

DELAMINAZIONE E BRIDGING IN PIASTRE LAMINATE

Domenico Bruno, Fabrizio Greco

Dipartimento di Strutture, Università degli Studi della Calabria, Cosenza
d.bruno@unical.it, f.greco@struct.unical.it

Sommario

Nel presente lavoro viene studiata la delaminazione nelle piastre laminate in presenza di bridging attraverso un modello di piastra che permette di analizzare l'adesione ed il danneggiamento all'interfaccia tra gli strati. Il laminato è modellato utilizzando la teoria tagliante del primo ordine per ogni lamina, accoppiata ad un meccanismo di adesione con molle interlaminari agenti nelle direzione di frattura per apertura e scorrimento della delaminazione. Lungo la zona interlaminare non danneggiata l'adesione è simulata da molle elastiche lineari con resistenza a trazione finita e le energie di rilascio per avanzamento interlaminare in modo I e modo II sono calcolate considerando il problema di adesione in formulazione penalty, attraverso l'energia immagazzinata dalle molle elastiche al tip. Nella zona interlaminare danneggiata i processi non elastici associati al bridging da fibre sono modellati introducendo delle tensioni sulle facce della delaminazione attraverso delle molle con legame costitutivo di tipo softening. La presente modellazione consente di valutare accuratamente l'influenza degli effetti taglienti sull'energia di rilascio. Con riferimento allo schema di modo I il problema al contorno non-lineare è risolto con una formulazione semi-analitica.

Abstract

In the present work an analysis of delamination in layered plates is developed by utilizing an improved laminated plate model by also including bridging phenomena. The first order shear deformation plate theory is used for each layer coupled with an adhesion mechanism modeled by means of interlaminar springs, acting in the opening and sliding failure mode directions. The adhesion along the undamaged layer interface is simulated by means of interlaminar elastic springs with finite tensile strength and energy release rates for mode I and II interlaminar crack advance are recovered through energy stored in the springs at the crack tip. The inelastic processes related to fiber bridging along the damaged interface, are taken into account by modeling bridging tractions at crack faces by means of arrays of damageable springs with a softening constitutive law. The present analysis allows an improved evaluation of shear effects on energy release rate. With reference to a mode I scheme the non-linear boundary value problem is solved by means of a semi-analytical procedure.

1. Introduzione

L'utilizzo dei compositi fibro-rinforzati nell'ingegneria strutturale è spesso limitato dalla loro scarsa resistenza dovuta alla presenza di difetti interlaminari. Spesso, infatti, le strutture laminate presentano difetti interlaminari di adesione dovuti a diverse cause, quali le imperfezioni tecnologiche, la concentrazione delle tensioni in prossimità di zone critiche, gli impatti con oggetti ed il buckling globale o locale degli strati. Una progettazione adeguata di queste strutture deve, quindi, necessariamente tenere conto di tutti quei parametri che caratterizzano il fenomeno della delaminazione. Tra questi, fondamentali sono la resistenza interlaminare e le curve di resistenza.

Il problema della delaminazione, infatti, è una tipica modalità di danneggiamento di queste strutture poiché a causa della loro anisotropia e non omogeneità nella resistenza alla frattura, un processo di frattura che si innesca da una delaminazione preesistente segue usualmente un percorso preferenziale, propagandosi lungo la direzione interlaminare stessa in condizione di avanzamento in modo misto. Ad esempio, questa condizione si verifica in compositi laminati unidirezionali quando la delaminazione si propaga lungo la direzione delle fibre. Numerosi ricercatori si sono interessati sia al problema della caratterizzazione sperimentale della resistenza interlaminare in modo I e II ([1]-[2]) che alla modellazione dell'avanzamento della delaminazione in strutture composite ([3]-[4]).

Per analizzare il problema dell'avanzamento della delaminazione in condizioni di modo misto frequentemente si utilizza un criterio di delaminazione che tiene conto delle differenti quantità energetiche associate all'avanzamento in modo I e modo II. Di conseguenza, diventa necessario risolvere un problema di frattura in modo misto ed effettuare la partizione delle frazioni di energia di rilascio da modo I e II. Il problema in oggetto è stato variamente affrontato sia attraverso rigorose soluzioni elastiche in configurazioni semplificate quali fessure semi infinite immerse in uno strato di materiale isotropo od ortotropo costituito da un solo materiale o da due differenti materiali [5], sia utilizzando modelli strutturali semplificati spesso accoppiati con modelli di interfaccia ([6]-[9]). In particolare la partizione modale analizzata in [8], a causa delle ipotesi semplificative fatte, è valida solo in casi particolari. Questi modelli semplificati sono utili per ricavare soluzioni in forma chiusa che permettono di comprendere gli aspetti essenziali del comportamento di delaminazione, mentre spesso le soluzioni numeriche risultano di complessa interpretazione.

