come :

$$W_s = G^* a^* \quad (1)$$

dove a^* è la lunghezza frattale della fessura, avente dimensioni fisiche $[a^*] = [L]^a$, con $a = 1 + d$, e $[G^*] = [F] [L]^{-(1+d)}$.

Consideriamo ora, nel contesto di una trattazione delle fessure frattali, l'approccio energetico di Griffith al problema della lastra infinita di spessore unitario, contenente una fessura di lunghezza $2a$ e soggetta ad una tensione uniforme \mathbf{s} [5]. L'energia di deformazione elastica, rilasciata a causa della fessura, dipende dalla sua lunghezza euclidea, cioè :

$$W_e = \frac{\nu \mathbf{s}^2 a^2}{E} \quad (2)$$

D'altra parte, l'energia superficiale dissipata in corrispondenza delle facce della fessura può essere espressa tramite l'energia di frattura rinormalizzata G^* (vedi Eq. (1)):

$$W_s = 2 G^* a^* \quad (3)$$

Differenziando le Eq. (2) e (3) rispetto ad a ed a^* ed osservando che $a^* = a^{1+d}$, otteniamo :

$$dW_e = \frac{2 \mathbf{p} \mathbf{s}^2}{E} a da \quad (4a)$$

$$dW_s = 2 G^* da^* = 2 (1+d) G^* a^d da \quad (4b)$$

Il bilancio energetico $dW_e = dW_s$ produce :

$$\mathbf{s}^2 \mathbf{p} a^{1-d} = (1+d) G^* E \quad (5)$$

E' stata proposta un'estensione al caso delle fessure frattali sia della classica definizione di Westergaard del fattore di intensificazione degli sforzi (Stress Intensity Factor, SIF) per il problema della lastra infinita uniformemente tesa ($K_I = \mathbf{s} \sqrt{\mathbf{p} a}$), sia della definizione di SIF critico (tenacità a frattura) di Irwin per uno stato di sforzo piano ($K_{IC} = \sqrt{G E}$), definendo le seguenti quantità rinormalizzate [5] :

$$K_I^* = \mathbf{s} \left(\mathbf{p} a^{1-d} \right)^{1/2} = K_I a^{-\frac{d}{2}} \quad (6a)$$

$$K_{IC}^* = \left[(1+d) G^* E \right]^{1/2} \quad (6b)$$

cosicché l'Eq. (5) diventa :

$$K_I^{*2} = K_{IC}^{*2} \quad (7)$$

I valori rinormalizzati K_I^* e K_{IC}^* hanno le seguenti dimensioni fisiche :

$$\left[K_I^* \right] = [F] [L]^{-\frac{3+d}{2}} \quad (8)$$

PROPAGAZIONE A FATICA DI FESSURE FRATTALI

La nota legge di Paris descrive la propagazione a fatica di fessure per valori intermedi di ΔK_I :

$$\frac{da}{dN} = C \left(\Delta K_I \right)^m \quad (9)$$

dove C ed m sono costanti del materiale, N è il numero di cicli per fatica, da/dN è la velocità di propagazione di fessura e ΔK_I è l'ampiezza del fattore di intensificazione degli sforzi. Numerose evidenze sperimentali mostrano un effetto di scala nella propagazione a fatica di fessure, cioè la velocità di propagazione sembra dipendere dalle

dimensioni dell'elemento strutturale testato. Quindi, utilizzando le grandezze rinormalizzate sopra descritte, è stata proposta la seguente legge di Paris modificata [17]:

$$\frac{da^*}{dN} = C \left(\Delta K_I^* \right)^m \quad (10)$$

L'Eq. (10), espressa attraverso le quantità a^* e K_I^* , è indipendente dalla scala. Ricordando che $a^* = a^{1+d}$, si può scrivere la seguente relazione :

$$\frac{da^*}{dN} = \frac{da^*}{da} \frac{da}{dN} = (1+d) a^d \frac{da}{dN} \quad (11)$$

