

LA SUPERFICIE SINUSOIDALE COME MODELLO PER LA CONCENTRAZIONE DI TENSIONE IN SUPERFICI RUGOSE

Giuseppe P. Demelio

Dipartimento di Progettazione e Produzione Industriale - Politecnico di Bari
Viale Japigia, 182 - 70126 Bari

Sommario

Il problema della determinazione della distribuzione delle tensioni presenti in una superficie rugosa che delimita un dominio elastico sollecitato da una tensione remota è affrontato in letteratura con tecniche di tipo perturbativo, basate sulla combinazione di contributi tensionali ottenuti per ciascun termine dello sviluppo in serie di Fourier del profilo superficiale. Le soluzioni analitiche note per la singola onda approssimano il comportamento di superfici con profilo sinusoidale solo nel caso di piccoli rapporti tra ampiezza e lunghezza d'onda. In questo lavoro si mostra come la soluzione fornita da Weber nel 1942, relativa ad un profilo cicloidale accorciato, possa essere utilizzata per approssimare la concentrazione tensionale di una sinusoide in un ampio *range* di rapporti ampiezza-lunghezza d'onda, facendo in modo che i due profili abbiano lo stessa curvatura massima. I risultati sono confrontati con quelli numerici ottenuti per mezzo di una analisi ad elementi di contorno. Si confronta infine, per una superficie ottenuta come sovrapposizione di più sinusoidi, l'approccio basato sulla "somma di perturbazioni" esistente in letteratura, con l'approccio basato sul "prodotto di perturbazioni" proposto dall'autore, utilizzando un caso non perfettamente sinusoidale di cui si conosce la soluzione analitica, ottenuta utilizzando lo sviluppo di Weber con due o tre termini.

Abstract

The problem of evaluating the stresses acting on a rough surface subjected to a remote tension is approached in the literature combining the various stress contributions for each sinusoidal wave of the Fourier expansion of the surface profile. The analytic solutions available for the sinusoidal profile are valid under the hypothesis of small ratios of the amplitude to the wavelength. The Weber solution for the cycloidal case (1942) is here applied to the sinusoidal case by matching the notch radius, and the results are compared with those obtained with a boundary element analysis. Moreover a more suitable "perturbation product" approach, based on the classic concept of stress concentration factor, is introduced and compared with the existing "sum of perturbations" approach. The comparison

is based on the analytical solution of the profile obtained by a Weber expansion with two or three terms

1. Introduzione

In letteratura sono reperibili vari studi relativi a superfici con profilo ottenuto come sovrapposizione di componenti periodiche, che delimitano un corpo elastico soggetto al suo interno ad una tensione remota σ_∞ costante ed agente parallelamente alla direzione del profilo medio. Lo studio analitico condotto da Weber (1942) introduce la trasformazione conforme:

$$z = \zeta + i \sum_{k=1}^n a_k e^{ik\zeta} \quad (1)$$

che produce la mappatura del semipiano $\zeta = (\xi, \eta)$ in un semipiano (x, y) con una superficie libera ($\eta = 0$), avente equazione parametrica:

$$x = \xi - \sum_{k=1}^n a_k \sin k\xi \quad y = \sum_{k=1}^n a_k \cos k\xi \quad (2)$$

Tale superficie è, dal punto geometrico, una sovrapposizione di cicloidi accorciate con lunghezze d'onda multiple fra loro. Per tale caso Weber fornisce l'espressione generale della funzione di Airy, che è:

$$F = \phi_1 + \frac{y}{2}(\phi_1 + \phi_2) \quad (3)$$

dove le funzioni ϕ_1 e ϕ_2 sono così definite:

$$\phi_1 = b_0 + \sum_{k=1}^n b_{2i-1} e^{-k\eta} \cos(k\xi) + \sum_{k=1}^n b_{2i} e^{-2k\eta} \cos(2k\xi); \quad \phi_2 = c_0 + \sum_{k=1}^n c_i e^{-k\eta} \cos(k\xi) \quad (4)$$

I parametri b_i, c_i vanno determinati in funzione dell'ampiezza delle perturbazioni superficiali a_i , imponendo le condizioni al contorno sul bordo libero, che si traducono in $F = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial \eta} = 0$ in corrispondenza di $\eta = 0$. Lo studio condotto da Weber è orientato soprattutto alla ricerca della massima tensione in superfici che presentano intagli periodici, e non danno rilevanza alla ricerca globale degli andamenti delle tensioni o allo studio del comportamento di superfici irregolari.

