

# L'USO DEL CRITERIO DELLE CURVE DI WÖHLER MODIFICATE IN PRESENZA DI INTAGLI SOLLECITATI DA CARICHI DI FATICA MULTIASSIALI

B. Atzori<sup>1</sup>, L. Susmel<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Dipartimento di Ingegneria Meccanica, Università di Padova, Via Venezia 1, 33131 Padova

<sup>2</sup>Dipartimento di Ingegneria - Università di Ferrara, Via Saragat 1, 44100 Ferrara

## ABSTRACT

In this paper the multiaxial fatigue criterion proposed by Susmel and Lazzarin, and based on the use of modified Wöhler curves (MWCM), has been reinterpreted in terms of critical distance method (CDM) in order to extend its employment to both blunt and sharply notched components subjected to multiaxial fatigue loadings. By means of a rigorous mathematical framework it has been demonstrated the exact coincidence between the MWCM and the CDM (applied in terms of point method, PM) in the presence of notches subjected to uniaxial loadings. The MWCM accuracy in the fatigue limit estimation has been evaluated by using experimental tests taken from the literature and performed by using notched specimens subjected to both uniaxial and multiaxial loadings. The method gave fatigue limit predictions within an error of about 20%, independently of material, specimen geometry and load typology.

## SOMMARIO

In questo lavoro il criterio di verifica a fatica multiassiale fondato sull'uso delle curve di Wöhler modificate (MWCM), recentemente proposto da Susmel e Lazzarin, è stato reinterpretato in termini di *critical distance method* (CDM) onde estenderne il suo utilizzo a componenti intagliati, sia blandi che acuti, sollecitati da carichi di fatica multiassiali. Partendo da una rigorosa trattazione analitica è stata, poi, dimostrata l'esatta coincidenza tra il MWCM e il CDM (applicato in termini di *point method*, PM) nel caso di intagli sollecitati da carichi uniassiali. La precisione, infine, nella stima del limite a fatica del MWCM è stata valutata mediante dati di letteratura relativi sia a prove di fatica monoassiali che a prove di fatica multiassiali condotte su provini intagliati. Il metodo si è dimostrato capace di eseguire previsioni della vita a fatica affette da un errore massimo pari al 20%, indipendentemente dal materiale, dalla geometria dei provini e dalla tipologia di carichi applicati.

## INTRODUZIONE

Nel campo della progettazione a fatica multiassiale già molti studi sono stato condotti con l'obiettivo di modellare il comportamento del materiale base sollecitato da carichi multiassiali, ovvero di prevederne la vita a fatica in assenza di gradienti di tensione generati da intagli. In particolare, lo stato dell'arte evidenzia come diverse siano le metodologie già messe a punto, e validate in modo sistematico, sia per determinare il

limite di fatica multiassiale [1] sia per stimare il numero di cicli a rottura [2] in queste particolari condizioni.

Al contrario, in presenza di intagli sollecitati da carichi multiassiali, le tecniche proposte in letteratura non consentono ancora di eseguire una progettazione affidabile e sicura, soprattutto in presenza di carichi sfasati [3]. In generale, però, i componenti reali presentano effetti di concentrazione delle tensioni e sono sollecitati, in esercizio, da sistemi di forze che generano, nei punti critici, stati di tensione multiassiali con angoli di fase che possono essere anche non nulli. Così, vista la l'attualità del problema, si comprende come la messa a punto di tecniche affidabili capaci di affrontare in modo efficace questa tipologia di situazioni possa avere una importante ricaduta a livello industriale.

La vasta diffusione, poi, dell'impiego degli elementi finiti in ambito progettuale richiederebbe che le metodologie di previsione a fatica multiassiale potessero essere facilmente applicate in fase di *post-processing* in modo automatico, ovvero senza che sia necessaria una accurata e approfondita conoscenza del problema da parte dell'operatore, come invece è richiesto da quanto attualmente suggerito in letteratura. In più, tali tecniche dovrebbero poter essere applicate in tempi che siano compatibili con le esigenze della progettazione industriale, ovvero sarebbe necessario poter ridurre il più possibile il numero delle iterazioni che consentono di ottenere informazioni che siano realmente significative per il processo di ottimizzazione del componente in studio.

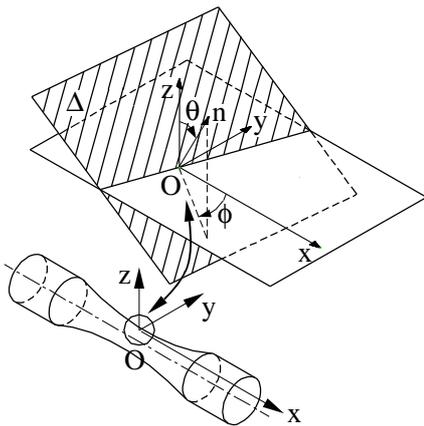


Figura 1: sistema di riferimento assoluto e definizione degli angoli  $f$  e  $q$ .

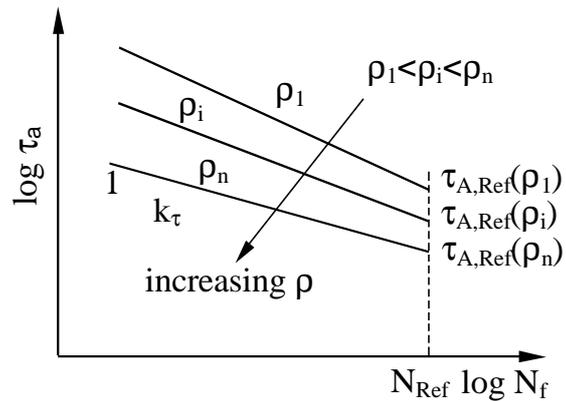


Figura 2: diagramma di Wohler modificato.