Inoltre, per sviluppare un'adeguata conoscenza del problema è necessario modellare alcuni meccanismi di danneggiamento che possono migliorare la resistenza all'avanzamento della delaminazione. In particolare i laminati fibro-rinforzati spesso presentano un sensibile incremento di resistenza poiché l'avanzamento della delaminazione è contrastato da fibre che attraversano la delaminazione secondo angoli che deviano poco dal piano di delaminazione (fiber cross-over). La conseguente crescita apparente della resistenza interlaminare provoca il cosiddetto effetto della *curva di resistenza* (R-curve) [1]-[2].

Il meccanismo di *bridging* può essere accuratamente descritto utilizzando il concetto di fessura coesiva introdotto dagli studi di Barenblatt e Dugdale, opportunamente modificato per tenere in conto della presenza delle singolarità delle tensioni al tip della frattura. In questo modello le non linearità sono concentrate nelle condizioni al contorno lungo la linea di frattura [10].

Recenti ricerche riguardanti la modellazione della delaminazione in presenza di bridging da fibre ([11]-[12]) mettono in evidenza che, essendo nei compositi le dimensioni della zona di bridging non trascurabili rispetto alla lunghezza di delaminazione od allo spessore del laminato, l'incremento di resistenza non è una caratteristica intrinseca del materiale ma dipende dai parametri geometrici del laminato. Diventa necessario, quindi, effettuare

un'analisi della struttura accoppiata al meccanismo di bridging rappresentato da un'opportuna legge costitutiva.

Nel presente lavoro viene affrontato il problema della delaminazione in presenza di bridging da fibre, in una piastra a due strati nelle ipotesi di deformazioni cilindriche, utilizzando un modello di interfaccia di tipo non lineare e avvalendosi altresì dei risultati del modello di fessura coesiva. Per modellare le lamine viene utilizzata la "first order shear deformation plate theory" simulando i meccanismi di adesione e bridging attraverso molle interlaminari agenti nelle direzioni di apertura e scorrimento della delaminazione.

Il problema è inquadrato nell'ottica della teoria dell'integrale J e con riferimento all'approccio di bilancio energetico, evidenziando le relazioni tra le caratteristiche energetiche e dissipative e quelle derivanti dalla conservazione dell'integrale J .

La continuità degli spostamenti all'interfaccia tra le lamine è imposta inserendo delle molle elastiche all'interfaccia le cui rigidità assumono il significato di parametri di penalizzazione, mentre le energie di rilascio per avanzamento in modo I e modo II sono ricavate dall'energia elastica delle molle al tip della delaminazione. La propagazione della delaminazione è simulata assumendo resistenze finite a trazione.

L'utilizzo della "first order shear deformation plate theory" permette di ottenere un'accurata valutazione degli effetti della deformabilità tagliante sull'energia di rilascio. Ad esempio, con tale modello è possibile includere l'accoppiamento tra tensioni normali nel piano e tensioni taglianti trasversali, effetto che viene trascurato con un modello classico di piastra [13].

I processi non elastici associati al bridging da fibre sono modellati introducendo delle tensioni sulle facce della delaminazione soggetta a fenomeni di bridging attraverso delle molle con legame costitutivo di tipo softening a spostamento massimo limitato.

Vengono presentate soluzioni semi analitiche per una piastra a due strati soggetta a forze agenti alle estremità. Per ricostruire la propagazione della delaminazione è necessario risolvere un problema con condizioni al contorno non lineari che nel caso specifico è ricondotto ad un sistema di equazioni non lineari algebriche. Sono così ricostruite le curve di resistenza ed è analizzata l'influenza della deformabilità tagliante nelle quantità coinvolte nelle equazioni che regolano la propagazione della delaminazione in presenza di bridging.

2. Modello meccanico

La Fig. 1 schematizza il problema di una piastra delaminata: i due sub-laminati separati dall'interfaccia sono di materiale omogeneo, ortotropo ed elastico lineare, la piastra ha una

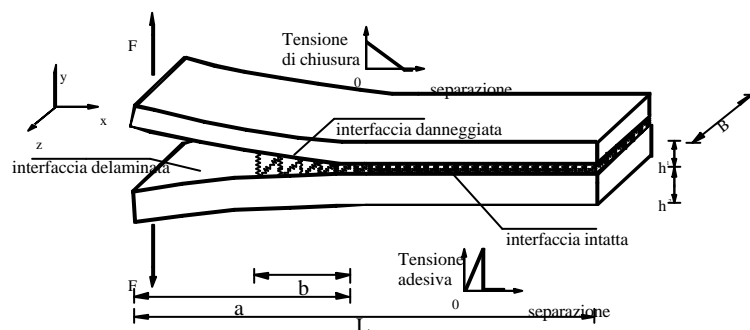


Figura 1
Schema di una piastra in delaminazione e bridging.

lunghezza L , spessore B e contiene una delaminazione di lunghezza a allineata con gli assi principali di ortotropia x . Si suppone che si sia sviluppata una zona danneggiata di lunghezza a con la presenza di fenomeni di bridging per una lunghezza b . Il problema viene modellato considerando i due sub-laminati perfettamente incollati lungo l'interfaccia eccetto lungo la delaminazione nella quale

possono avvenire fenomeni di bridging e si assume, inoltre, che la delaminazione si propaghi parallelamente all'asse di ortotropia z .

