

STIMA DELLE PROPRIETA' MECCANICHE EFFETTIVE DI UN SOLIDO 2D CON IL METODO DELLE CELLE

Francesca Cosmi

*Dipartimento di Energetica, Università di Trieste, via A. Valerio 10, 34127 Trieste
e-mail: cosmi@univ.trieste.it, tel. +39.040.5583431, fax +39.040.568469*

ABSTRACT

A new numerical model estimating the effect of randomly located micro-cracks on the structural response of a material is presented. Both heterogeneities of the structure and stress concentrations are taken into account by the model, that makes use of an homogeneous matrix in which randomly distributed cracks are present. The Cell Method is a recently developed numerical method that can be used to solve such a model. Both elastic and elastic-plastic behaviors can be included in the model. The Cell Method is presented and results of simulations from tests in both the elastic and plastic fields are discussed.

SOMMARIO

Nel lavoro viene presentato un modello discreto che consente la stima dell'effetto che una distribuzione random di micro-cricche, modellate mediante celle vuote triangolari all'interno di una matrice di celle del materiale costituente, ha sulle proprietà strutturali. Sul solido bidimensionale così modellato è possibile simulare una prova meccanica, assumendo in ingresso le proprietà meccaniche del materiale costituente, note, ed ottenendo in uscita la risposta del materiale danneggiato. Il modello proposto può essere risolto mediante il Metodo delle Celle, metodo numerico di recente sviluppo che consente una formulazione diretta discreta delle equazioni di equilibrio e risulta quindi particolarmente adatto nella trattazione di problemi in cui sono presenti eterogeneità o comunque discontinuità. Vengono prese in considerazione sia le eterogeneità della struttura sia le concentrazioni di sforzo. Nel lavoro vengono richiamati alcuni aspetti del Metodo delle Celle, dapprima in campo elastico, e successivamente assumendo per il costituente un comportamento elastico-perfettamente plastico. Vengono presentati i risultati di diverse simulazioni, che indicano come il modello proposto possa essere vantaggiosamente impiegato per la determinazione del comportamento strutturale di un solido in cui sia presente una distribuzione casuale di micro-cricche.

INTRODUZIONE

Nel tentativo di caratterizzare il comportamento meccanico di materiali in presenza di micro-cricche poligonali sono stati proposti numerosi approcci, con conseguente sviluppo di modelli analitici, statistici, FEM [1-4].

In questo lavoro viene presentato un modello discreto, risolto mediante il Metodo delle Celle, che consente la stima dell'effetto che una distribuzione random di micro-cricche ha sulle proprietà strutturali di un solido bidimensionale.

Il Metodo delle Celle (CM) è un metodo numerico di recente sviluppo [5], profondamente diverso nella sua concezione da altri metodi ampiamente utilizzati, quali ad esempio il FEM, rispetto ai quali presenta alcuni vantaggi. Viene attualmente impiegato in diversi campi, quali la meccanica della frattura, l'acustica, l'elettromagnetismo. Sono attualmente sviluppate anche applicazioni del metodo alla modellazione del comportamento meccanico di materiali porosi, sia in campo biomeccanico [6], sia per quanto riguarda la leghe sinterizzate, come descritto in [7] e [8], con risultati in buon accordo con i dati sperimentali.

Un aspetto che rende il CM particolarmente interessante, è che quello delle Celle è un metodo numerico "veramente" discreto, nel senso che utilizza direttamente le variabili globali – integrali – per scrivere le equazioni di campo, non per un punto – il nodo – ma per una regione, senza ricorrere ad operazioni di differenziazione.

Di conseguenza il CM è applicabile in tutti quei casi in cui le variabili non possono essere differenziate. In particolare, grandi variazioni del campo degli spostamenti non costituiscono un limite all'applicazione del metodo. Viene così a cadere un'importante limitazione propria degli elementi finiti e cioè il fatto che "le fluttuazioni di modulo elastico da elemento ad elemento dovrebbero essere piccole" [9], ed è possibile utilizzare il CM per risolvere modelli come quelli rappresentati in Fig.1, in cui celle vuote sono distribuite casualmente all'interno di una matrice di celle del materiale costituente.