Queste esigenze si traducono, a livello pratico, nella messa a punto di un criterio che sia, innanzitutto, fondato su una semplice regola per la individuazione dei punti critici nel componente; tale criterio, in più, dovrebbe poter essere applicato in modo automatico indipendentemente dalla tipologia del carico affaticante e dell'intaglio, consentendo di ottenere risultati affidabili con un'unica formulazione in presenza di componenti lisci, intagliati e criccati; per poter essere, poi, compatibile con l'uso industriale degli elementi finiti tale metodo dovrebbe utilizzare, per la verifica a fatica, analisi condotte in campo lineare elastico, con elementi di dimensioni non troppo ridotte; infine la sua applicazione dovrebbe richiedere informazioni relative al materiale che possano essere facilmente ricavate in laboratorio, o rintracciate in manuali specialistici, o, comunque, stimabili con formule empiriche.

In questo lavoro, proprio con l'obiettivo di soddisfare a tutti i requisiti sopra elencati, il criterio proposto di recente da Susmel e Lazzarin [4], è stato esteso al caso degli intagli mediante una sua re-interpretazione in termini di *critical distance approach*.

## IL CRITERIO DELLE CURVE DI WÖHLER MODIFICATE

Si consideri, per semplicità, un provino cilindrico sollecitato da un sistema di forze cicliche che generano, nel punto critico per la resistenza a fatica, uno stato di tensione multiassiale (fig. 1). Si determini quindi, mediante il metodo della più piccola ipersfera [5], il piano che sperimenta la massima ampiezza della tensione tangenziale,  $\tau_a$ . Tale piano, in base alla teoria della deformazione ciclica dei singoli grani, può essere sempre pensato come il piano di innesco della cricca per fatica [4]. Ipotizzando, poi, che sia la formazione delle bande di scorrimento che la propagazione delle micro/macro cricche di fatica dipenda anche dal valore massimo della tensione normale al piano di innesco [4], la cui posizione nello spazio è individuata dagli angoli  $\phi^*$  e  $\theta^*$  (fig. 1), è possibile assumere che il danneggiamento a fatica multiassiale sia funzione dal rapporto tensionale del piano d'innesco espresso dalla seguente relazione:

$$\rho = \frac{\sigma_{n,\max}}{\tau_a}(\phi^*, \theta^*) \quad (1)$$

dove il massimo valore della tensione normale,  $\sigma_{n,\max}$ , consente di tenere in considerazione l'influenza delle componenti medie di tensione, in accordo con quanto suggerito da Socie [6].

Si costruisca, ora, un diagramma di Wöhler modificato avente in ascissa il numero di cicli a rottura,  $N_f$ , e in ordinata l'ampiezza della tensione tangenziale calcolata sul piano d'innesco,  $\tau_a(\phi^*, \theta^*)$ . È possibile dimostrare [4] che al variare del parametro  $\rho$ , diverse curve di Wöhler possono essere tracciate in tale diagramma, e ciascuna di esse è caratterizzata da un diverso valore della tensione di riferimento  $\tau_{A,\text{Ref}}(\rho)$ , calcolata in corrispondenza di un certo numero di cicli di riferimento  $N_{\text{Ref}}$ , e da un diverso valore della pendenza inversa  $k_\tau(\rho)$ . La rianalisi dei dati sperimentali ha permesso, poi, di dimostrare [4] come tali curve traslino verso il basso all'aumentare del valore di  $\rho$ . In particolare, assumendo che  $\tau_{A,\text{Ref}}(\rho)$  e  $k_\tau(\rho)$  varino in modo lineare con  $\rho$ , il criterio di Susmel e Lazzarin per la stima del limite di fatica multiassiale può essere formalizzato come [4]:

$$\tau_a(\phi^*, \theta^*) + \left( \tau_{A_\infty} - \frac{\sigma_{A_\infty}}{2} \right) \frac{\sigma_{n,\max}}{\tau_a}(\phi^*, \theta^*) \leq \tau_{A_\infty} \quad (2)$$

dove con  $\sigma_{A_\infty}$  e  $\tau_{A_\infty}$  si sono indicati, rispettivamente, il limite di fatica monoassiale e il limite di fatica a torsione, determinati imponendo un rapporto di ciclo pari a  $-1$ .

## IL CRITICAL DISTANCE APPROACH

Il CDM [7, 8, 9] è basato sull'idea che, nel caso monoassiale, la tensione da confrontare direttamente con il limite di fatica del materiale base possa essere calcolata o in un

punto posto sulla bisettrice dell'intaglio ad una certa distanza dall'apice (*point method*, PM), o mediato lungo la bisettrice (*line method*, LM), o, infine, mediato su un'area a forma di semicerchio centrato all'apice dell'intaglio (*area method*, AM). Il CDM può essere esplicitato in termini di PM, LM e AM, rispettivamente, come (fig. 3):

$$\sigma_{1,a}(r = a_0/2, \theta = 0) = \sigma_{A\infty} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2a_0} \int_0^{2a_0} \sigma_{1,a}(\theta = 0) dr = \sigma_{A\infty} \quad (4)$$

$$\frac{4}{\pi a_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{a_0} \sigma_{1,a} dr d\theta = \sigma_{A\infty} \quad (5)$$

Le equazioni (3), (4) e (5) mostrano come la verifica a fatica di un componente intagliato possa essere fatta in modo semplice una volta che siano noti il campo di tensione lineare-elastico nell'intorno dell'apice dell'intaglio e il valore della costante di El Haddad [10] per cricche corte,  $a_0$ . Il CDM è stato ricavato in modo rigoroso partendo dalle equazioni classiche della meccanica della frattura [9], ovvero in presenza di una cricca, ma tale metodo è stato applicato con successo anche al caso di intagli sia blandi che acuti [8, 11].

