

MATRICE DI RIGIDEZZA DI UN ELEMENTO FINITO FESSURATO CON TUTTI I TERMINI DI ACCOPPIAMENTO

Lucio Nobile, Patrizia Ricci, Erasmo Viola

Dipartimento DISTART, Università di Bologna, Viale Risorgimento, 2 – 40136 Bologna

Sommario

Per descrivere il comportamento statico, oppure dinamico di una struttura contenente elementi fessurati, occorre opportunamente modellare una discontinuità di materia, denominata “crack”, fessura, oppure cricca. I fattori di intensificazione degli sforzi (“Stress Intensity Factors” oppure “SIFs”) sono connessi con i tre possibili modi di deformazione delle superfici della fessura e caratterizzano l’ampiezza del profilo dei campi di spostamento e di tensione, nell’intorno dell’apice del crack.

In questo lavoro viene proposto un metodo semplificato basato sull’equilibrio per la valutazione dei fattori di intensificazione degli sforzi (SIFs) di travi fessurate. Il diagramma delle tensioni tiene conto dei risultati della teoria della trave di Saint-Venant e del comportamento asintotico delle tensioni in prossimità dell’apice di un crack. La condizione di equivalenza tra le caratteristiche della sollecitazione e la distribuzione di tensioni viene imposta in corrispondenza della sezione fessurata, sulla porzione di sezione non interessata da crack.

Abstract

In order to analyze the static or the dynamic behaviour of structures containing cracked members, the local flexibility of cracked regions has to be evaluated. To take into account the crack effect on the compliance of a cracked member, the Stress Intensity Factors(SIFs) can be used.

In this paper, a simple method of estimating the SIFs is proposed. This method is based on equilibrium between the external and internal forces for a part of the body isolated by an imaginary section passing through the crack tip. It should be recognized that to estimate the strength of cracked bodies, in view of engineering design procedures, the lower accuracy of the calculation is warranted by a smaller amount of work involved.

1. Introduzione

La presenza di un crack in un elemento strutturale comporta una riduzione di rigidità locale, dipendente dalla forma e dalle dimensioni del difetto. Per studiare l’incremento della cedibilità locale si è operato in vari modi. Irwin [1] ha stabilito la relazione tra la variazione di

cedibilità locale e i fattori di intensificazione degli sforzi. Okamura et al. [2] hanno applicato i concetti della Meccanica della Frattura agli elementi strutturali fessurati. La sezione fessurata viene modellata mediante una cerniera elastica, che può essere intesa come un elemento finito con due nodi, ma di lunghezza nulla. In letteratura, questo particolare elemento finito viene denominato "line-spring model" e può essere dotato di deformabilità flessionale, assiale e tagliante. In tal modo, una trave di lunghezza L contenente un crack a distanza l_I da un estremo, viene schematizzata mediante due travi integre di lunghezza l_I e $L-l_I$, unite da una cerniera elastica in corrispondenza della sezione fessurata. La modellazione [2] è stata impiegata nello studio della propagazione di difetti per fatica in strutture iperstatiche[3,4], come pure per determinare la redistribuzione delle caratteristiche della sollecitazione in strutture intelaiate[5].

Quando un crack si estende nel proprio piano, in corrispondenza di un suo apice, la variazione di energia liberata connessa con la propagazione della fessura in un materiale isotropo, può esprimersi nella forma [6-9]:

$$G = \frac{b}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2 \quad (1.1)$$

ove i fattori di intensificazione degli sforzi K_I , K_{II} , K_{III} risultano associati ai tre modi fondamentali: $K_I \Leftrightarrow$ modo I o modo di apertura ("Opening Mode"), $K_{II} \Leftrightarrow$ modo II o modo di scorrimento ("Sliding Mode"), $K_{III} \Leftrightarrow$ modo III o modo di strappamento ("Tearing Mode"). Nella (1.1) E rappresenta il modulo di elasticità normale e ν denota il coefficiente di Poisson del materiale. La (1.1) è valida per stati deformativi piani e per stati tensionali piani, assumendo per β i valori:

$$\beta = \begin{cases} 1 & \text{per stati piani di tensione} \\ 1 - \nu^2 & \text{per stati deformativi piani} \end{cases} \quad (1.2)$$

Detti fattori dipendono dalla geometria del difetto e dalla condizione di sollecitazione ed hanno la dimensione di una tensione per la radice quadrata della lunghezza.

I fattori di intensificazione degli sforzi intervengono nella definizione dello stato limite di frattura, formulato secondo il criterio tensionale [6]. Essi caratterizzano anche il parametro energetico, denominato integrale J [9]. I fattori di intensificazione degli sforzi sono riportati in alcuni manuali [10-13] per varie configurazioni geometriche del crack e differenti stati di sollecitazione. Nell'analisi svolta nel presente lavoro si assume $K_{III} = 0$.