Nell'ipotesi di uno stato di deformazione piano, la condizione di perfetta adesione tra le lamine lungo l'interfaccia intatta è imposta in forma penalty, utilizzando le rigidzze delle molle lineari elastiche k_v e k_h , rispettivamente per le molle agenti nella direzione di apertura e scorrimento della delaminazione, come coefficienti di penalizzazione. Le tensioni interlaminari normali e tangenziali \mathbf{s}_{yy} e \mathbf{s}_{yx} sono espresse in funzione degli spostamenti relativi delle lamine all'interfaccia $\mathbf{D}w$ e $\mathbf{D}u$ associati con le rispettive direzioni:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{s}_{yy} \\ \mathbf{s}_{yx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{B} \begin{bmatrix} k_v & 0 \\ 0 & k_h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta w \\ \Delta u \end{Bmatrix}, \quad (1)$$

Le componenti modali dell'energia di rilascio per modo I e II, G_I e G_{II} , sono calcolate dall'energia di deformazione immagazzinate dalle molle poste lungo il fronte della delaminazione: questo può essere facilmente dimostrato attraverso argomentazioni basate sul lavoro locale delle tensioni al tip. Nel processo di limite $k_h, k_v \rightarrow \infty$, necessario per assicurare la continuità degli spostamenti all'interfaccia, e considerando la G_I associata a spostamenti relativi nella direzione y (i.e. $\mathbf{D}w > 0$), le componenti modali dell'energia di rilascio sono:

$$G_I = \begin{cases} \frac{1}{B} \lim_{\substack{k_v \rightarrow \infty \\ k_h \rightarrow \infty}} \frac{1}{2} k_v \Delta w^2, & \text{if } \Delta w > 0 \\ 0, & \text{if } \Delta w \leq 0 \end{cases} \quad G_{II} = \frac{1}{B} \lim_{\substack{k_v \rightarrow \infty \\ k_h \rightarrow \infty}} \frac{1}{2} k_h \Delta u^2, \quad (2)$$

intendendo $\mathbf{D}w$ e $\mathbf{D}u$ valutate al fronte della delaminazione .

Il meccanismo di *bridging* è invece modellato attraverso molle non-lineari con tensioni normali e tangenziali che dipendono localmente dagli spostamenti relativi all'interfaccia associati, attraverso le seguente leggi disaccoppiate di tipo softening:

$$\begin{cases} \mathbf{s}_{yy} = \mathbf{s}_{yy}^0 - \frac{\mathbf{s}_{yy}^0}{\Delta w^0} \Delta w & \text{if } \Delta w < \Delta w^0 \\ \mathbf{s}_{yy} = 0 & \text{if } \Delta w \geq \Delta w^0 \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{s}_{yx} = \mathbf{s}_{yx}^0 - \frac{\mathbf{s}_{yx}^0}{\Delta u^0} \Delta u & \text{if } \Delta u < \Delta u^0 \\ \mathbf{s}_{yx} = 0 & \text{if } \Delta u \geq \Delta u^0 \end{cases} \quad (3)$$

con \mathbf{s}_{yy}^0 , \mathbf{s}_{yx}^0 e Δw^0 e Δu^0 tensioni e spostamenti limite. Le precedenti relazioni costitutive possono ragionevolmente rappresentare il fenomeno di cross-over delle fibre.

3. L'integrale J ed il bilancio energetico

In questo paragrafo, in vista del problema introdotto nel paragrafo precedente, si stabiliscono le principali equazioni che governano l'avanzamento della frattura interlaminare con riferimento ad un corpo elastico lineare B occupante una regione piana di area A e spessore B ed avente una frattura lineare di lunghezza a eventualmente soggetta a bridging (Fig. 2). Il corpo è soggetto ad un sistema di forze esterne \mathbf{t} su $\partial_t B$, spostamenti $\bar{\mathbf{u}}$ su $\partial_u B$ e tensioni da bridging lungo le facce della porzione di superficie della frattura $\partial_b B$ aventi traccia di lunghezza b . Le superfici hanno intersezioni nulle e la loro unione risulta pari alla superficie globale del corpo piano ∂B . Si assume che sia le forze esterne che gli spostamenti imposti rimangano invariati durante l'avanzamento collineare della frattura.