Uno studio considerato fondamentale per le applicazioni in film sottili, è quello condotto da Srolovitz (1989), che considera una superficie sinusoidale ed introduce una funzione di Airy approssimata (suggerita, come evidenziato nei ringraziamenti, da J.R.Barber), con lo scopo di dimostrare che una superficie nominalmente piana risulta instabile e raggiunge uno stato di minore energia attraverso meccanismi di trasporto che la portano verso una configurazione con ondulazioni sempre più pronunciate.

La funzione di Airy introdotta da Srolovitz per un semipiano elastico con superficie sinusoidale $h(x) = g \sin(2\pi x/\lambda)$, sollecitata da una tensione remota σ_∞ , è:

$$F = \frac{\sigma_\infty}{2} y^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k + B_k) e^{-k2\pi y/\lambda} \sin(2\pi k \frac{x}{\lambda}) \quad (5)$$

L'andamento della tensione superficiale, calcolato da Srolovitz troncando la serie al primo termine, è:

$$\frac{\sigma(x)}{\sigma_\infty} = 1 + \frac{4\pi g}{\lambda} \sin(2\pi \frac{x}{\lambda}) \quad (6)$$

Gao (1991) si pone il problema di verificare i limiti di validità della soluzione di Srolovitz, in funzione del rapporto ampiezza su lunghezza d'onda. Sulla base dei risultati ottenuti da una analisi effettuata con elementi finiti, egli mostra come la concentrazione di tensione sia sopravvalutata al crescere del rapporto g/λ tra ampiezza e lunghezza d'onda, con un errore sempre crescente, che supera il 10% per rapporti g/λ maggiori 0.1.

La trasformazione conforme alla base dell'approccio sviluppato da Weber è ripresa successivamente e indipendentemente da Chiu & Gao (1993) e da Vandembrouq & Roux (1997). I primi si concentrano prettamente sulle proprietà assunte da una superficie a profilo cicloidale accorciato, riottenendo la soluzione di Weber per un solo termine, e dimostrando che quando il profilo diviene, al limite, una vera e propria cicloide, il campo tensionale singolare periodico ha un fattore d'intensità degli sforzi coincidente con quello di un array di cricche disposte a passo costante. Vandembrouq & Roux introducono un approccio definito "perturbativo" che calcola l'andamento delle tensioni lungo una superficie irregolare, con una approssimazione del primo ordine, per mezzo della relazione:

$$\frac{\sigma(x)}{\sigma_\infty} = 1 - 2H(y'(x)) \quad (7)$$

dove H è l'operatore trasformata di Hilbert sull'asse reale ed $y'(x)$ è la derivata del profilo, supposta limitata e comunque minore dell'unità. Si noti che l'operatore trasformata di Hilbert è lineare e quando viene applicato al generico termine dello sviluppo in serie di Fourier del profilo, conduce alla soluzione già ottenuta da Srolovitz. Un ulteriore contributo del lavoro di Vandembrouq & Roux è rappresentato dall'introduzione di un algoritmo iterativo, in grado di determinare l'espansione approssimata di un profilo arbitrario secondo la serie introdotta da Weber. Va evidenziato che il lavoro di Weber non è citato in nessuno dei lavori menzionati.