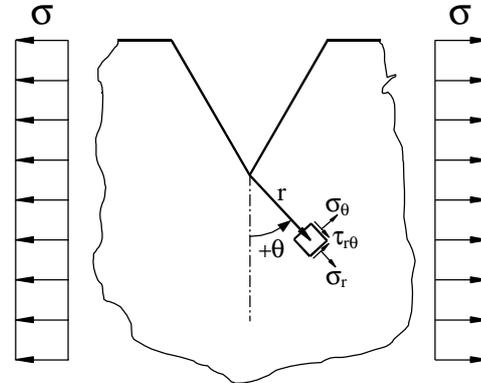


Figura 3: intaglio sollecitato da un carico remoto uniassiale.

## COINCIDENZA FRA IL PM E IL MWCM

Il CDM e MWCM sono per natura molto diversi essendo il primo basato sui concetti della meccanica della frattura lineare elastica, mentre il secondo sull'utilizzo combinato della teoria della deformazione ciclica dei singoli grani e su un approccio di piano critico. In questo paragrafo si vuole dimostrare, con semplici passaggi matematici, come nel caso monoassiale vi sia perfetta coincidenza tra il PM e il MWCM.

Si consideri allora il provino intagliato di figura 3 e lo si solleciti con un carico di fatica uniassiale avente rapporto di ciclo pari a  $-1$ , orientato perpendicolarmente alla bisettrice dell'intaglio e tale da porre il componente in condizioni di limite di fatica. Sia altresì l'angolo di apertura minore di  $90^\circ$  e il raggio di raccordo piccolo se confrontato con le dimensioni dell'intaglio, ovvero le caratteristiche geometriche dell'intaglio siano tali che il grado di singolarità del campo di tensione sia praticamente quello di una cricca. In queste condizioni si ha

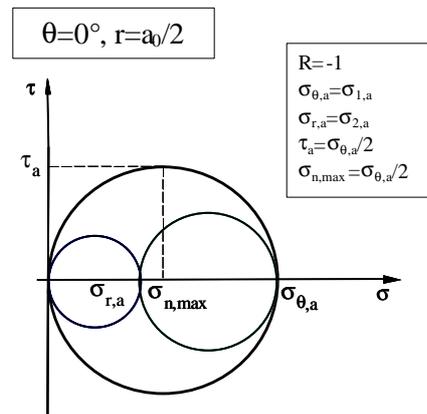


Figura 4: cerchi di Mohr in termini di ampiezza relativi ad un punto posto sulla bisettrice a distanza  $a_0/2$  dall'apice di un intaglio sollecitato da un carico uniassiale.

che l'intaglio si comporta come una cricca (*crack like notch*) e la validità del PM è rigorosa [9].

In figura 4 sono stati riportati i cerchi di Mohr in termini di ampiezza relativi al caso in esame e determinati nel punto posto sulla bisettrice ad una distanza dall'apice dell'intaglio pari ad  $a_0/2$ . Partendo dal criterio di Susmel e Lazzarin nella forma data dall'eq. 2 e osservando le identità tensionali riportate in figura 4, è possibile ricavare le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} \tau_a + \left( \tau_{A_\infty} - \frac{\sigma_{A_\infty}}{2} \right) \frac{\sigma_{n,\max}}{\tau_a} \leq \tau_{A_\infty} &\Rightarrow \frac{\sigma_{\theta,1}}{2} + \left( \tau_{A_\infty} - \frac{\sigma_{A_\infty}}{2} \right) \cdot 1 \leq \tau_{A_\infty} \Rightarrow \frac{\sigma_{\theta,1}}{2} - \frac{\sigma_{A_\infty}}{2} \leq 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sigma_{1,a}(r = a_0/2, \theta = 0) = \sigma_{A_\infty} \end{aligned} \quad (6)$$

La coincidenza tra le eq. (6) e (3) dimostra come il PM e MWCM, pur essendo fondati su basi teoriche completamente diverse, coincidono perfettamente in termini tensionali nel caso di un intaglio sollecitato da un carico uniassiale. Questa osservazione pone le basi per una rigorosa estensione in termini di *critical distance approach* del metodo di Susmel e Lazzarin al caso di intagli sollecitati da carichi multiassiali.

## IL SIGNIFICATO FISICO DEL MWCM E SUA ESTENSIONE AL CASO DI INTAGLI SOLLECITATI DA CARICHI MULTIASSIALI

Per dare una corretta interpretazione fisica al MWCM diventa necessario, a questo punto, richiamare alcuni semplici concetti di meccanica dei materiali.

Si consideri, allora, un provino liscio sollecitato da un carico di fatica uniassiale (fig. 5). L'innesco della cricca per fatica avviene in Modo II (Stage I) [12], e dopo una lunghezza di alcuni grani la cricca cambia la direzione di propagazione e comincia a propagare in Modo I (Stage II) [12]. Queste osservazioni hanno trovato anche riscontro nelle analisi sperimentali condotte da Socie e Bannantine [13], che hanno osservato, sollecitando a trazione e a torsione alterne provini cilindrici in SAE 1045, in Inconel 718 e in AISI 304, che l'innesco avviene sempre in Modo II anche quando la propagazione è dominata da Modo I.

In presenza di cricche, invece, si può dire che, in generale, la propagazione di Modo II è molto difficile da sostenere e, solitamente, la cricca cambia, dopo un certo numero di cicli, la propria direzione propagando in Modo I [14]. Nel caso, invece, di cricche sollecitate da carichi multiassiali, dopo una prima situazione iniziale dipendente dalla configurazione della prova, la cricca tende a propagare in Modo I, e questo sia in presenza di carichi in fase che fuori fase [15].