Valutando l'integrale J lungo il percorso chiuso \mathbf{G} che racchiude un'area priva di singolarità si ottiene:

$$J(\Gamma) = \oint_{\Gamma} (Un_1 - t_i u_{i,1}) ds = J(\Gamma_1) + J(\Gamma_2) + J(\Gamma_3) = 0, \quad J(\Gamma_2) = - \int_0^{\Delta w_i} \mathbf{s}_{22} d(\Delta w) - \int_0^{\Delta u_i} \mathbf{s}_{21} d(\Delta u) \quad (4)$$

avendo indicato con U l'energia di deformazione, n_1 la componente della normale esterna al contorno, t_i la generica componente del vettore tensione agente su \mathbf{G} , $u_{i,1}$ la derivata parziale della generica componente di spostamento $\partial u_i / \partial x_1$, ds il differenziale dell'arco lungo \mathbf{G} e con $\mathbf{D}w_t$ e $\mathbf{D}u_t$ gli spostamenti relativi all'estremità della superficie soggetta a bridging. Il contributo $J(\mathbf{G}_1)$ lungo il percorso con raggio tendente a zero rappresenta l'energia di rilascio al tip della frattura disponibile per l'avanzamento cambiata di segno $-G_{tip}$. Il segmento \mathbf{G}_2 corre lungo le facce della frattura soggette a bridging $x_2=0^+$, $x_2=0^-$, mentre il segmento \mathbf{G}_3 corre lungo le facce della frattura prive di tensioni da bridging. La condizione di avanzamento interlaminare in termini di integrale J si esprime attraverso:

$$J(\Gamma_3) + J(\Gamma_2) = J_{ext} - J_b = G_c \quad (5)$$

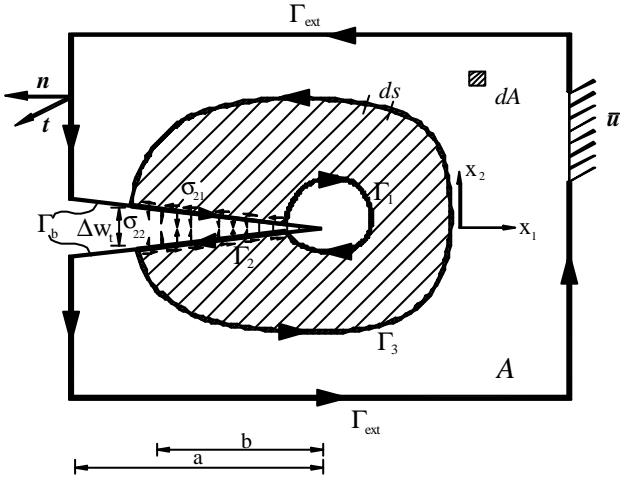


Figura 2
Corpo bidimensionale danneggiato.

dove G_c è il valore critico per l'energia di rilascio che, eventualmente, può dipendere dal rapporto modale locale, J_{ext} è valutato lungo un qualsiasi percorso che parte dalla faccia inferiore della frattura, termina su quella superiore e racchiude la zona in bridging. J_b è il contributo delle tensioni da bridging $-J(\Gamma_2)$. J_{ext} , in virtù della conservazione dell'integrale J è pari $J(\Gamma_3)$. Se le tensioni da bridging derivano da un potenziale degli spostamenti $\mathbf{Y}(\mathbf{D}w, \mathbf{D}u)$ (i.e. $\partial \Psi / \partial \Delta w = \mathbf{s}_{22}$, $\partial \Psi / \partial \Delta u = \mathbf{s}_{21}$) con $\mathbf{Y}(0,0)=0$ allora

$$J_b = \Psi(\Delta w_t, \Delta u_t) \quad (6)$$

Analoghe relazioni possono essere ricavate in termini energetici. Se definiamo $GBd\mathbf{u}$ come l'energia fornita al corpo per l'avanzamento infinitesimo $d\mathbf{u}$

$$GBd\mathbf{u} = -d\Pi = B \int_{\Gamma_{ext}} t_i d\mathbf{u}_i ds - B d \left[\int_A U dA \right], \quad d[\bullet] = \frac{\partial[\bullet]}{\partial a} da - \frac{\partial[\bullet]}{\partial x_1} dx_1 \quad (7)$$

dove Π è l'energia potenziale del corpo associata alle forze esterne e Γ_{ext} è la traccia della superficie $\partial_t B$ e la regola di derivazione $d[\bullet]$ segue considerando un sistema di riferimento euleriano che si muove con il tip. L'applicazione di detta regola assieme al principio dei lavori virtuali ed al teorema della divergenza fornisce:

$$G = \left(\int_{\partial A} U dx_2 - \int_{\Gamma_{ext}} t_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds \right) - \int_{\Gamma_b} t_i \frac{\partial u_i}{\partial a} ds, \quad \int_{\Gamma_b} t_i \frac{\partial u_i}{\partial a} ds = \int_{\Gamma_b} t_i \frac{d\mathbf{u}_i}{d\mathbf{u}} ds + \int_{\Gamma_b} t_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds = \int_{\Gamma_b} t_i \frac{d\mathbf{u}_i}{d\mathbf{u}} ds + J_b \quad (8)$$