Di recente è stato proposto da Herrmann et al. [14-18] un metodo per stimare con buona approssimazione i fattori di intensificazione degli sforzi di travi fessurate. Il metodo proposto ha suscitato dibattito [19] ed è stato impiegato [20] per determinare le espressioni in forma chiusa di K_I per una sezione a doppio T.

Uno degli scopi del presente lavoro riguarda la valutazione approssimata dei SIFs. Viene proposto un metodo basato su considerazioni di equilibrio, che fornisce risultati confrontabili con quelli esistenti, determinati con tecniche numeriche, oppure sperimentali. In questo lavoro si assume che il materiale davanti all'apice della fessura si comporti in modo elastico lineare. La condizione di equivalenza tra le caratteristiche della sollecitazione e la distribuzione di tensioni viene imposta in corrispondenza della sezione fessurata, sulla parte della sezione non interessata dal crack.

Un secondo obiettivo di questo lavoro è relativo alla generalizzazione dei risultati riportati in [21-23]. In dette note la sezione fessurata viene modellata come elemento finito con due nodi, e di lunghezza nulla. Ciacun nodo possiede due o tre gradi di libertà. Gli elementi della matrice di rigidezza contengono i termini di accoppiamento non nulli relativi alle sole

sollecitazioni di sforzo assiale e di momento flettente. Nel presente lavoro si suppone che ogni caratteristica di sollecitazione risulti accoppiata con le restanti due. In tal modo ogni elemento della matrice di rigidità 6x6 è diverso da zero.

2. Elemento fessurato rettilineo

Si consideri un elemento di trave ad asse rettilineo, contenente un crack di estremità, sollecitato come in Fig.1.

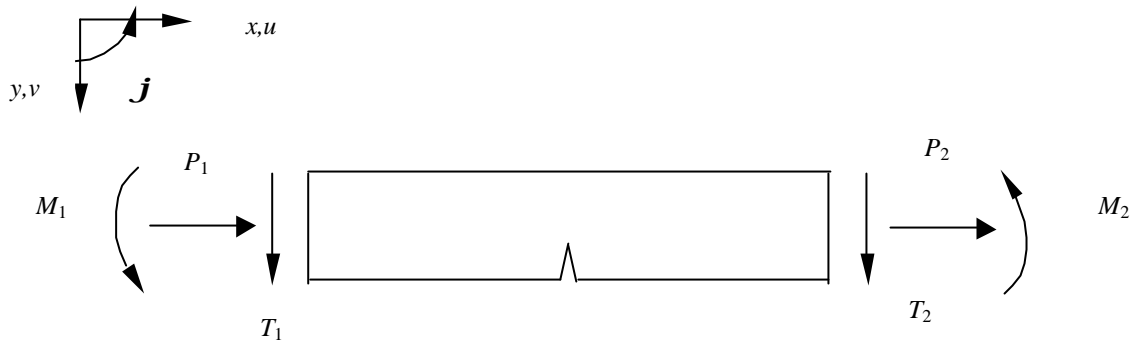


Fig.1- Parametri di forza e di spostamento nodali

Si vuole determinare la relazione tra le forze nodali, raccolte nel vettore algebrico:

$$\mathbf{F}^T = [P_1 \ T_1 \ M_1 \ P_2 \ T_2 \ M_2] = [F_1 \ F_2 \ F_3 \ F_4 \ F_5 \ F_6] \quad (2.1)$$

e gli spostamenti nodali, raccolti nel vettore:

$$\boldsymbol{\zeta}^T = [u_1 \ v_1 \ \ddot{o}_1 \ u_2 \ v_2 \ \ddot{o}_2] = [\zeta_1 \ \zeta_2 \ \zeta_3 \ \zeta_4 \ \zeta_5 \ \zeta_6] \quad (2.2)$$

Deve risultare:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}_c \boldsymbol{\zeta} \quad (2.3)$$

essendo \mathbf{K}_c la matrice di rigidità dell'elemento finito di lunghezza nulla, ossia della cerniera elastica dotata di deformabilità assiale, tagliante e flessionale con cui viene modellata la sezione fessurata. Per calcolare la matrice \mathbf{K}_c , si seguono le indicazioni della nota di Okamura et al. [2], partendo dalla definizione delle tre cedibilità $\mathbf{I}_{PP}, \mathbf{I}_{TT}, \mathbf{I}_{MM}$:

$$\ddot{e}_{PP} = \frac{u}{P}, \quad \ddot{e}_{TT} = \frac{v}{T}, \quad \ddot{e}_{MM} = \frac{\ddot{o}}{M} \quad (2.4)$$

rispettivamente assiale, tagliante e flessionale. Al numeratore della (2.4) intervengono lo spostamento assiale u , la deflessione v e la rotazione \boldsymbol{j} . Detti parametri di spostamento generalizzato risultano divisi dai corrispondenti parametri di sforzo generalizzato: lo sforzo assiale N , il taglio T e il momento flettente M .