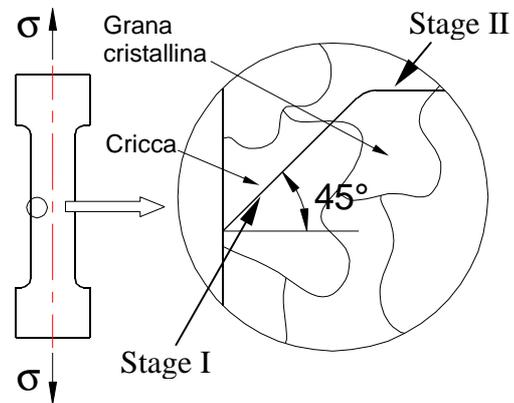


Figura 5: definizione dello Stage I e Stage II.

I due casi discussi rappresentano le due condizioni estreme di innesco e propagazione, ovvero la situazione che si ha, rispettivamente, nel caso di componenti lisci e nel caso di componenti criccati. Le evidenze sperimentali suggeriscono allora che l'entità dello Stage I diminuisce al crescere del  $K_t$ : in assenza di cricca la prima propagazione avviene sempre in Modo II, mentre in presenza di cricche essa è dominata prevalentemente da Modo I. Tuttavia si può osservare come sollecitando un provino già criccato nel campo della fatica ad alto numero di cicli, prima che la cricca ricominci la sua propagazione una parte della vita a fatica viene spesa per riportare il materiale in condizioni di propagazione. Per spiegare questo fenomeno si può ricordare come, a causa dell'elevato valore del campo di tensione in prossimità dell'apice della cricca, l'apice stesso subisce un arrotondamento a causa delle deformazioni plastiche (*crack blunting*) e per questo motivo, per quanto ridotto, uno Stage I è sempre presente anche nel caso di un provino pre-criccato. In questa situazione il campo di tensione ha, però, caratteristiche tali da imporre un repentino cambio di direzione favorendo un meccanismo di propagazione governato da Modo I. In ogni modo, anche nel caso estremo di cricca, ovvero quando  $K_t$  è pari ad infinito, un modello di danneggiamento di Modo II resta comunque rappresentativo del fenomeno.

Partendo da queste considerazioni e ricordando la corrispondenza tra il PM e il MWCM nel caso monoassiale diventa, adesso, possibile suggerire una plausibile spiegazione sul motivo per cui il CDM lavori in modo corretto anche nel caso di intagli blandi. Infatti, anche se lo sviluppo teorico del CDM è basato su una propagazione prevalentemente di Modo I, la corrispondenza tra le eq. (3) e (6) garantisce che, applicando il PM al caso di intagli blandi si stia, di fatto, applicando un modello basato su un danneggiamento di Modo II, ovvero in modo "inconsapevole" il danneggiamento viene modellato ancora correttamente. Ovviamente questo ragionamento può essere applicato in modo del tutto simmetrico al caso di impiego del MWCM con un componente criccato: anche ammettendo che lo Stage I abbia una importanza trascurabile e che la propagazione avvenga solo in Modo I, la corrispondenza tensionale garantisce comunque che il danneggiamento venga interpretato in modo corretto, anche se il criterio è basato su un meccanismo di primo innesco governato da Modo II.

Queste considerazioni valgono, ovviamente, per il caso monoassiale. Resta a questo punto da estendere l'applicabilità del MWCM al caso di intagli sollecitati da carichi multiassiali. Si consideri allora il componente intagliato riportato in figura 6 e sollecitato da un carico esterno di fatica multiassiale qualsiasi. La verifica a fatica deve essere eseguita utilizzando per il calcolo il punto posizionato lungo la bisettrice dell'intaglio e posto ad una distanza pari a  $a_0/2$  dall'apice dell'intaglio stesso<sup>1</sup>.

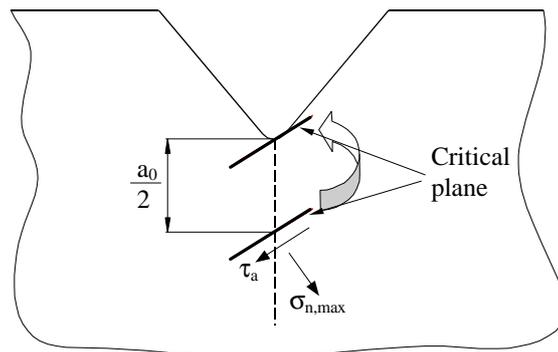


Figura 6: estensione del MWCM al caso di componenti intagliati e sollecitati da carichi multiassiali.

<sup>1</sup> Nel caso in cui la bisettrice non possa essere individuata in modo univoco, come spesso avviene nei componenti reali, come linea di riferimento si può assumere la normale alla superficie del componente avente come origine il punto in cui si ha un picco superficiale del fenomeno di concentrazione multiassiale delle tensioni.

In più, poiché il MWCM consente di modellare un danneggiamento governato da Modo II, si può, allora, ipotizzare che quanto avviene sul piano critico determinato in corrispondenza del punto utilizzato per il calcolo, sia realmente rappresentativo del danneggiamento di Modo II che si ha durante lo Stage I all'apice dell'intaglio (fig. 6).

## VALIDAZIONE MEDIANTE DATI SPERIMENTALI

La validazione sistematica dell'estensione proposta per il criterio di Susmel e Lazzarin è stata eseguita mediante dati di letteratura analizzando sia il caso di provini intagliati sollecitati da carichi uniassiali, che il caso di provini intagliati sollecitati da carichi multiassiali.

In tabella 1 sono state riportate le caratteristiche dei test utilizzati per la validazione, nel caso monoassiale, del metodo presentato.