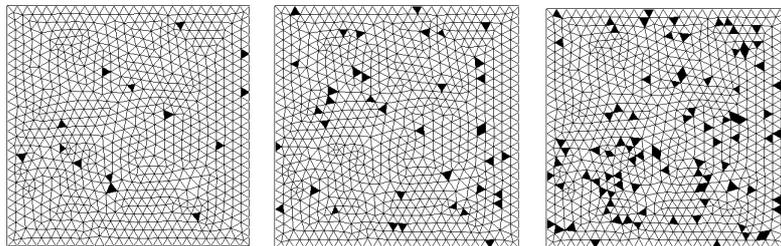


Figura 1: Celle vuote (nere) distribuite tra le celle del materiale costituente (bianche)

IL METODO DELLE CELLE

Le basi del Metodo delle Celle nascono da una classificazione delle variabili coinvolte nel problema in esame.

Le *variabili di configurazione* (spostamenti, velocità, tensore di deformazione, ecc.) vanno associate al complesso primale. Gli spostamenti dei vertici delle celle (i *nodi*) costituiscono le incognite del problema.

Le *variabili di sorgente* (forze, momenti di quantità di moto, tensore degli sforzi, ecc.) vanno associate al complesso duale.

Utilizzando celle triangolari, per problemi piani con interpolazione lineare del campo degli spostamenti interni alla cella si adottano nel seguito (ma sono possibili altre scelte):

- un complesso di celle triangolari come celle primali;

- un complesso duale ottenuto congiungendo i baricentri delle celle primali e dei loro lati, come illustrato in Fig.2.

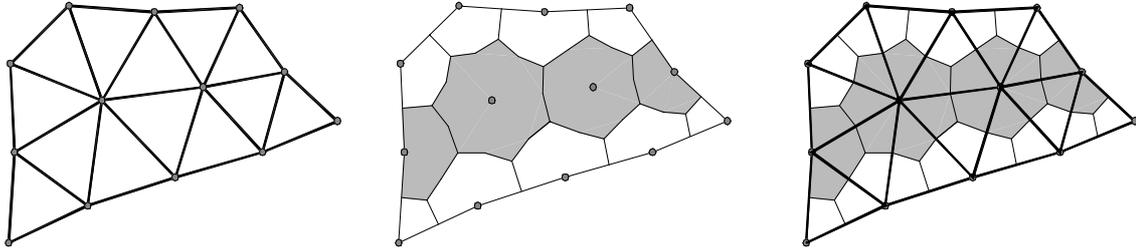


Figura 2: Complesso primale, duale e loro insieme

Analogamente al FEM, si hanno le relazioni

$$\begin{aligned} \{e\}_c &= [B]_c \{u\}_c \\ \{s\}_c &= [D]_c \{e\}_c \end{aligned}$$

con evidente significato dei simboli.

Avendo introdotto i due complessi, si può facilmente riconoscere che ogni cella duale può essere considerata come una regione di influenza per il nodo che giace al suo interno. L'equazione di bilancio viene ora scritta direttamente in forma discreta sulle celle duali.

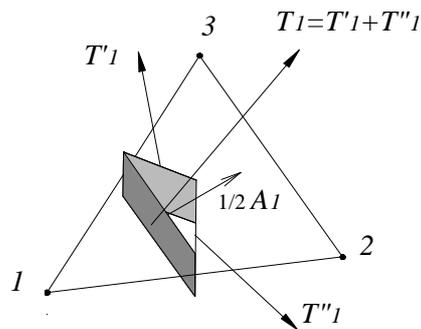


Figura 3: Forze agenti attraverso le superfici della regione di influenza del nodo 1 della cella.