Utilizzando le Eq. (6a) e (11), l'Eq. (10) diventa :

$$\frac{da}{dN} = \frac{C}{1+d} a^{\mathbf{b}_1} \Delta K_I^m \quad (12a)$$

essendo

$$\mathbf{b}_1 = -d \left(1 + \frac{m}{2} \right) \quad (12b)$$

Per corpi con fessure geometricamente simili, a è proporzionale a D (cioè $a = \mathbf{x} D$). Quindi l'Eq. (12a) diventa :

$$\frac{da}{dN} = C_1(D) \Delta K_I^m \quad (13a)$$

essendo

$$C_1(D) = \frac{C}{1+d} \mathbf{x}^{\mathbf{b}_1} D^{\mathbf{b}_1} \quad (13b)$$

una funzione della dimensione strutturale D . In altre parole, la legge di propagazione a fatica di fessure, Eq. (13a), dipende dalle dimensioni strutturali. Infatti tale equazione è formalmente simile alla classica legge di Paris (Eq. (9)), ma il coefficiente C_I dipende da D , mentre il coefficiente C nell'Eq. (9) rappresenta una costante del materiale. La velocità di propagazione da/dN decresce con l'aumento di D essendo $\mathbf{b}_1 < 0$ (Fig. 1). Si noti che, per $d = 0$ (fessura euclidea), C_1 diventa indipendente da D e quindi non si ha effetto di scala.

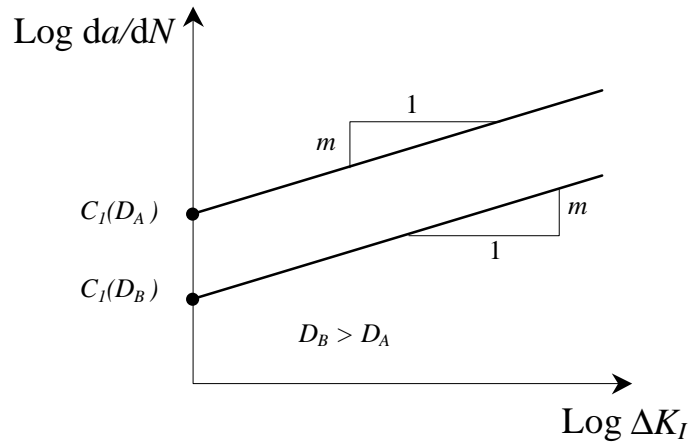


Figura 1: Effetto di scala nella legge di propagazione a fatica di fessure.

APPLICAZIONE A PROVE SPERIMENTALI

Al fine di mostrare come applicare la legge di scala precedentemente discussa (vedi Eq. (13)) vengono esaminati alcuni risultati sperimentali, relativi alla propagazione a fatica di fessure in provini di calcestruzzo ad alta resistenza. Sono state eseguite prove di fatica per tre differenti tipi di provini inflessi su tre punti [16]. L'altezza dei provini è rispettivamente uguale a $D_A = 38$ mm, $D_B = 108$ mm e $D_C = 304$ mm. La luce L di ogni provino è pari a 2.5 volte l'altezza, mentre lo spessore è pari a 38 mm; la lunghezza iniziale della fessura è pari a $D/6$. I rapporti in peso dei componenti la miscela di calcestruzzo sono i seguenti: 1.00 cemento Portland, 0.316 acqua, 0.132 cenere ventilata, 0.0507 fumi di silice, 2.18 inerte frantumato di diametro massimo, 1.51 sabbia silicea, 0.0019 ritardante, 0.00915 superplasticizzante. La massima dimensione dell'inerte è uguale a 9.5 mm. La resistenza media a compressione per provini cilindrici, valutata prima di eseguire le prove a fatica, è risultata uguale a 90.3 MPa.

I dati relativi alla velocità di propagazione della fessura in funzione dell'ampiezza del fattore di intensificazione degli sforzi sono riportati in Fig. 2 (17, 16 e 12 punti sperimentali rispettivamente per D_A , D_B e D_C), unitamente alle rette interpolanti (rette di *best-fitting*) ottenute tramite l'Eq. (13a). Le rette tratteggiate si riferiscono ai parametri m ($m_A = 8.444$, $m_B = 8.603$, $m_C = 7.417$) e C_I ($\text{Log } C_I(D_A) = -4.719$, $\text{Log } C_I(D_B) = -5.561$, $\text{Log } C_I(D_C) = -5.720$) che meglio interpolano i dati sperimentali. Il coefficiente di correlazione R risulta rispettivamente uguale a 0.965, 0.905 e 0.761 per D_A , D_B e D_C .