Le cedibilità elastiche sono legate al rilascio di energia connessa con l'estensione del crack ed ai fattori di intensificazione degli sforzi [2]:

$$G_P = \frac{1-n^2}{E} K_{IP}^2 = \frac{P^2}{2} \frac{d\mathbf{I}_{PP}}{dA}, \quad G_T = \frac{1-n^2}{E} K_{IT}^2 = \frac{T^2}{2} \frac{d\mathbf{I}_{TT}}{dA}, \quad G_M = \frac{1-n^2}{E} K_{IM}^2 = \frac{M^2}{2} \frac{d\mathbf{I}_{MM}}{dA} \quad (2.5)$$

Nelle (2.5) K_{IP} e K_{IM} denotano i contributi al fattore di intensificazione degli sforzi K_I , dovuti allo sforzo P ed al momento flettente M , rispettivamente. Il termine K_{IT} esprime il

fattore di intensificazione degli sforzi K_{II} del modo II, associato alla forza tagliante T . I pedici P , M , T riferiscono la generica grandezza allo sforzo assiale P , al momento M ed al taglio T , nell'ordine, mentre $dA=Bda$ rappresenta un incremento infinitesimo dell'area del crack. Quest'ultimo, disposto nel piano ortogonale a x - y e secondo la giacitura y - z , è definito dalla lunghezza a e dallo spessore B della trave. Ciascuna delle quantità G_P , G_T , G_M rappresenta la variazione di energia liberata con l'estensione del crack e associata al fattore di intensificazione dello sforzo, al cui quadrato risulta proporzionale. Le cedibilità elastiche della trave fessurata si possono ricavare dall'integrazione delle (2.5). Risulta:

$$\mathbf{I}_P = \mathbf{I}_{P0} + \mathbf{I}_{PP} = \mathbf{I}_{P0} + \frac{2(1-\mathbf{n}^2)}{E} \int_0^A \left(\frac{K_{IP}}{P} \right)^2 dA \quad (2.6)$$

$$\mathbf{I}_T = \mathbf{I}_{T0} + \mathbf{I}_{TT} = \mathbf{I}_{T0} + \frac{2(1-\mathbf{n}^2)}{E} \int_0^A \left(\frac{K_{IT}}{T} \right)^2 dA \quad (2.7)$$

$$\mathbf{I}_M = \mathbf{I}_{M0} + \mathbf{I}_{MM} = \mathbf{I}_{M0} + \frac{2(1-\mathbf{n}^2)}{E} \int_0^A \left(\frac{K_{IM}}{M} \right)^2 dA \quad (2.8)$$

Nelle (2.6)-(2.8) \mathbf{I}_{P0} , \mathbf{I}_{T0} , \mathbf{I}_{M0} rappresentano le cedibilità della trave integra, mentre \mathbf{I}_{PP} , \mathbf{I}_{TT} , \mathbf{I}_{MM} sono le cedibilità associate alla presenza del crack.

Nella trave fessurata di Fig.1, la forza assiale P induce un momento flettente rispetto al baricentro della sezione non interessata dalla discontinuità di materia ("ligament"), di dimensioni $B \times (b-a)$, essendo b l'altezza della sezione della trave. Pertanto, le sezioni di estremità subiscono una rotazione relativa per effetto della sollecitazione di sforzo assiale.

Il coefficiente misto di cedibilità, corrispondente all'accoppiamento P-M, assume l'aspetto:

$$\mathbf{I}_{MP} = \mathbf{I}_{PM} = \frac{2(1-\mathbf{n}^2)}{E} \int_0^A \frac{K_{IP}}{P} \frac{K_{IM}}{M} dA \quad (2.9)$$

Nel caso di travi rettilinee fessurate di materiale omogeneo e isotropo, lo sforzo di taglio non interagisce con lo sforzo assiale e il momento flettente, per cui si ha:

$$\mathbf{I}_{MT} = \mathbf{I}_{TM} = 0, \quad \mathbf{I}_{PT} = \mathbf{I}_{TP} = 0 \quad (2.10)$$

La matrice di rigidezza dell'elemento fessurato di lunghezza nulla, corrispondente al crack, si ricava integrando le (2.6)-(2.9), una volta definite le espressioni dei fattori di intensificazione degli sforzi K_{IP} , K_{IM} , K_{IT} riportate nei vari manuali [10-13].