Riconoscendo nell'espressione in parentesi tonde dell'eq. (8) l'integrale J lungo il contorno esterno di A , J_{ext} ed utilizzando l'equazione (4) si ottiene la seguente condizione di avanzamento:

$$G + \int_{\Gamma_b} t_i \frac{d\mathbf{u}_i}{d\mathbf{a}} ds = G_c. \text{ or } G=R \text{ con } R=G_c+R_b \text{ e } R_b = - \int_{\Gamma_b} t_i (\mathbf{d}\mathbf{u}_i / d\mathbf{a}) ds, \quad (9)$$

incorporando nella resistenza complessiva alla frattura R , il termine R_b definito come una energia di rilascio negativa dovuta ai processi dissipativi da bridging. Il termine a sinistra della prima equazione delle (9) può, quindi, essere considerato come l'energia effettiva disponibile per l'avanzamento della frattura G_{eff} . E' utile evidenziare che R non è un parametro intrinseco al materiale, poiché dipende dalla dimensione della frattura. Se le tensioni bridging derivano da un potenziale il termine R_b può essere espresso come la derivata di un'energia interna U_b associata al meccanismo di bridging (nel caso di molle elastiche U_b è la loro energia di deformazione)

$$R_b = \frac{dU_b}{da}, \quad U_b = \int_{a-b}^a \Psi[\Delta u(x_1, a), \Delta w(x_1, a)] dx_1. \quad (10)$$

La precedente relazione può essere dimostrata attraverso la regola di derivazione Leibniz pensando ai profili di apertura e scorrimento della frattura come a funzioni di x_1 e della lunghezza attuale a della frattura ed assumendo che il potenziale Ψ si annulli per $x_1=a$. E' interessante notare che nel caso di propagazione stazionaria della frattura (*steady-state large scale bridging*), il profilo della fessura trasla mantenendo la stessa forma e la zona danneggiata in bridging mantiene una lunghezza costante, per cui G risulta pari a J_{ext} e non dipende dalla particolare legge di bridging essendo $t_i \partial u_i / \partial a = 0$.

4. L'evoluzione della delaminazione nel caso della piastra simmetrica in modo I

Consideriamo nuovamente il problema introdotto nel paragrafo 2: supponiamo che la piastra sia costituita da due lamine uguali. Lo spessore delle lamine è h , la rigidità flessionale è $D = E_x B h^3 / [12(1 - \nu_{xz} \nu_{zx})]$, quella assiale $A = E_x B h / (1 - \nu_{xz} \nu_{zx})$ avendo indicato con E_x il modulo di Young nella direzione x e con ν_{xz} , ν_{zx} i coefficienti di Poisson lungo le direzioni $x-z$ ed $z-x$. Inoltre, la deformabilità a taglio è introdotta attraverso le rigidità taglianti delle lamine $A^* = K G_{xy} B$, dove con G_{xy} e K si sono indicati rispettivamente il modulo a taglio ed il

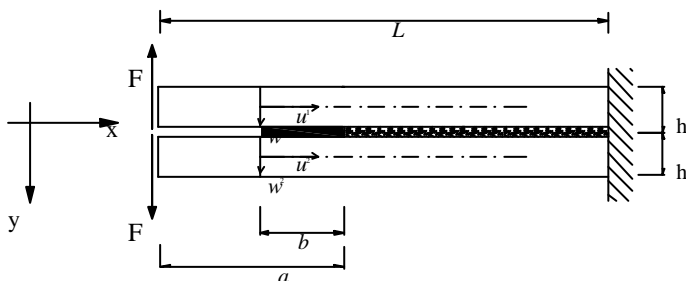


Figura 3
Schema di una piastra danneggiata in modo I.

fattore di correzione a taglio. Utilizzando la seguente cinematica per la generica lamina:

$$\begin{cases} U_i(x, y) = u_i(x) + y \cdot \boldsymbol{\gamma}_i(x) \\ W_i(x, y) = w_i(x) \end{cases} \quad (11)$$

avendo considerato gli spostamenti in direzione x , $U_i(x, y)$ e quelli nella direzione y , $W_i(x, y)$ espressi in funzione degli spostamenti del piano medio della lamina $u_i(x)$, dello

spostamento trasversale $w_i(y)$, e della rotazione della sezione $\mathbf{y}_i(x)$. Le equazioni rilevanti per il modo I sono:

$$\begin{cases} A^*(\Delta\mathbf{y}' + \Delta w') - 2\bar{k}w = 0 \\ A^*(\Delta\mathbf{y} + \Delta w') - D\Delta\mathbf{y}'' = 0 \end{cases}, \quad \bar{k} = \begin{cases} B(\mathbf{s}_{yy}^0 - \frac{\mathbf{s}_{yy}^0}{\Delta w^0})\Delta w, & 0 \leq x < b \\ k_v, & b \leq x < L-a+b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta w'(0) + \Delta\mathbf{y}(0) = -\frac{2F}{A^*}, \quad \Delta\mathbf{y}'(0) = -\frac{2F(a-b)}{D} \\ \Delta w^-(b) = \Delta w^+(b), \quad \Delta\mathbf{y}^-(b) = \Delta\mathbf{y}^+(b) \\ \Delta\mathbf{y}'^-(b) = \Delta\mathbf{y}'^+(b), \quad \Delta w'^-(b) + \Delta\mathbf{y}^-(b) = \Delta w'^+(b) + \Delta\mathbf{y}^+(b) \\ \Delta\mathbf{y}(L-a+b) = 0, \quad \Delta w(L-a+b) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

dove $(\bullet)'$ indica la derivazione rispetto ad x , il Δ indica la differenza $(\bullet)_2 - (\bullet)_1$ e $(\bullet)^{+/-}$ indica la quantità tra parentesi valutata rispettivamente a destra od a sinistra. Il problema differenziale del secondo ordine sopra formulato può essere risolto in maniera analitica riconducendolo a un sistema non omogeneo di equazioni differenziali del primo ordine del tipo $\mathbf{y}' = \mathbf{F}\mathbf{y} + \mathbf{d}$, nel quale il vettore $\mathbf{y} = \{y^1, y^2\}^T$ raccoglie in y^1 ed y^2 le funzioni $\{\Delta w, \Delta w', \Delta\mathbf{y}, \Delta\mathbf{y}'\}$ definite rispettivamente su $[0, b)$ e $[b, L-a+b]$ ed \mathbf{F} è un opportuno operatore lineare associato al problema. Le soluzioni generali sono del tipo $\mathbf{y} = c_i \mathbf{u}_i e^{l_i x}$ con l_i autovalori complessi del problema $\mathbf{F}\mathbf{u}_i = l_i \mathbf{u}_i$, la soluzione particolare è $\{\Delta w^0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$ e le costanti c_i vanno ricavate dalle condizioni al contorno che possono essere poste sotto la forma $\mathbf{B}\mathbf{c} = \mathbf{t}$, con \mathbf{B} matrice le cui componenti sono un'opportuna combinazione lineare delle componenti degli autovettori \mathbf{u}_i eventualmente moltiplicati per coefficienti del tipo $e^{l_i \bar{x}}$ e \mathbf{t} un opportuno vettore di termini noti.

Per ricostruire l'evoluzione della delaminazione in bridging si utilizzano un set di equazioni evolutive associate rispettivamente alla condizione di propagazione del fronte della delaminazione e del fronte della zona danneggiata in bridging:

$$\begin{cases} J_{ext} - J_b = G_c \text{ or } G = G_c - R_b \quad \mathbf{d}a > 0 \\ \Delta w(0) = \Delta w^0 \quad \mathbf{d}(a-b) > 0 \end{cases}, \quad \text{con } BJ_{ext} = \frac{M^2}{D} + \frac{T^2}{A^*} + T\Delta\mathbf{y} \frac{M_c^2}{D} - \frac{T_c^2}{A^*}, \quad J_b = \mathbf{s}_{yy}^0 \Delta w - \frac{\mathbf{s}_{yy}^0 \Delta w^2}{\Delta w^0} \quad (13)$$

dove M , M_c e T , T_c sono il momento ed il taglio rispettivamente ad $x=0$ ed $x=L-a+b$, $*$ e $*w$ sono rispettivamente la rotazione relativa tra le sezioni e lo spostamento relativo di apertura ad $x=0$. Dalla soluzione di (12) si nota come le funzioni M_c , T_c , $*$ e $*w$ dipendano da $(b, L-a, F)$.

La simulazione numerica del problema, una volta calcolato il carico di prima delaminazione (i.e. $b=0$, $a=a_0$) eguagliando $J_{ext} = G_c$ segue, quindi, due fasi. Nella prima fase è analizzata la formazione di tensioni da bridging al crescere della zona danneggiata (i.e. $\mathbf{d}a > 0$, $a=a_0+b$) e la lunghezza b è ricavata risolvendo l'equazione non lineare (13.1). Quando si raggiunge la separazione limite al fronte della zona danneggiata, inizia la seconda fase nella quale si propagano sia il fronte di danneggiamento [$\mathbf{d}(a-b) > 0$] che quello di delaminazione ($\mathbf{d}a > 0$) e devono essere soddisfatte entrambi le (13).