2. Soluzione di Weber per un solo termine

Introducendo un solo termine, la superficie libera di un corpo con profilo affine a quello della trasformazione conforme introdotta da Weber, ha equazione parametrica:

$$x = \xi - a \sin \xi; \quad y = a \cos \xi \quad (8)$$

dove a è un parametro adimensionale definito dalla relazione:

$$a = 2\pi \frac{g}{\lambda} \quad (9)$$

con g pari alla semiescursione massima del profilo e λ pari alla sua lunghezza d'onda. Imponendo le condizioni al contorno per calcolare i coefficienti si ottiene, con passaggi omissi per brevità, la funzione di Airy F , non esplicitata da Weber. Un risultato inaspettato, non estensibile al caso di più termini, è che la F risulta funzione della sola η :

$$F = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4} \frac{a^2}{e^{2\eta}} + \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{1}{2}a^2\eta \quad (10)$$

Lo sviluppo di calcoli piuttosto laboriosi, conduce alle seguenti espressioni per le tensioni lungo il bordo libero del profilo ($\eta = 0$) e le lungo le sue direzioni di simmetria ($\xi = 0, \pi$):

$$\left(\frac{\sigma_{xx}}{\sigma_\infty}\right)_{\eta=0} = \frac{1}{\sigma_\infty} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_{\eta=0} = \frac{(1-a)(a+1)(-1+a \cos \xi)^2}{(a^2 + 1 - 2a \cos \xi)^2} \quad (11)$$

$$\left(\frac{\sigma_{xx}}{\sigma_\infty}\right)_{\xi=0} = \frac{1}{\sigma_\infty} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_{\xi=0} = \frac{1-a^3 - a^3 e^{2\eta} + 2a^2 e^\eta + 2ae^{2\eta} + 2a\eta e^{2\eta} - 2e^{3\eta}}{2(a^3 - 3a^2 e^\eta + 3ae^{2\eta} - e^{3\eta})} \quad (12)$$

$$\left(\frac{\sigma_{xx}}{\sigma_\infty}\right)_{\xi=\pi} = \frac{1}{\sigma_\infty} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_{\xi=\pi} = \frac{1-a^3 - a^3 e^{2\eta} - 2a^2 e^\eta + 2ae^{2\eta} + 2a\eta e^{2\eta} + 2e^{3\eta}}{2(a^3 + 3a^2 e^\eta + 3ae^{2\eta} + e^{3\eta})} \quad (13)$$

$$\left(\frac{\sigma_{yy}}{\sigma_\infty}\right)_{\xi=0} = \frac{1}{\sigma_\infty} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_{\xi=0} = \frac{1}{2} \frac{a(-a^2 + a^2 e^{2\eta} - 2\eta e^{2\eta})}{(a^2 + e^{2\eta} - 2ae^\eta)(a - e^\eta)} \quad (14)$$

$$\left(\frac{\sigma_{yy}}{\sigma_\infty}\right)_{\eta=0} = \frac{1}{\sigma_\infty} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_{\eta=0} = \frac{a^2 \sin^2 \xi (1 - a^2)}{(a^2 + 1 - 2a \cos \xi)^2} \quad (15)$$

Lungo il bordo libero, la tensione superficiale principale massima è pari a:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_\infty}\right)_{\eta=0} = \frac{1 - a^2}{1 + a^2 - 2a \cos \xi} \quad (16)$$

Tutti i risultati qui illustrati comprendono quelli ricavati in Chiu & Gao (1993), con il metodo dei potenziali complessi di Muskhelishvili. Il caso della cicloide si ottiene per $a = 1$ ed in corrispondenza della cuspidale ($\xi = 0$) è presente una singolarità tensionale, il cui fattore di intensità degli sforzi, già calcolato in Chiu & Gao, può essere ottenuto dagli sviluppi della soluzione di Weber. Per $\xi = 0$ si ha:

$$\left(\frac{\sigma_{yy}}{\sigma_\infty}\right)_{\xi=0} = \frac{1}{2} \frac{1 - e^{2\eta} + 2\eta e^{2\eta}}{(1 + e^{2\eta} - 2e^\eta)(-1 + e^\eta)} \quad (17)$$