Per poter scrivere l'equazione di equilibrio della cella duale è necessario esprimere le forze scambiate attraverso le superfici dei poligoni duali che competono alla cella (Fig.3)

$$\{T\}_c = -tA_c [B]_c^T [D]_c [B]_c \{u\}_c = -[K]_c \{u\}_c \quad (1)$$

dove $\{T\}_c = \{T_{1x} \ T_{1y} \ T_{2x} \ T_{2y} \ T_{3x} \ T_{3y}\}^T$ e $[K]_c$ rappresenta la matrice di rigidezza 6x6 della cella.

Posto:

- U_h regione di influenza (cella duale) del nodo h (Fig. 4);
- $\{T_h\}$ forza totale esercitata dalle celle che circondano il nodo h sulla superficie di U_h ,

$$\{T_h\} = \sum_c \{T_h\}_c ;$$

- $\{F_h\}$ risultante delle forze di volume $\{F_h\}_c$ e delle forze esterne $\{B_h\}_c$ che agiscono su U_h attraverso le celle sul contorno

$$\{F_h\} = \sum_c \{F_h\}_c + \sum_c \{B_h\}_c ;$$

la condizione di equilibrio della regione U_h

$$\{T_h\} + \{F_h\} = 0$$

rappresenta un sistema di $2n$ equazioni lineari nelle $2n$ incognite u_{ix}, u_{iy} ($i=1, \dots, n$), che può essere scritto nella forma

$$[K]\{u\} = \{F\} \quad (2)$$

e risolto con i metodi usuali.

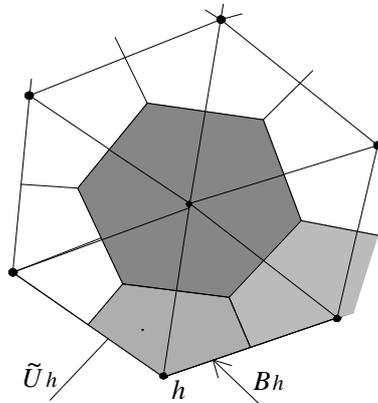


Figura 4: Equilibrio della regione di influenza del nodo h

Si può osservare che alcuni aspetti del CM possono ricordare il Metodo dei Volumi Finiti o il cosiddetto approccio diretto – o fisico – utilizzato da Hubner [10] per introdurre il Metodo degli Elementi Finiti e dedurre le equazioni proprie di alcuni semplici elementi, metodi che non riscosero molto successo, probabilmente per una difficoltà intrinseca a sviluppare elementi di ordine superiore.

Al contrario, è relativamente semplice sviluppare approssimazioni di ordine superiore con il Metodo delle Celle, come per esempio riportato in [11] per l'elasticità piana.

I risultati ottenuti sono generalmente in accordo con quelli forniti dagli altri metodi numerici, ed in alcuni casi accuratezza e convergenza possono risultare anche superiori di quelle ottenibili con elementi analoghi.

Il lavoro qui presentato non utilizza approssimazioni di ordine superiore ma sfrutta l'altra caratteristica propria del CM: la possibilità di modellare eterogeneità che hanno dimensione caratteristica dello stesso ordine di quella della discretizzazione.

SIMULAZIONI IN CAMPO ELASTICO

In un primo gruppo di simulazioni, in campo elastico, è stato utilizzato un complesso di $N=1498$ celle primali, delle quali n vuote. Le celle vuote sono distribuite casualmente tra le altre, in materiale ferroso ($E=210$ GPa, $\nu=0.3$), come illustrato in Fig.1.

Sono state considerate diverse densità di microcricche triangolari e sono state eseguite 5 prove di trazione simulate per ciascuna, imponendo uno spostamento di un'estremità del modello, mantenendo vincolata l'altra estremità e lasciando libere le contrazioni laterali del campione. In Fig.5 è riportato il rapporto E^*/E , tra il modulo elastico del modello, calcolato nelle simulazioni, e quello del materiale originario (senza vuoti) in funzione del parametro $f=n/N$.