In questo lavoro viene proposto un metodo basato sull'equilibrio per la valutazione approssimata dei fattori di intensificazione degli sforzi. Detto metodo fornisce una soluzione ingegneristicamente valida anche nei casi non contemplati dai manuali in parola.

La matrice di rigidezza dell'elemento finito fessurato di lunghezza nulla, corrispondente al crack è riportata in [21-23]. In quest'ultimo lavoro, però, l'elemento fessurato non risulta sollecitato a sforzo assiale.

3. Matrice di rigidezza interamente popolata

Nel caso generale di elemento finito fessurato di trave ad asse curvilineo, ad ogni caratteristica di sollecitazione restano associate due componenti di spostamento u e v , rispettivamente secondo la tangente e secondo la normale all'asse della trave, e la rotazione \mathbf{j} .

Nelle ipotesi di validità del principio di sovrapposizione degli effetti, le componenti u , v , \mathbf{j} di spostamento generalizzato dei punti di applicazione delle forze P , T , M ammettono la rappresentazione:

$$u = \mathbf{I}_{PP}P + \mathbf{I}_{PT}T + \mathbf{I}_{PM}M, \quad v = \mathbf{I}_{PT}P + \mathbf{I}_{TT}T + \mathbf{I}_{TM}M, \quad \mathbf{j} = \mathbf{I}_{PM}P + \mathbf{I}_{TM}T + \mathbf{I}_{MM}M \quad (3.1)$$

Le (3.1) possono essere scritte nella forma indiciale:

$$u_i = \sum_{j=1}^3 \mathbf{I}_{ij}P_j \quad (3.2)$$

se si pone per gli spostamenti e le forze:

$$u_1 = u, \quad u_2 = v, \quad u_3 = \mathbf{j}, \quad P_1 = P, \quad P_2 = T, \quad P_3 = M \quad (3.3)$$

nonché per le cedibilità

$$\begin{aligned} \ddot{e}_{11} = \ddot{e}_{PP}, \quad \ddot{e}_{12} = \ddot{e}_{PT}, \quad \ddot{e}_{13} = \ddot{e}_{PM}, \quad \ddot{e}_{21} = \ddot{e}_{TP}, \quad \ddot{e}_{22} = \ddot{e}_{TT}, \quad \ddot{e}_{23} = \ddot{e}_{TM}, \\ \ddot{e}_{31} = \ddot{e}_{MP}, \quad \ddot{e}_{32} = \ddot{e}_{MT}, \quad \ddot{e}_{33} = \ddot{e}_{MM} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Per i coefficienti di cedibilità vale la relazione di reciprocità $\mathbf{I}_{ij} = \mathbf{I}_{ji}$ per $i, j = 1, 2, 3$.

I coefficienti di cedibilità possono essere calcolati attraverso la relazione[2]:

$$\mathbf{I}_{ij} = \frac{2(1-\mathbf{n}^2)}{E} \int_0^A \left(\frac{K_{Ii}K_{Ij} + K_{IIi}K_{IIj}}{P_i P_j} \right) dA \quad (3.5)$$

ove K_{Ii} e K_{Ij} sono i fattori di intensificazione degli sforzi del modo I corrispondenti alle forze P_i e P_j , mentre K_{IIi} e K_{IIj} sono i fattori di intensificazione del modo II associati alle medesime forze P_i e P_j .

L'energia di deformazione elastica W può valutarsi attraverso il teorema di Clapeyron:

$$W = \frac{1}{2}(Pu + Tv + M\mathbf{j}) \quad \text{oppure} \quad W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 P_i u_i \quad (3.6)$$

E' possibile esprimere l'energia elastica W come forma quadratica delle componenti di spostamento, considerando le (3.1) come un sistema di tre equazioni ove u , v , \mathbf{j} rappresentano i termini noti, e P , T , M le incognite. Risolvendo con la regola di Cramer, si ricava

$$P = \frac{1}{D}(a_{11}u + a_{12}v + a_{13}\mathbf{j}), \quad T = \frac{1}{D}(a_{12}u + a_{22}v + a_{23}\mathbf{j}), \quad M = \frac{1}{D}(a_{13}u + a_{23}v + a_{33}\mathbf{j}) \quad (3.7)$$