Material	Ref.	R	$S_{AY}$ [MPa]	$DK_{th}$ [MPa m <sup>1/2</sup> ]	$a_0$ [mm]	N.	Spec. type	Load type
AA356-T6	[17]	-1	115.5	3.95	0.16	4	NB	RB
C45	[18]	-1	291	8.07	0.06	23	NB	RB
C36	[18]	-1	225	4.55	0.09	6	NB	RB
6060-T6	[19]	0.1	54.8	6.14	0.396	4	DENP	AX
SM41B	[20]	-1	163	12.36	0.458	4		
	[21]	0	137	8.36	0.296	1	CNP	AX
		0.4	122	6.38	0.218	1		
Mild Steel	[22]	-1	210	12.8	0.296	12	CNB	AX
AL-2024-T351	[23]	-1	124	5	0.129	4	CNP	AX
SAE 1045	[23]	-1	304	13.6	0.166	4	CNP	AX
AL-Alloy BS L65	[24]	-1	150	4.2	0.062	6	CNB	AX
Steel 15313	[25]	-1	220	12	0.237	6	CNB	AX
G40.11	[26]	-1	285	15.9	0.248	3	CNP	AX
AISI 304	[24]	-1	360	12	0.088	1	CNB	AX
Ni-Cr steel	[24]	-1	500	12.8	0.052	3	CNP	AX
EN-GJS-800-8	[27]	0.1	220	8.1	0.105	2	DENP	AX
		-1	77.5	15.9	3.15	1		
Grey Iron	[28]	0.1	49.5	11.2	4.07	1		
		0.5	34	8	4.41	1	CNB	AX
		0.7	24	5.2	3.74	1		

**NB**= circumferential notch cylindrical bar, **CNP**= center notch in plate,

**DENP**= double edge notch in plate, **RB**= rotating bending, **AX**= push-pull

*Tabella 1: caratteristiche delle prove utilizzate per la validazione del criterio nel caso di intagli sollecitati da carichi uniassiali.*

In tale tabella, per ogni tipologia di materiale, è stato riportato il valore del rapporto di ciclo a cui sono state condotte le prove, R; il valore del limite di fatica monoassiale,

$\sigma_{A\infty}$ ; il range del valore di soglia dello *stress intensity factor*,  $\Delta K_{th}$ ; il valore della costante di El Haddad per cricche corte,  $a_0$ ; il numero di dati sperimentali a disposizione e, infine, la geometria del provino e la tipologia del carico affaticante.

Il campo di tensione in prossimità degli intagli è stato studiato in modo sistematico mediante una analisi agli elementi finiti condotta con l'ausilio del software ANSYS.

In figura 7 è stato riportato il confronto fra limite di fatica sperimentale  $\tau_a(\phi^*, \theta^*)$  e il limite di fatica stimato mediante l'applicazione del criterio di Susmel e Lazzarin reinterpretato in termini di *critical distance approach*. L'errore è stato calcolato mediante la semplice relazione:

$$E[\%] = \frac{\tau_a(\phi^*, \theta^*) - \tau_{A,Ref}(\rho)}{\tau_{A,Ref}(\rho)}, \quad (7)$$

mentre gli intagli sono stati classificati in *blunt*, *long* e *short* secondo la regola suggerita da Taylor in [16]. La figura 7 mostra come l'applicazione del metodo abbia consentito di ottenere previsioni della vita a fatica comprese, prevalentemente, in un intervallo di errore pari a  $\pm 20\%$ . In particolare, si è osservato che in tale intervallo erano contenuti l'81% della totalità dei dati sperimentali, ovvero, entrando nel dettaglio, nel suddetto intervallo erano posizionati il 97% dei dati relativi a *short notches*, il 92% dei dati relativi a *blunt notches* e, infine, 68% dei dati relativi a *long notches*. Ovviamente vista la perfetta corrispondenza esistente nel caso monoassiale tra il MWCM e il PM, le considerazioni espresse poc'anzi risultano valide anche per il PM.

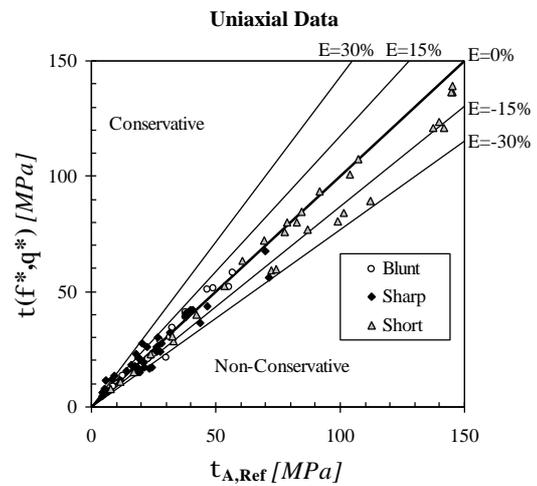


Figura 7: comparazione tra il limite di fatica sperimentale,  $\tau_a(\mathbf{f}^*, \mathbf{q}^*)$ , e quello stimato,  $\tau_{A,Ref}(\mathbf{r})$ , nel caso di intagli sollecitati da carichi uniassiali.

Series	$\frac{t_{g,nom}}{S_{g,nom}}$	$\mathbf{a}$ [mm]	$\mathbf{r}_n$ [mm]	$\mathbf{t}_a$ [MPa]	$\mathbf{S}_{n,max}$ [MPa]	$\mathbf{r}$	$\mathbf{t}_{A,Ref}(\mathbf{r})$ [MPa]	$\mathbf{E}$ [%]
90_05	0	5.04	0.07	138.8	203.1	1.46	120.51	15.2
90_03		3.00	0.076	108.5	150	1.38	123.27	-12
60_05	0.77	4.97	0.077	87.2	210.7	2.42	87.61	-0.5
60_03		2.98	0.079	84.4	207.2	2.45	86.33	-2.2
45_05	1.33	5.03	0.069	91.7	235.6	2.57	82.38	11.3
45_03		3.01	0.074	71.2	201.7	2.83	73.33	-2.9

Tabella 2: caratteristiche delle prove relative a provini in BS040A12 sollecitati da carichi di Modo I e II in fase [29].