E' importante osservare come il termine $J_{ext} - J_b$, pari all'energia di rilascio effettiva al tip della delaminazione G_{eff} visto come contributo $J(\mathbf{d}a)$ introdotto nella (4), evidenzia gli effetti della deformabilità tagliante delle lamine sull'energia di rilascio. In particolare, è utile calcolare il

limite dell'energia G_{eff} nel caso di $(L-a)$ attraverso i risultati del problema penalty (k_v),

$$BG_{eff} = \frac{M_t^2}{D} + \frac{T_t^2}{A^*} + T_t \Delta y_t - \frac{M_c^2}{D} - \frac{T_c^2}{A^*} \quad \lim_{(L-a) \rightarrow \infty} (BG_{eff}) = \lim_{\substack{k_v \rightarrow \infty \\ (L-a) \rightarrow \infty}} \frac{1}{2} k_v \Delta w^2 = \frac{M_t^2}{D} + \frac{T_t^2}{A^*} + \frac{2M_t T_t}{\sqrt{A^* D}} \quad (14)$$

con M_t ed T_t , momento e taglio nella sezione al fronte di delaminazione $x=b$ e Δy_t è la rotazione relativa tra le sezioni a $x=L-a+b$. Il termine $(T_t^2/A^* - T_c^2/A^*)$ rappresenta la differenza tra l'energia elastica tagliante per unità di lunghezza della piastra dietro ed avanti il fronte di delaminazione, mentre $(T_t \Delta y_t)$ è un termine meno banale che nasce dall'interazione tra le tensioni normali e tangenziali al tip. Nel limite $(L-a)$, quest'ultimo termine diventa $2M_t T_t / \sqrt{A^* D}$ ed evidenzia l'accoppiamento flessione/taglio. Una discussione più approfondita sull'aspetto si può trovare in [13].

5. Risultati e conclusioni

Il problema al contorno non-lineare evolutivo di delaminazione e bridging precedentemente introdotto, grazie alla soluzione analitica del sistema differenziale, viene ricondotto ad un problema non-lineare algebrico. Il carico per il quale parte la delaminazione viene ricavato risolvendo la (13.1) con $J_b=0$ per F . Nella fase di formazione della zona in bridging si incrementa per valori finiti b ed il carico corrispondente F viene ricavato dalla (13.1). Quando Δw raggiunge il valore limite, il carico F e la larghezza del bridging b sono ricavati dal sistema (13).

Al fine di mostrare qualche risultato significativo nella Figura 4 è riportata la curva di resistenza in termini dell'energia di rilascio convenzionale di un laminato con deformabilità a taglio nulla e senza bridging $G = (Fa)^2 / DB$ utilizzando valori tipici per i parametri geometrici e

meccanici: $B=20mm$, $h=1.5mm$, $E_x=135.000MPa$, $\nu=0.15$, $\sigma_{yy}^0=10MPa$ e $\Delta w^0=0.1mm$. Nella stessa figura si mostra il confronto con i risultati ottenuti con lo stesso modello di interfaccia per l'adesione ed il bridging ma con un modello di piastra alla Kirchhoff per le lamine. Il segno *I* indica l'inizio prima fase di propagazione, quello *II* l'inizio della seconda fase (si veda il paragrafo 4).

Si nota come, in accordo con i risultati riportati in [11], con il modello senza deformabilità tagliante si raggiunge asintoticamente uno stato di evoluzione stazionario di avanzamento (linea punteggiata in Fig.4), con l'energia di rilascio G che tende dall'alto al valore limite stazionario $G_c + \sigma_{yy}^0 \Delta w^0 / 2$. D'altro canto, il presente modello raggiunge tale stato stazionario solo per valori a/L sufficientemente distanti dal valore unitario attinto all'estremo vincolato,

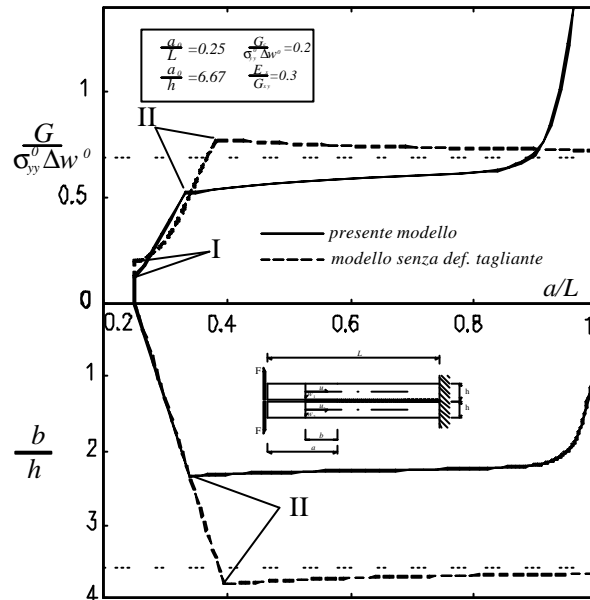


Figura 4
Curva di resistenza nominale ed evoluzione del bridging.