Per le tre serie di provini con differente diametro si può notare una piccola variazione dell'inclinazione delle rette di *best-fitting*. Pertanto considerando la pendenza media ($\bar{m} = 8.155$) si ottengono i seguenti valori per C_I : $\text{Log } C_I(D_A) = -4.690$ ($R = 0.964$), $\text{Log } C_I(D_B) = -5.481$ ($R = 0.902$), $\text{Log } C_I(D_C) = -5.720$ ($R = 0.753$) (vedi linee continue di Fig. 2). Utilizzando la legge che lega C_I a β_I (Eq. (13b)), può essere determinato l'esponente β_I ($\beta_I = -1.358$, $R = 0.974$), come mostrato in Fig. 3. Quindi il corrispondente valore di d , ottenuto tramite l'Eq. (12b), risulta essere uguale a 0.267.

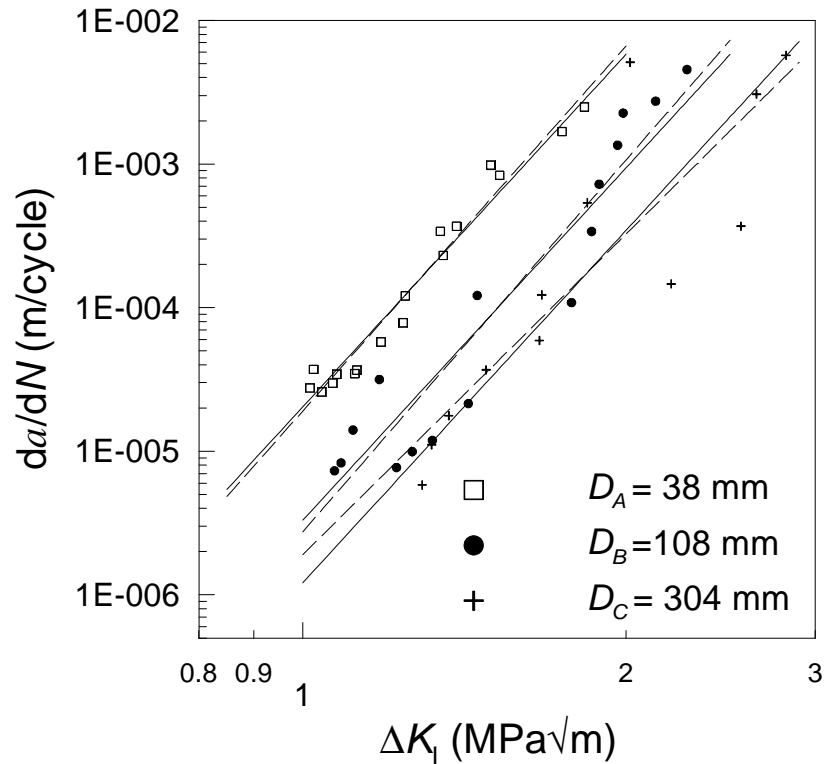


Figura 2: Propagazione a fatica di fessure per un calcestruzzo ad alta resistenza [16] e provini di diverse dimensioni: le curve tratteggiate si riferiscono alle pendenze di best-fitting ($m_A=8.444$, $m_B=8.603$, $m_C=7.417$); le curve continue si riferiscono alla pendenza media ($\bar{m}=8.155$).