Per validare, poi, il criterio nel caso di sollecitazioni multiassiali si sono utilizzate le uniche due serie di dati rintracciate in letteratura relative a prove condotte su provini

intagliati e sollecitati da stati di tensione complessi nel campo della vita ad alto numero di cicli. Le informazioni relative a tali test sono state riassunte nelle tabelle 2 e 3.

In tabella 2 sono state riportate le caratteristiche delle prove biassiali eseguite da Susmel e Taylor [29] su provini con intaglio a V avente angolo di apertura nominale di  $60^\circ$ . In particolare in tale tabella sono stati elencati: il codice della serie, il rapporto tra le tensioni nominali lorde in condizioni di limite di fatica calcolate in corrispondenza dell'asse della zona calibra,  $\tau_{g,nom}/\sigma_{g,nom}$ ; la profondità dell'intaglio,  $a$ ; il valore medio del raggio di fondo intaglio,  $r_n$ ; i parametri tensionali relativi all'applicazione del MWCM,  $\tau_a$ ,  $\sigma_{n,max}$  e  $\rho$ ; il limite di fatica stimato,  $\tau_{A,Ref}(\rho)$  e infine, l'errore commesso nella previsione del limite di fatica multiassiale,  $E$ .

Il materiale impiegato per tali test era un acciaio a basso tenore di carbonio, denominato BS040A12, avente le seguenti proprietà meccaniche:  $\sigma_{A\infty}=273$  MPa,  $\tau_{A\infty}=171$  MPa e  $a_0=0.2$  mm.

Il criterio, come suggerito nel paragrafo precedente, è stato applicato utilizzando il punto posto lungo la bisettrice dell'intaglio ad una distanza pari ad  $a_0/2=0.1$ mm dall'apice dell'intaglio stesso, mentre il campo di tensione è stato studiato a mezzo delle equazioni di Lazzarin-Tovo [31] considerando per il raggio di raccordo un valore medio pari a 0.074mm.

In base a quanto riportato in tabella 2 si può constatare come l'applicazione del MWCM reinterpretato in termini di *critical distance approach* abbia consentito di ottenere errori nella stima del limite di fatica multiassiale di provini intagliati inferiori al  $|15\%|$ .

$\frac{\tau_{n,nom}}{\sigma_{n,nom}}$	d	$\tau_a$	$\sigma_{n,max}$	r	$\tau_{A,Ref}$	E
	[ $^\circ$ ]	[MPa]	[MPa]		[MPa]	[%]
0	-	130.45	130.45	1.000	152.00	-14.18
$\infty$	-	154.4	0	0.000	181.00	-14.70
1.30	0	165.57	67.79	0.409	169.13	-2.10
0.63	0	160.59	109	0.679	161.32	-0.45
0.32	0	128.06	112.38	0.878	155.55	-17.67
0.28	0	121.38	109.44	0.902	154.85	-21.62
0.64	90	135.1	243.7	1.804	128.69	4.98

Tabella 3: caratteristiche delle prove relative a provini cilindrici in SAE 1045 sollecitati da carichi di flessione/torsione in fase e fuori fase [30].

Le informazioni riassunte, invece, in tabella 3 si riferiscono a provini intagliati in SAE 1045 sollecitati da carichi di flessione/torsione in fase e fuori fase [30]. La geometria di tali provini è stata schematicamente riportata in figura 8. Le proprietà meccaniche relative a tale materiale, ed utilizzate nel calcolo, erano pari a [23]:  $\sigma_{A\infty}=304$  MPa,  $\tau_{A\infty}=181$  MPa e  $a_0=0.166$  mm. In tabella 3 sono stati raccolti nell'ordine: il rapporto tra i limiti di fatica a flessione e torsione espressi in termini di tensione nominale netta,  $\tau_{n,nom}/\sigma_{n,nom}$ ; l'angolo di fase tra le componenti di sollecitazione,  $\delta$ ; i parametri tensionali relativi all'applicazione del MWCM,  $\tau_a$ ,  $\sigma_{n,max}$  e  $\rho$ ; il limite di fatica stimato,  $\tau_{A,Ref}(\rho)$  e infine, l'errore commesso nella previsione del limite di fatica multiassiale,  $E$ .

Il criterio è stato applicato ponendosi lungo la normale alla superficie nel punto di raccordo con la sezione netta del provino e ad una distanza dalla superficie stessa pari ad  $a_0/2=0.083\text{mm}$  (fig. 8) e il campo di tensione è stato ancora studiato mediante l'utilizzo degli elementi finiti.

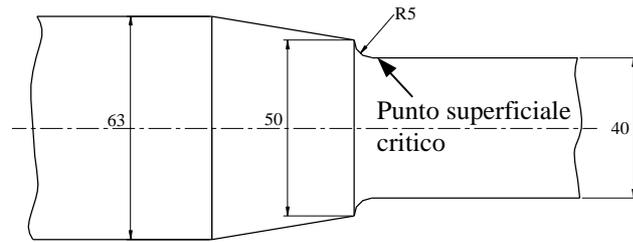


Figura 8: geometria del provino cilindrico intagliato in SAE 1045 [30].