poiché in questo caso il problema di evoluzione non è virtualmente indipendente dalle condizioni al contorno su $x=L-a+b$. In prossimità del vincolo le lamine, infatti, si irrigidiscono e la rotazione \ast_t tende a zero abbassando l'energia di rilascio al tip. Inoltre, gli effetti di accoppiamento tensioni normali /tensioni da taglio al tip nel presente modello hanno un effetto sostanziale in tutte le fasi di propagazione. In particolare, il valore del carico relativo sia alla incipiente propagazione della delaminazione (I) che al trasporto di bridging (II) per il presente modello sono significativamente al di sotto di quelli previsti con il modello senza deformabilità tagliante. La

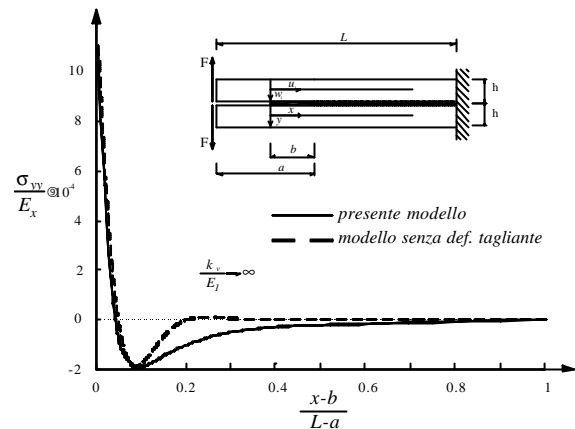


Figura 5

Andamento delle tensioni normali interlaminari. Si nota il diverso andamento delle tensioni interlaminari per i due modelli messi a confronto: per il presente modello le tensioni acquistano una singolarità al tip e si adagiano secondo una curva esponenziale lungo la lunghezza di adesione, mentre per il modello alla Kirchhoff le tensioni pur acquistando la singolarità al tip si annullano per la lunghezza di adesione non risentendo così delle condizioni di vincolo. A tal proposito, è utile osservare che la singolarità delle tensioni interlaminari dovute alla sola sollecitazione tagliante è di ordine più elevato rispetto a quello del modello senza deformabilità tagliante. Ciò implica che le tensioni interlaminari dovute al taglio hanno un effetto non banale sull'energia di rilascio effettiva disponibile al fronte di delaminazione.

I precedenti risultati, grazie alla partizione modale diretta del modello di interfaccia presentato, possono essere facilmente estesi al problema di propagazione della delaminazione in modo misto, argomento che sarà oggetto di future analisi.

Bibliografia

- [1] Drzal L.T., Madhukar M.S. "Fiber-matrix adhesion and its effect on composite mechanical properties: IV. Mode I and Mode II fracture toughness of graphite/epoxy Composites", Journal of Comp. Mater., vol. **26**, no. **7**, 936-968, **1992**.
- [2] Hwang W., Han K. S., "Interlaminar fracture behaviour and fiber bridging of glass epoxy composite under mode I static and cyclic loadings" Journal Comp. Mater., 396-430, **1989**.
- [3] Bruno D., Greco F. "An asymptotic analysis of delamination buckling and growth in layered plates", Int. J. Solids Structures in corso di stampa, **2000**.
- [4] Bruno D., "Delamination buckling in composite laminates with interlaminar defects", Theoretical and Applied Fracture Mechanics, vol. **9**(2), 145-159, **1988**.
- [5] Hutchinson J.W., Suo Z. "Mixed mode cracking in layered materials. In Advances in Applied Mechanics", **28**, Academic Press, New York, **1992**.
- [6] Allix O., Corigliano A. "Modelling and simulation of crack propagation in mixed-modes interlaminar fracture specimens", Int. J. Fracture, **77**, 111-140, **1996**.
- [7] Ascione L., Bruno D., "On the delamination problem of two-layer plates". Proc. Second Meeting on Unilateral Problems in Structural Analysis, Ravello, September 22-24, 1983,

- CISM Courses and Lectures No. 288, Springer, Berlin, **1985**.
- [8] Williams J.G., '*On the calculation of energy release rates for cracked laminates*'. Int. J. Fracture **36**, 101-119, **1988**.
- [9] Bruno D., Greco F., '*Un modello di interfaccia nell'analisi della propagazione della delaminazione in modo misto nelle piastre laminate*', XXVIII Convegno Nazionale AIAS, Vicenza, 8-11 Settembre, **1999**.
- [10] Bazant Z. P., Planas J., '*Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials*', CRC Press, **1998**.
- [11] Suo Z., Bao G., Fan B., '*Delamination Rcurve phenomena due to damage*', J. Mech. Phys. Solids, **40**, no.1, 1-16, **1992**.
- [12] Bao, G., Suo, Z., '*Remarks on crack bridging concepts*', Appl. Mech. Rev., **24**, 355-366, **1992**.
- [13] Bruno D., Greco F., '*An analysis of mixed mode delamination in plates*', in corso di pubblicazione su Theoretical and Applied Fracture Mechanics.