ove si è posto

$$\begin{aligned} a_{11} = \mathbf{I}_{TT}\mathbf{I}_{MM} - \mathbf{I}_{TM}^2, \quad a_{12} = \mathbf{I}_{TM}\mathbf{I}_{PM} - \mathbf{I}_{PT}\mathbf{I}_{MM}, \quad a_{13} = \mathbf{I}_{PT}\mathbf{I}_{TM} - \mathbf{I}_{PM}\mathbf{I}_{TT} \\ a_{22} = \mathbf{I}_{PP}\mathbf{I}_{MM} - \mathbf{I}_{PM}^2, \quad a_{23} = \mathbf{I}_{PT}\mathbf{I}_{PM} - \mathbf{I}_{PP}\mathbf{I}_{TM}, \quad a_{33} = \mathbf{I}_{PP}\mathbf{I}_{TT} - \mathbf{I}_{PT}^2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

essendo:

$$D = \det \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{PP} & \mathbf{I}_{PT} & \mathbf{I}_{PM} \\ \mathbf{I}_{PT} & \mathbf{I}_{TT} & \mathbf{I}_{TM} \\ \mathbf{I}_{PM} & \mathbf{I}_{TM} & \mathbf{I}_{MM} \end{bmatrix} = \det[\mathbf{I}_{ij}] \quad (3.9)$$

La sostituzione delle (3.7) nella (3.6) fornisce:

$$W = \frac{1}{2D}(a_{11}u^2 + a_{22}v^2 + a_{33}\mathbf{j}^2 + 2a_{12}uv + 2a_{13}u\mathbf{j} + 2a_{23}v\mathbf{j}) \quad (3.10)$$

Se si impiegano nella (3.10) le relazioni:

$$u = u_2 - u_1, \quad v = v_2 - v_1, \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}_2 - \mathbf{j}_1 \quad (3.11)$$

per il primo teorema di Castigliano si ricavano le forze nodali seguenti:

$$P_1 = \frac{\partial W}{\partial u_1} = [a_{11}(u_1 - u_2) + a_{12}(v_1 - v_2) + a_{13}(\mathbf{j}_1 - \mathbf{j}_2)]/D$$

$$T_1 = \frac{\partial W}{\partial v_1} = [a_{12}(u_1 - u_2) + a_{22}(v_1 - v_2) + a_{23}(\ddot{o}_1 - \ddot{o}_2)]/D \quad (3.12)$$

$$M_1 = \frac{\partial W}{\partial \ddot{o}_1} = [a_{13}(u_1 - u_2) + a_{23}(v_1 - v_2) + a_{33}(\ddot{o}_1 - \ddot{o}_2)]/D$$

Applicando ancora il primo teorema di Castigliano, oppure in virtù dell'equilibrio, si può scrivere:

$$P_2 = \frac{\partial W}{\partial u_2} = -P_1, \quad T_2 = \frac{\partial W}{\partial v_2} = -T_1, \quad M_2 = \frac{\partial W}{\partial \ddot{o}_2} = -M_1 \quad (3.13)$$

Raccogliendo le forze nodali nel vettore (2.1) e gli spostamenti nodali del vettore (2.2), dalle (3.12) e (3.13) si ricava la matrice di rigidezza della cerniera elastica con deformabilità assiale, tagliante e flessionale:

$$\mathbf{K}_c = \frac{I}{D} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ & a_{22} & a_{23} & -a_{12} & -a_{22} & -a_{23} \\ & & a_{33} & -a_{13} & -a_{23} & -a_{33} \\ & & & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ Sym & & & & a_{22} & a_{23} \\ & & & & & a_{33} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

4. Metodo proposto

Per illustrare il metodo proposto, si consideri una trave comunque caricata contenente una fessura di estremità, disposta secondo la giacitura della sezione retta. Per lo stato deformativo piano, in corrispondenza dell'apice del difetto, il campo tensionale singolare può esprimersi attraverso le tre classiche relazioni ($i, j = 1, 2$):

$$\mathbf{s}_{ij} = \frac{K_i}{\sqrt{2\mathbf{p}r}} f_{ij}(\mathbf{J}) \quad (4.1)$$

ove r e \mathbf{J} sono le coordinate polari, mentre $K_I = K_I$ e $K_{II} = K_{II}$. Se si indicano con $\mathbf{s}_{\mathbf{J}}$ e $\mathbf{t}_{r,\mathbf{J}}$ la componente normale e la componente tangenziale al crack, rispettivamente, è possibile scrivere per $\mathbf{q}=0$:

$$\mathbf{s}_{\mathbf{q}} = \frac{K_I}{\sqrt{2\mathbf{p}r}}, \quad \mathbf{t}_{r,\mathbf{q}} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\mathbf{p}r}} \quad (4.2a,b)$$

Le forze addizionali associate alla distribuzione asintotica possono ricavarsi per integrazione su un intervallo determinato dalla condizione che le componenti di tensione (4.2a)-(4.2b) assumano il valore nominale desunto dall'applicazione della teoria della trave per il caso in esame. In riferimento ai casi di flessione retta, di sforzo normale e di taglio, si assumono le ben note distribuzioni delle componenti di tensione relative alla parte di sezione fessurata in cui vi è continuità materiale ("ligament"). La determinazione dei fattori di intensificazione degli sforzi viene effettuata in base a considerazioni di puro equilibrio.