Dalla tabella 3 si può, innanzitutto, osservare come lo errore commesso nella stima del limite di fatica sia pari a circa il -14% sia nel caso di sollecitazioni di flessione pura, che nel caso di sollecitazioni di torsione pura. L'errore, poi, relativo alle prove biassiali in fase si è sempre mantenuto, in modulo, inferiore al 20% e solo nel caso  $\tau_{n,nom}/\sigma_{n,nom}=0.28$  esso ha raggiunto un valore pari a circa -22%. Infine, è importante sottolineare come il metodo proposto abbia consentito di eseguire una stima molto precisa ( $E\approx 5\%$ ) nel caso dell'unico punto sperimentale ottenuto sfasando i carichi di un angolo di  $90^\circ$ .

## DISCUSSIONE E CONCLUSIONI

Il criterio di progettazione a fatica multiassiale proposto da Susmel e Lazzarin è stato reinterpretato in termini di *critical distance approach* onde estendere la sua applicabilità al caso di componenti intagliati sollecitati da carichi sia monoassiali che multiassiali. Mediante alcuni semplici passaggi matematici è stata dimostrata la perfetta coincidenza tra il MWCM e il PM nel caso di un intaglio sollecitato da carichi monoassiali. Questo importante risultato, alla luce anche della precisione dimostrata dal MWCM nella stima della vita a fatica di provini intagliati sollecitati da carichi uniassiali, ha consentito di evidenziare come, mediante tale approccio, la verifica a fatica in presenza di intagli possa essere affrontata in modo filosoficamente più rigoroso poiché un campo di tensione multiassiale (come è quello in prossimità di un intaglio sollecitato da un carico esterno unidirezionale) può, comunque, essere studiato mediante una tecnica multiassiale.

La coincidenza tra i due metodi ha consentito, in più, di superare una grossa incongruenza legata all'utilizzo della tensione principale massima nella stima del limite di fatica di componenti intagliati: visto che nel caso di componenti lisci tale grandezza non era da sola capace di stimare in modo corretto la resistenza a fatica [32, 33, 34], difficile diventava spiegare il motivo per cui la principale massima dovesse essere da sola rappresentativa del danno a fatica nel caso di un componente intagliato.

Altresì, la coincidenza tra MWCM e PM in presenza di carichi monoassiali ha permesso di suggerire una possibile spiegazione sul motivo per cui il CDM può essere applicato con successo anche alla previsione della vita a fatica di intagli blandi: se da un lato la distanza critica dipende sempre da  $a_0$ , dall'altro l'utilizzo della principale massima nasconde, di fatto, l'impiego di un modello multiassiale basato su un danneggiamento di Modo II capace di modellare correttamente lo Stage I.

Legando, poi, il fenomeno di innesco della cricca per fatica con il modello di danneggiamento su cui è basato MWCM si è potuta suggerire una semplice regola per l'individuazione del punto critico da utilizzarsi nel calcolo. La semplicità di tale regola

presenta, in aggiunta, l'indubbio vantaggio di ridurre notevolmente i tempi richiesti al processo di ottimizzazione di un componente dal punto di vista della resistenza a fatica. A questo si aggiunge che lo studio del campo di tensione può essere sempre eseguito con tecniche FEM, ricorrendo a semplici e rapide analisi condotte in campo lineare elastico mediante l'utilizzando di elementi aventi, nella zona critica, dimensione dipendente dal valore di  $a_0$ , con la possibilità di ridurre ulteriormente i tempi di calcolo mediante tecniche di meshatura semplificate [32].

Anche se solo con due serie di prove sperimentali, il metodo ha mostrato, poi, una elevata precisione anche nella stima del limite di fatica in presenza di intagli sollecitati da carichi multiassiali. In particolare, sorprendente è stato il ridottissimo errore commesso nell'unico caso a disposizione relativo a condizioni di fuori fase. Questo risultato così confortante, deve essere, tuttavia, ulteriormente confermato mediante un maggior numero di prove sperimentali, prove sperimentali che dovranno essere appositamente eseguite, visto che il problema degli intagli sollecitati da carichi multiassiali risulta assolutamente ancora inesplorato dalla letteratura tecnica [3].

Può essere poi interessante osservare, prima di concludere, come l'applicazione di un approccio multiassiale unitamente ad una metodologia basata sull'utilizzo di una distanza critica possa consentire di superare, e questo alla luce degli interessanti risultati già ottenuti da Taylor e discussi in [9], il problema legato alla progettazione di componenti sollecitati anche da carichi di flessione, quando per la calibrazione del metodo si ha a disposizione il solo limite di fatica a trazione, ovvero determinato in totale assenza di gradiente: la differenza tra il limite di fatica a trazione e a flessione viene annullata dall'utilizzo del CDM.

A conclusione di quanto discusso, si può, allora, evidenziare come l'estensione proposta per il criterio di Susmel e Lazzarin consenta da un lato di modellare la realtà fisica in modo coerente e, dall'altro, di suggerire un metodo di semplice ed di immediata applicazione, ovvero adatto ad un impiego in ambito industriale.