Tenendo conto che la distanza dalla cuspidale, per punti giacenti sulla retta avente $\xi = 0$, è pari a:

$$r(\eta) = y(\eta) - y(0) = \frac{\lambda}{2\pi} (\eta + e^{-\eta} - 1) \quad (18)$$

Il calcolo del fattore di intensità degli sforzi porta al risultato:

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{yy} \sqrt{2\pi r} = \sigma_\infty \sqrt{\lambda} \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{(1 - e^{2\eta} + 2\eta e^{2\eta}) \sqrt{\eta + e^{-\eta} - 1}}{2(1 + e^{2\eta} - 2e^\eta)(-1 + e^\eta)} = \frac{\sigma_\infty \sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}}. \quad (19)$$

che conduce alla notevole conclusione che il profilo cicloidale, dal punto di vista del fattore di intensità degli sforzi, è equivalente ad un array di cricche semi-infinite distanziate fra loro di λ .

3. Risultati numerici e soluzioni approssimate per il profilo sinusoidale

Nell'introduzione si sono indicati i limiti di validità della soluzione di Srolovitz. Lo studio effettuato da Gao (1991) evidenzia un ulteriore serio problema, nel caso si voglia utilizzare la soluzione di Srolovitz per ricostruire l'andamento completo delle tensioni, poichè, in corrispondenza dei minimi tensionali, a partire da $g/\lambda = 0.1$, mentre la soluzione numerica mostra una tensione che tende ad annullarsi, la soluzione di Srolovitz (Figura 1a) porta ad una tensione di compressione che cresce con legge lineare. Il range di g/λ preso in esame da Gao risulta limitato ed inoltre, ai fini di un confronto con soluzioni approssimate, è necessario disporre dell'andamento delle tensioni superficiali. Per questo motivo è stata effettuata una analisi con elementi di contorno, mettendo a punto una procedura

di generazione automatica della *mesh* con un infittimento ottimizzato. L'accuratezza dei risultati è stata verificata generando una *mesh* per il profilo di Weber e confrontando i risultati con la soluzione analitica.

Volendo approssimare un profilo sinusoidale con una cicloide accorciata di pari ampiezza, il parametro a può essere calcolato dalla equazione (9) ed i valori massimi e minimi delle tensioni dalla relazione (16), ottenendo

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\infty}} &= \frac{1+a}{1-a} = \frac{\lambda+2\pi g}{\lambda-2\pi g} \\ \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\infty}} &= \frac{\lambda-2\pi g}{\lambda+2\pi g}\end{aligned}\quad (20)$$

La figura 1a mostra come in tal caso la soluzione ottenuta risulti rapidamente divergente. Evidentemente in questa forma la soluzione di Weber non può essere utile, sebbene il comportamento in compressione risulti più aderente ai risultati numerici ottenuti.

Una ulteriore possibilità di utilizzazione della soluzione di Weber può essere ottenuta considerando il profilo cicloidale accorciato che ha la stessa curvatura massima di quello sinusoidale. Per il profilo di Weber il raggio di curvatura in $x = 0$ è

$$\rho = \frac{R_0}{\lambda} = \frac{(1-a)^2}{2\pi a} \quad (21)$$

Esprimendo a in funzione di ρ si ottiene:

$$\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\infty}} = \frac{1+a}{1-a} = \sqrt{1 + \frac{4a}{(1-a)^2}} = \sqrt{1 + \frac{2}{\pi\rho}} \quad (22)$$

Per un profilo cosinusoidale del tipo:

$$y = g \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \quad (23)$$

il raggio di curvatura nel punto di ascissa nulla è pari a:

$$\rho = \frac{R}{\lambda} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\lambda}{g} \quad (24)$$

Sostituendo nella (22) si ottiene la relazione:

$$\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\infty}} = \sqrt{1 + 8\pi \frac{g}{\lambda}} \quad (25)$$

E' da notare che la soluzione di Srolovitz per la concentrazione di tensione si può ottenere dall'espansione in serie di Maclaurin della (22) troncata al primo termine. La figura 1a riporta in uno stesso diagramma i risultati ottenuti per i valori massimi e minimi delle tensioni superficiali. La figura 1b mostra i valori massimi in un range più esteso e in un diagramma doppio-logaritmico.