4.1 Flessione retta

Nel caso della flessione retta, la distribuzione delle tensioni normali riferita alla parte integra della sezione è fornita dalla ben nota formula di Navier:

$$\mathbf{s}_z = \frac{M_x}{I_x^*} y \quad (4.3)$$

ove I_x^* rappresenta il momento d'inerzia della sezione ridotta dalla presenza della fessura. Trattandosi del “modo opening” di estensione della fessura, l'unica componente diversa da zero è \mathbf{s}_q , che nel piano della sezione assume il valore (4.2a).

La forza risultante Q trasmessa in prossimità dell'estremità della fessura è pari a :

$$Q = \int_0^b \frac{K_I}{\sqrt{2pb}} dr \quad (4.4)$$

ove b si determina dalla condizione che la componente (4.2a) assuma a distanza b dall'apice della fessura il valore nominale :

$$\frac{K_I}{\sqrt{2pb}} = \mathbf{s}_z \Big|_{y=\bar{y}-b} \quad (4.5)$$

nella quale \bar{y} è l'ordinata dell'apice della fessura, nel riferimento con origine sull'asse neutro.

4.2 Sforzo normale eccentrico

Per la sollecitazione di sforzo normale eccentrico, la distribuzione delle tensioni normali riferita alla parte integra della sezione è la seguente:

$$\mathbf{s}_z = \frac{N}{A^*} + \frac{N \left(\frac{e+a}{2} \right)}{I^*} y \quad (4.6)$$

ove A^* denota l'area della sezione ridotta dalla fessura, e l'eccentricità e a la profondità della fessura stessa. Trattandosi anche in questo caso del “modo opening” di estensione della fessura, l'unica componente diversa da zero è la (4.2a). La forza risultante trasmessa nella zona prossima all'estremità della fessura è ancora esprimibile attraverso la (4.4) con la condizione (4.5).

4.3 Taglio retto

La distribuzione delle tensioni tangenziali medie riferita alla parte integra della sezione è la seguente:

$$\mathbf{t}_{zy} = \frac{T_y S_x^*}{I^* s} \quad (4.7)$$

con S_x^* momento statico della porzione di sezione ridotta delimitata dalla generica corda, ed s lunghezza della corda stessa. Trattandosi del “modo sliding” di estensione della fessura, l'unica componente diversa da zero è la (4.2b).

La forza risultante trasmessa in corrispondenza dell'estremità della fessura è pari a :

$$\int_0^b \frac{K_{II}}{\sqrt{2pb}} dr \quad (4.8)$$

ove b si determina dalla condizione che la componente (4.2b) assuma a distanza b dall'apice della fessura il valore nominale :

$$\frac{K_{II}}{\sqrt{2pb}} = \mathbf{t}_{zy} \Big|_{y=\bar{y}-b} \quad (4.9)$$

nella quale \bar{y} è l'ordinata dell'apice della fessura.

5. Applicazione alla prova di flessione su tre punti per la determinazione del fattore di intensificazione degli sforzi

Per la determinazione del fattore di intensificazione degli sforzi relativo al modo opening K_I , si prenda in considerazione, ad esempio, la prova di laboratorio standardizzata. Tale prova viene definita "Prova di flessione su tre punti".

Il momento flettente calcolato in corrispondenza della sezione fessurata risulta:

$$M = \frac{Pl}{4} \quad (5.1)$$

La distribuzione delle tensioni normali riferita alla parte integra della sezione fessurata è :

$$\sigma_z = \frac{3Pl}{t(h-a)^3} y \quad (5.2)$$

L'integrale della distribuzione tensionale singolare, calcolato tra l'estremità della fessura ed il valore b , vale:

$$\int_0^b \frac{K_I}{\sqrt{2\mathbf{p}r}} dr = \sqrt{\frac{2b}{\mathbf{p}}} K_I \quad (5.3)$$