## BIBLIOGRAFIA

1. Petrone N., Susmel L., "Analisi comparativa di criteri di resistenza a fatica pluriassiale per vita infinita". Atti del XXVIII Convegno Nazionale AIAS, Vicenza (Italy) 1999, 239-250.
2. Susmel L., "Comparazione quantitativa di criteri di resistenza a fatica multiassiale per vita a termine". Atti del XXIX Convegno Nazionale AIAS, Lucca (Italy) 2000, 425-434.
3. Crupi V., Susmel L., Tovo R., "La progettazione a fatica multiassiale di componenti intagliati: lo stato dell'arte". Atti del XVI Convegno Nazionale IGF, Catania (Italy) 2002.
4. Susmel L., Lazzarin P., "A Bi-Parametric Modified Wöhler Curve for High Cycle Multiaxial Fatigue Assessment". Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct. **25** 2002, 63-78.
5. Papadopoulos I.V., "Critical Plane Approaches in High-Cycle Fatigue: on the Definition of the Amplitude and Mean Value of the Shear Stress Acting on the Critical Plane". Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct. **21** 1998, 269-285.
6. Fatemi A., Socie D. F., "A critical plane approach to multiaxial fatigue damage including out-of-phase loading". Fatigue Fract. Engng. Struct. **11** 3 1998, 149-165.
7. Tanaka K., "Engineering formulae for fatigue strength reduction due to crack-like notches". Int. J. Fracture **22** 1983, R39-R46.
8. Lazzarin P., Tovo R., Meneghetti G., "Fatigue crack initiation and propagation phases near notches in metals with low notch sensitivity". Int. J. Fatigue **19** 8-9 1997, 647-657.
9. Taylor D., "Geometrical effects in fatigue: a unifying theoretical model". Int. J. Fatigue **21** 1999, 413-420.
10. El Haddad M. H., Dowling N. F., Topper T. H., Smith K. N., Int. J. Fract. **16** 1980, 15-24.
11. Taylor D., Wang G., "The validation of some methods of notch fatigue analysis". Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct. **23** 2000, 387-394.

12. Miller K. J., "*The two thresholds of fatigue behaviour*". Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct. **16** 1993, 931-939.
13. Socie D., Bannantine J., "*Bulk deformation fatigue damage models*". Materials Science and Engineering **A103** 1988, 3-13.
14. Liu H. W., "*Shear fatigue crack growth: a literature survey*". Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct. **8** 1985, 295-313.
15. Plank R., Kuhn G., "*Fatigue crack propagation under non-proportional mixed mode loading*". Engng. Fract. Mech., **62** 1999, 203-209.
16. Taylor D., "*A mechanistic approach to critical-distance methods in notch fatigue*". Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct. **24** 2001, 215-224.
17. Atzori B., Meneghetti G., Susmel L., "*Fatigue Behaviour of AA356-T6 cast aluminium alloy weakened by cracks and notches*". In Proceeding of FDM, Edited by M. Guagliano and M. H. Aliabadi. Milan, Italy, September 2001, 81-86.
18. Nisitani H., Endo M., ASTM STP 924 1988, 136-153.
19. Luise M., Degree Thesis, Univ. of Padova, 2001.
20. Tanaka K., Nakai Y., "*Propagation and non-propagation of short fatigue cracks at a sharp notch*". Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct. **6** 1983, 315-327.
21. Tanaka K., Akiniwa Y., "*Notch geometry effect on propagation threshold of short fatigue cracks in notched components*". Fatigue '87, Vol. II, Edited by R. O. Ritchie and E. A. Starke Jr., 3th Int. Conf. On Fatigue and Fracture Thresholds, Charlottesville 1987, 739-748.
22. Frost N. E., "*A relation between the critical alternating propagation stress and crack length for mild steel*". In Proc. Inst. Mech. Engrs. **173** 1957, 811-834.
23. DuQuesnay D. L., Topper T. H., Yu M. T., "*The effect of notch radius on the fatigue notch factor and the propagation of short cracks*". In The behaviour of Short Fatigue Cracks, EGF 1, Ed. By K. J. Miller and E. R. de los Rios 1986, 323-335.
24. Frost N. E., "*Non-propagating cracks in V-notched specimens subjected to fatigue loading*". Aeronaut. Quart. **VIII** 1957, 1-20.
25. Lukas P., Kunz L., Weiss B., Stickler R., "*Non-damaging notches in fatigue*". Fatigue Fract. Engng Mater. Struct. **9** 1986, 195-204.
26. El Haddad M. H., "*A study of the growth of short fatigue cracks based on fracture mechanics*". Ph. D. Thesis, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, 1978.
27. Gasparini E., "*Caratterizzazione meccanica delle ghise sferoidali austemperate*". Degree Thesis, Univ. of Padova 2001.
28. Taylor D., Hughest M. and Allen D., "*Notch fatigue behaviour in cast irons explained using a fracture mechanics approach*". Int. J. Fatigue **18** 7 1996, 439-445.
29. Susmel L., Taylor D., "*The critical distance method and the modified Wöhler curves for the multiaxial fatigue assessment of sharply notched components*". In Proc. of 8th International Fatigue Congress, FATIGUE 2002, Stockholm, Sweden, June 2002.
30. Kurath P., Downing S. D., Galliard D. R., "*Summary of Non-Hardened Notched Shaft Round Robin Program*". Multiaxial Fatigue. Edited by G. E. Leese and D. F. Socie. Society of Automotive Engineers **AE-14** 1989, 13-32.
31. Lazzarin P., Tovo R., "*A unified approach to the evaluation of linear elastic stress fields in the neighborhood of cracks and notches*". Int. J. Fracture **78** 1996, 3-19.
32. Ellyin F., Golos K., Xia Z., "*In-Phase and Out-of-Phase Multiaxial Fatigue*". Trans. of the ASME, J. of Engineering Materials and Technology **113** 1991, 112-118.
33. Ellyin F., Xia Z., "*A General Fatigue Theory and Its Application to Out-of-Phase Cyclic Loading*". Trans. ASME, Journal of Engineering Materials and Technology **115** 1993, 411-416.
34. McDiarmid D. L., "*Fatigue Under Out-of-Phase Biaxial Stresses of Different Frequencies*". Multiaxial Fatigue ASTM STP 853 (Edited by K. M. Miller and M. W. Brown) 1985, 606-621.
35. Chaves V., Taylor D., "*Use of simplified models in fatigue prediction of real components*". In Proc. of 8th International Fatigue Congress, FATIGUE 2002, Stockholm, Sweden, June 2002.