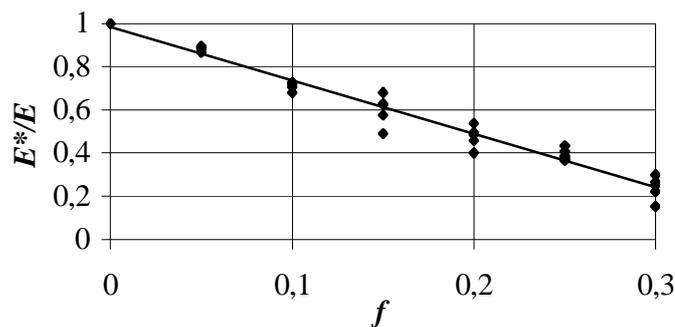


Figura 5: Rapporto E^*/E in funzione di $f=n/N$ nelle simulazioni

Le fluttuazioni che possono essere osservate nel grafico dipendono dal fatto che le diverse distribuzioni casuali di cricche corrispondono a diverse microstrutture, caratterizzate da diverse risposte elastiche. Nel grafico viene anche riportata la linea di tendenza, con pendenza pari a -2.47 . L'andamento è simile, ma meno pronunciato, di quello riportato in [4, pp.360-361] per simulazioni FEM con cricche di forma quadrata.

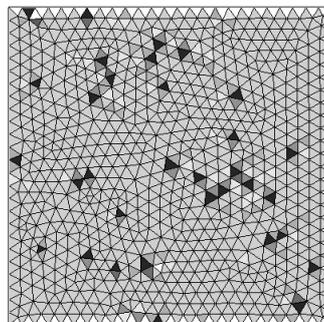


Figura 6: Concentrazioni di sforzo presso le celle vuote (in nero) in una simulazione

La Fig.6 mostra le concentrazioni di sforzo nei pressi delle celle vuote (in nero) in una delle simulazioni.

Il comportamento per basse concentrazioni di cricche è esaminato in maggior dettaglio in Fig.7, dove sono riportati i risultati di 25 simulazioni ($N = 1498$).

Si possono ancora osservare delle piccole fluttuazioni del valore calcolato del modulo elastico.

La linea grossa nel grafico corrisponde al modello proposto in [3], che corrisponde ad una pendenza maggiore di quella calcolata nelle simulazioni.

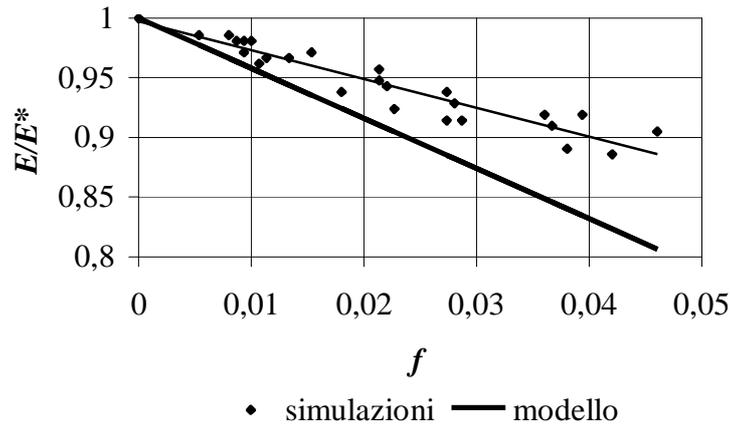


Figura 7: Rapporto E^*/E in funzione di $f=n/N$.

PLASTICITA'

Nell'ambito del Metodo delle Celle è anche possibile implementare modelli costitutivi diversi da quello elastico lineare [12]. Assumendo un comportamento elastico-perfettamente plastico per il materiale integro, ed adottando il criterio di von Mises, per una cella primale si ha

$$\{\mathbf{s}\}_c = [D]_c [\{\mathbf{e}\}_c - \{\mathbf{l}\}_c]$$

in cui $\{\lambda\}_c$ rappresenta il tensore di deformazione inelastico della cella, uniforme all'interno della stessa. Seguendo un approccio classico, il problema viene risolto dividendo la storia di carico in passi, all'inizio di ciascuno dei quali sono noti gli spostamenti nodali e lo stato di sforzo interno di ciascuna cella.