La figura 1a evidenzia come la tensione massima ottenuta con la soluzione di Weber a parità di ampiezza massima sia ancor più divergente rispetto a quella di Srolovitz. Ciò si spiega con la formazione del punto cuspidale per $g/\lambda = 1/2\pi$. La tensione minima è

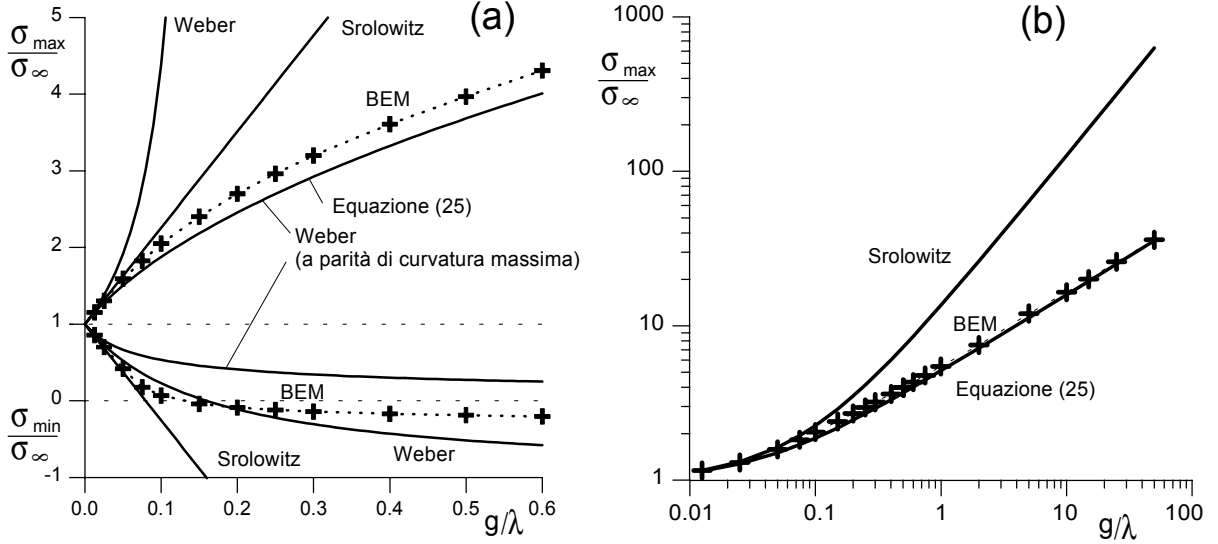


Figura 1: Confronto tra tensioni massime e minime ottenute con le soluzioni approssimate e con la soluzione numerica ad elementi di contorno

invece quella che risulta più aderente ai risultati numerici, sebbene il suo significato, per valori di $g/\lambda > 1/2\pi$, sia di tipo puramente matematico, dal momento che il profilo è costituito da cicloidi allungate, e il relativo problema elastico non ha significato fisico. E' da rilevare che il punto di annullamento e inversione della tensione minima ($1/2\pi$) sia praticamente coincidente con quello ottenuto dall'analisi numerica. L'andamento delle tensioni massime, nel caso della soluzione di Weber a parità di curvatura massima, risulta molto vicino a quello ottenuto per via numerica in un vastissimo intervallo di interesse pratico (figura 1b). La tensione minima risulta invece sempre positiva, tendendo asintoticamente ad annullarsi.