Per la (5.2), dalla condizione (4.5) si ricava il valore di K_I :

$$K_I = \frac{3Pl\sqrt{2\delta b}}{t(h-a)^3} \left(\frac{h}{2} - \frac{a}{2} - b \right) \quad (5.4)$$

che, inserito al secondo membro della (5.3), porge:

$$\int_0^b \frac{K_I}{\sqrt{2\delta\delta}} dr = \frac{6Plb}{t(h-a)^3} \left(\frac{h}{2} - \frac{a}{2} - b \right) \quad (5.5)$$

L'equivalenza fra la risultante delle tensioni (5.2), riferite alla parte integra della sezione fessurata, e la risultante delle tensioni singolari (4.4), richiede che si abbia nell'intervallo $(h-a)/2 - b < y < (h-a)/2$:

$$\int_{\frac{h-a}{2}-b}^{\frac{h-a}{2}} \sigma_z dy = \int_0^b \frac{K_I}{\sqrt{2\delta\delta}} dr \quad (5.6)$$

cioè:

$$\frac{3Plb}{2t(h-a)^3} (h-a-b) = \frac{6Plb}{t(h-a)^3} \left(\frac{h}{2} - \frac{a}{2} - b \right) \quad (5.7)$$

Ricavando dalla (5.7) il valore di $b = \frac{(h-a)}{3}$ ed inserendolo nella (5.5), si ottiene:

$$K_I = \sqrt{\frac{\mathbf{p}}{6}} \frac{Pl}{(h-a)^{\frac{3}{2}}} \quad (5.8)$$

ovvero:

$$K_I = \frac{3Pl}{2th^{\frac{3}{2}}} f_1\left(\frac{a}{h}\right) \quad (5.9)$$

con :

$$f_1\left(\frac{a}{h}\right) = \frac{0.482}{\sqrt{\left(1 - \frac{a}{h}\right)^3}} \quad (5.10)$$

La funzione f_1 della forma della sezione può essere comparata con l'espressione ricavata in [18]:

$$f_2 = \sqrt{\frac{\mathbf{b}_M}{3} \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{a}{h}\right)^3} - 1 \right)} \quad (5.11)$$

Il caso $\mathbf{b}_M=1$ corrisponde all'ipotesi di Kienzler and Herrmann [14,15] e viene pertanto considerato per la comparazione.

L'espressione più frequentemente impiegata è quella di Srawley [24]:

$$f_3 = \frac{1,99 - \frac{a}{h} \left(1 - \frac{a}{h}\right) \left(2,15 - 3,93 \frac{a}{h} + 2,7 \left(\frac{a}{h}\right)^2\right)}{\left(1 + 2 \frac{a}{h}\right) \left(1 - \frac{a}{h}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (5.12)$$

valida per tutti i rapporti a/h . La comparazione è mostrata in Fig.2. I risultati ottenuti con il metodo proposto approssimano bene i risultati ottenuti con gli altri approcci.

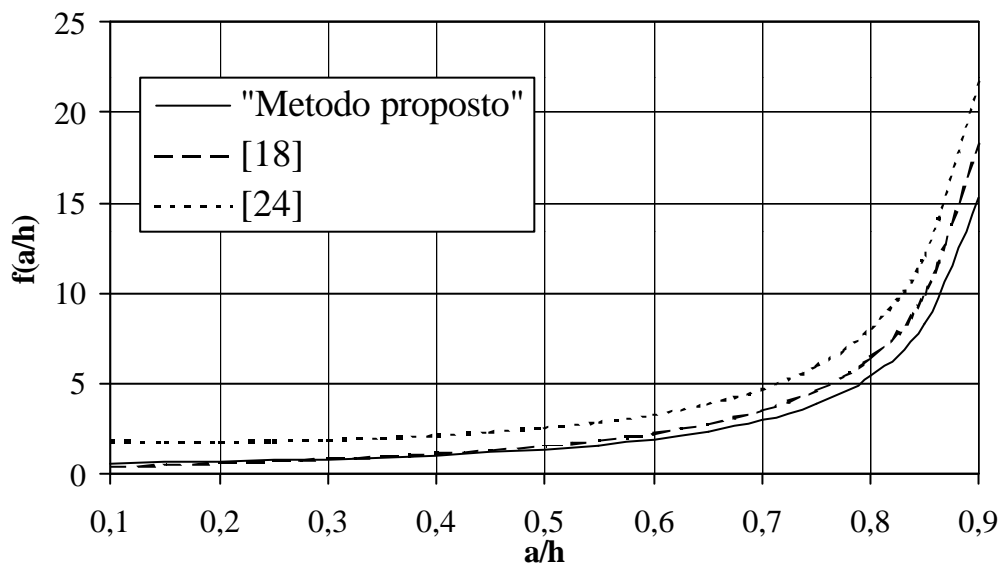


Fig.3- Rappresentazione delle funzioni dipendenti dalla forma della sezione.