L'equazione (1) in termini incrementali diventa ora

$$\{\mathbf{DT}\}_c = -[K]_c \{\mathbf{Du}\}_c + [L]_c \{\mathbf{DI}\}_c \quad (3)$$

e la relazione fondamentale (2) diventa

$$[K]\{\mathbf{Du}\} = \{\mathbf{DF}\} + [L]\{\mathbf{DI}\} \quad (4)$$

Inizialmente $\{\Delta\lambda\} = 0$ ed il sistema può essere risolto per $\{\Delta u\}$, per cui è possibile calcolare le componenti che definiscono lo stato di sforzo $\{\sigma\}_c$ e lo stato di sforzo deviatorico $\{s\}_c$, corrispondenti a questa soluzione.

Viene introdotto il criterio di von Mises, considerando il raggio che definisce il locus dello snervamento secondo questa teoria. Se la cella è in fase elastica, quella trovata rappresenta la soluzione e non si itera. Se invece la cella è in fase plastica la quantità $\{\Delta\lambda\}_c$ viene utilizzata per aggiornare $\{s\}_c$. Il processo viene ripetuto fino a convergenza per ogni cella, dopodichè viene preso in considerazione il passo successivo.

Come benchmark è stato considerato il problema di trave soggetta a flessione, per il quale è nota la soluzione in forma chiusa [13]. Come discusso in [14], l'ordine di convergenza è 2 per la soluzione calcolata in regime elastico (uguale a quello ottenibile col FEM per triangoli a 3 nodi) mentre è 1.6 dall'inizio e fino a completa plasticizzazione .

La Fig.8 mostra la plasticizzazione progressiva durante la simulazione con $N = 1498$ celle con 38 celle vuote (nere) distribuite casualmete nel materiale in fase elastica (bianco) e plastica (grigio).

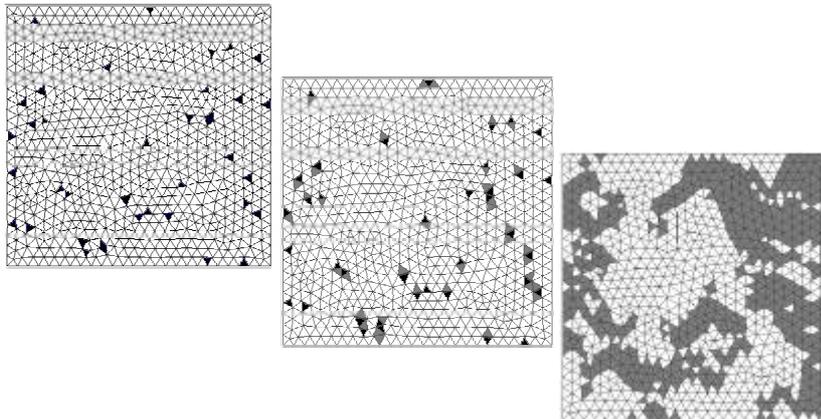


Figura 8: Plasticizzazione progressiva.

Per il materiale integro costituente le celle sono stati assunti: $E = 210$ GPa, $\nu = 0.3$ in fase elastica, carico di snervamento $R_y = 430$ MPa, $\nu = 0.5$ in fase plastica.

Il risultato della simulazione è riportato in Fig.9 sotto forma di diagramma sforzi-deformazioni. Per il materiale danneggiato si ha un modulo effettivo $E^* = 201.3$ GPa nella parte iniziale, macroscopicamente elastica, del diagramma. Nella stessa figura è anche riportata, per confronto, la curva sforzi-deformazioni ricavata dalla simulazione del materiale non danneggiato.

CONCLUSIONI

E' stato presentato un nuovo modello discreto, nel quale un certo numero di celle vuote triangolari sono distribuite casualmente all'interno del materiale, risolvibile con il Metodo delle Celle, in grado di considerare sia la presenza delle eterogeneità sia le concentrazioni di sforzo.

E' stato introdotta una formulazione opportuna del Metodo delle Celle ed è stato simulato il comportamento del materiale danneggiato sia in campo elastico che in campo plastico.