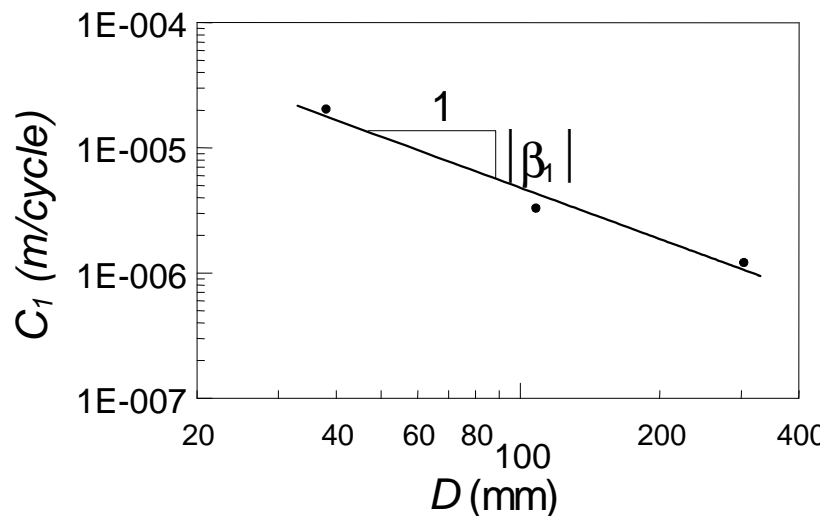


Figura 3: Best-fitting del parametro C_1 per determinare \mathbf{b}_1 (Eq. (13b)) e l'incremento frattale d (Eq. (12b)) per un calcestruzzo ad alta resistenza [16].

CONCLUSIONI

Recentemente è stata definita una grandezza (energia di frattura rinormalizzata) che risulta indipendente dalla scala di osservazione dell'insieme frattale [5]. Quindi, esaminando il classico problema di Griffith alla luce della natura frattale delle fessure, è stato ottenuto il fattore di intensificazione degli sforzi rinormalizzato, che possiede dimensioni fisiche differenti da quelle classiche.

Nella presente nota, tale fattore di intensificazione degli sforzi è stato introdotto nella legge di Paris relativa alla propagazione a fatica di fessure, così da ottenere una legge dipendente dalle dimensioni dell'elemento strutturale. Tale legge è stata utilizzata per interpretare teoricamente alcuni dati sperimentali relativi ad un calcestruzzo ad alta resistenza. Dall'interpolazione dei risultati sperimentali è stato determinato il valore dell'incremento dimensionale frattale d per il calcestruzzo esaminato.

BIBLIOGRAFIA

1. Griffith A.A., "*The phenomenon of rupture and flow in solids*", Philosophical Transactions of Royal Society 1921, **A221** 163-198
2. Peterson R.E., "*Model testing as applied to strength of materials*", Journal of Applied Mechanics 1933, **1** 79-85
3. Weibull W., "*A statistical theory for the strength of materials*", Stockholm, Swedish Royal Institute for Engineering Research 1939
4. Bazant Z.P., "*Size effect in blunt fracture: concrete, rock, metal*", Journal of Engineering Mechanics ASCE 1984, **110** 518-535
5. Carpinteri A., "*Scaling laws and renormalization groups for strength and toughness of disordered materials*", International Journal of Solids and Structures 1994, **31** 291-302
6. Carpinteri A., Chiaia B., "*Multifractal scaling laws in the breaking behaviour of disordered materials*", Chaos, Solitons & Fractals 1997, **8** 135-150
7. Mandelbrot B.B., "*The fractal geometry of nature*", New York, W.H. Freeman and Company 1982
8. Wilson K.G., "*Renormalization group and critical phenomena*", Physical Review 1971, **B4** 3174-3205
9. Mandelbrot B.B., Passoja D.E., Paullay A.J., "*Fractal character of fracture surfaces of metals*", Nature 1984, **308** 721-722
10. Mandelbrot B.B., "*Self-affine fractals and fractal dimension*", Physica Scripta 1985, **32** 257-260
11. Carpinteri A., Landini A., Spagnoli A., "*Theoretical interpretation of size effect in fatigue*" Invited Lecture, Proceedings of the 7th Summer School of Fracture Mechanics 2001, Poland 67-83
12. Findley W.N., "*An explanation of size effect in fatigue of metals*", Journal of Mechanical Sciences 1972, **14** 424-425
13. Carpinteri A., Landini A., Spagnoli A., "*A possible explanation of size effect in fatigue strength of metals*", Proceedings of the 10th International Congress of Fracture (ICF10)2001, Hawaii
14. Carpinteri A., Spagnoli A., Vantadori S., "*An approach to size effect in fatigue of metals using fractal theories*", Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures 2002 (in stampa)
15. Barenblatt G.I., Botvina L.R., "*Incomplete self-similarity of fatigue in the linear range of crack growth*", Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures 1980, **3** 193-202
16. Bazant Z.P., Shell W.F., "*Fatigue fracture of high-strength concrete and size effect*", ACI Materials Journal 1993, **90** 472-478
17. Carpinteri A., Spagnoli A., "*A fractal analysis of size effect on fatigue crack growth*", submitted to Engineering Fracture Mechanics 2002