Ringraziamenti : questo lavoro è stato svolto con il contributo finanziario del MURST

BIBLIOGRAFIA

- [1] Irwin G.R., "*Fracture Mechanics*". In "*Structural Mechanics*" (Edited by J.N. Goodier and J.J. Woff). Pergamon Press, Oxford, pp.557-564, 1960.

- [2] Okamura H., Watanabe K., Takano H., “*Application of the Compliance Concept in Fracture Mechanics*”, ASTM, STP 536, pp.423-438,1973.
- [3] Carpinteri A., Di Tommaso A., Viola E., “*Fatigue Evolution of Multicracked Frame Structures*”, Proceeding International Conference Anal. Exp. Fracture, Edited by G.C. Sih, pp.417-430, Rome 1980.
- [4] Viola E., Pascale G., “*Static Fatigue and Fracture Analysis of Cracked Beams on Elastic Foundation*”, Engineering Fracture Mechanics, Vol.21(2), pp.365-375, 1985.
- [5] Haddad M.H., El Ramandan O.M., Bazaraa A.R., “*Analysis of Frames Containing Cracks and Resisting on Elastic Foundation*”, International Journal of Fracture, N.45, pp.81-102, 1990.
- [6] Parton V.Z., Morozov E.M., “*Elastic-Plastic Fracture Mechanics*”, Mir Publishers, 1978.
- [7] Hellan Kare, “*Introduction to Fracture Mechanics*”, International Student Edition, 1985.
- [8] Sih G.C., “*Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems*” Martinus Nijhoff Publishers, 1973.
- [9] Broek D., “*Elementary Engineering Fracture Mechanics*”, Noordhoff International Publishing, Leyden, 1974.
- [10] Tada H., Paris P.C., Irwin G.R., “*The Stress Analysis of Cracks Handbook*”, Del Research Corporation, Hellertown, 1985.
- [11] Sih G.C., “*Handbook of Stress Intensity Factors*”, Institute of Fracture and Solid Mechanics, Lehigh University, Bethlehem, PA, 1973.
- [12] Rooke D.P., Cartwright, “*Compendium of Stress Intensity Factors*”, London, Hillingdon Press, Uxbridge, 1976.
- [13] Murakami Y., “*Stress Intensity Factors Handbook*”, Voll.1-2, Pergamon Press, Oxford, 1987.
- [14] Kienzler R., Herrmann G., “*On the Material Forces in Elementary Beam Theory*”, Journal of Applied Mechanics, Vol.53, pp.561-564,1986.
- [15] Kienzler R., Herrmann G., “*An Elementary Theory of Defective Beams*”, Acta Mechanica, Vol.62, pp.37-46, 1986.
- [16] Herrmann G., Sosa H., “*On Bars with Cracks*”, Engineering Fracture Mechanics, Vol.24(6), pp.889-894, 1986.
- [17] Gao H., Herrmann G., “*On Estimates of Stress Intensity Factors for Cracked Beams and Pipes*”, Engineering Fracture Mechanics, Vol.41(5), pp.695-706, 1992.
- [18] Muller W.H., Herrmann G., Gao H., “*Elementary Strength Theory of Cracked Beams*”, Theoretical and Applied Fracture Mechanics, Vol.18, pp.163-177, 1993.
- [19] Bazant Z.P., “*Justification and Improvement of Kienzler and Herrmann’s Estimate of Stress Intensity Factors of Cracked Beam*”, Engineering Fracture Mechanics, Vol.36(3), pp.523-525, 1990.
- [20] Dunn M.L., Suwito W., Hunter B., “*Stress Intensity Factors for Cracked I-Beams*”, Engineering Fracture Mechanics, Vol.57(6), pp.609-615, 1997.
- [21] Tharp T.M., “*A Finite Element for Edge-Cracked Beam Columns*”, International Journal Numerical Methods in Engineering, Vol.24, pp.1941-1950, 1987.
- [22] Miyazaki N., “*Application of Line-Spring Model to Dynamic Stress Intensity Factors Analysis of Pre-Cracked Bending Specimen*”, Engineering Fracture Mechanics, Vol.38(4/5), pp.321-326, 1991.
- [23] Yokoyama T., Chen M.C., “*Vibration Analysis of Edge-Cracked Beams Using a Line-Spring Model*”, Engineering Fracture Mechanics, Vol.59(3), pp.403-409, 1998.
- [24] Srawley J.E., “*Wide Range Stress Intensity Factor Expressions for ASTM E 399 Standard Fracture Toughness Specimen*”, International Journal of Fracture, N.12, pp. 475-476, 1976.