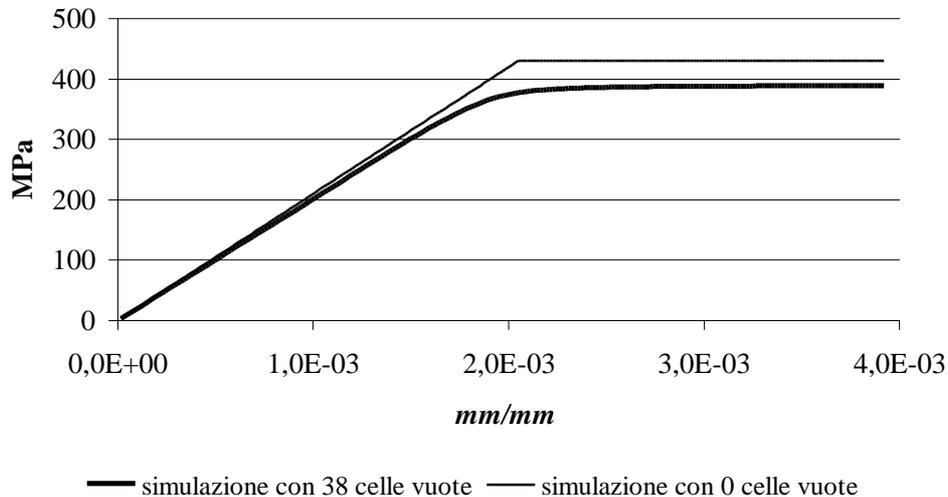


Figura 9: Curva sforzi-deformazioni

BIBLIOGRAFIA

1. Jasiuk, I., Chen, J. and Thorpe, M.F., *Appl. Mech. Rev.*, Vol.47, S18-S28, (1994)
2. Kachanov, M., Tsukrov, I. and Shafiro, B., *Effective Moduli of Solids with cavities of Various Shapes*, in: *Micromechanics of Random Media*, M. Ostoja-Starzewski and I. Jasiuk, Eds. ASME Book No AMR139, S151-S174, (1994)
3. Day, A.R., Snyder, K.A., Garboczi, E.J. and Thorpe, M.F., *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 40, (1992)
4. Krajcinovic, D., *Damage Mechanics*, Elsevier, North Holland, (1996)
5. Tonti, E., *A Direct Discrete Formulation of Field Laws: The Cell Method*, *CMES*, 2, 237-258, (2001)
6. Cosmi F., Dreossi D., Vittur F., *Bone Mechanical Properties Estimation with the Cell Method*, Proc. 18th DAS on Experimental Methods in Solid Mechanics, Steyr, Austria, (2001)
7. Cosmi F., Di Marino F., *Modelling of the Mechanical Behaviour of Porous Materials: A New Approach*, *Acta of Bioengineering and Biomechanics*, 3, (2001)
8. Cosmi, F., *Cell Method Simulation of Sintered Alloys Mechanical Behaviour*, in Proc. of TC15-Imeko, Bertinoro (Forlì), Italy, 33-34, (2002)
9. Roux, S., *Continuum and Discrete Description of Elasticity*, in *Statistical Models for the Fracture of Disordered Media*, Herrmann H.J., and Roux, S. (Eds). Elsevier, North Holland, 109-113, (1990)
10. Huebner, K.H., *The Finite Element Method for Engineers*, John Wiley & Sons, 39-59, (1995)
11. Cosmi, F., *CMES*, Vol.2, N.3, 365-372, (2001)
12. Nappi A., Rajgelj S. and Zaccaria, D., *A discrete formulation applied to crack growth problems*, in Proc. Meso Mechanics 2000 Conference, Xi'an, China, (2000)
13. Hill, R., *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford University Press, Oxford, GB, 79-81, (1956)
14. Cosmi, F., *Elasto-plasticità con il Metodo delle Celle*, in Proc. of XXX AIAS, Alghero, Italy, (2001)