4. Sovrapposizione di più onde sinusoidali

Per la sovrapposizione di più onde sinusoidali non è nota alcuna soluzione analitica, ma e' possibile determinare una soluzione approssimata considerando lo sviluppo di più termini nella serie introdotta da Weber, tenendo conto che il comportamento della sinusoide è approssimato nel caso di limitati rapporti ampiezza-lunghezza d'onda. Le soluzioni analitiche sono ottenibili solo per rapporti interi tra le lunghezze delle onde in sovrapposizione. Inoltre, scegliendo rapporti tra lunghezze d'onda maggiori di 2, la funzione di Airy presenta tutti i contributi relativi a lunghezze d'onda multiple di quella più piccola fino a quella più grande, portando caso per caso a specifiche soluzioni, la cui completa esplicitazione risulta anche assai più onerosa di quella precedentemente illustrata in piccola parte per la singola onda. Per questi motivi i calcoli effettuati prendono come riferimento unicamente i valori massimi delle concentrazioni di tensione. Sono qui state prese in esame le soluzioni relative al caso di sovrapposizione di due onde (il primo caso con rapporto fra lunghezze d'onda 2, il secondo con rapporto 3) e di tre onde il cui rapporto fra lunghezze d'onda è 2 e 3, partendo dal profilo avente equazione parametrica:

$$\begin{aligned} x &= \xi - a_1 \sin \xi - a_2 \sin 2\xi - a_3 \sin 3\xi \\ y &= a_1 \cos \xi + a_2 \cos 2\xi + a_3 \cos 3\xi \end{aligned} \quad (26)$$

Il risultato ottenuto per la concentrazione di tensione è:

$$\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\infty}} = 1 + \frac{2}{1 - a_1 - 2a_2 - 3a_3} \left(\frac{a_1}{1 - a_2 - a_3(a_1 + 2a_3^2)} + 2 \frac{a_2 - a_2a_1a_3 - a_2^2 + a_1a_3 + a_2a_3}{1 - a_2 - a_3(a_1 + 2a_3^2)} + 3a_3 \right) \quad (27)$$

La massima concentrazione ottenibile da ciascuna delle ampiezze considerate singolarmente, in assenza degli altri, è esprimibile nella forma generale:

$$\left(\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\infty}} \right)_{a_k \neq 0} = 1 + \frac{2ka_k}{1 - ka_k} = \frac{1 + ka_k}{1 - ka_k} \quad (28)$$

L'approccio di tipo sommativo conduce alla soluzione:

$$\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\infty}} = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{ka_k}{1 - ka_k} \quad (29)$$

L'approccio in termini di concentrazione di tensione, definito moltiplicativo, è espresso come:

$$\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\infty}} = \prod_{k=1}^n \frac{(1 + ka_k)}{(1 - ka_k)} \quad (30)$$

Il diagramma in figura 2 mostra un confronto tra i metodi di tipo moltiplicativo e sommativo nel caso si utilizzino valori delle ampiezze delle singole perturbazioni scalate in progressione geometrica con ragione $\gamma = a_k/a_{k+1}$. In particolare è mostrato il rapporto fra soluzione approssimate moltiplicative e sommative rispetto alla soluzione analitica al variare dell'ampiezza a_1 della prima onda cicloidale accorciata.

E' immediato notare come l'approccio moltiplicativo fornisca sempre una soluzione più accurata ed è utilizzabile in un range più esteso del rapporto ampiezza/lunghezza d'onda. Tutti i rapporti, al crescere di a_1 tendono ad annullarsi. Ciò è dovuto alla geometria cuspidale assunta dal profilo combinato, con valore analitico della concentrazione tendente all'infinito.

5. Conclusioni

Si è mostrato come la soluzione sviluppata da Weber possa essere utilizzata perseguendo un duplice obiettivo: da un lato ottenere un'approssimazione per il fattore di concentrazione di tensione per la sinusoide valido in un *range* molto esteso di rapporti ampiezza-lunghezza d'onda, dall'altro fornire una metodologia per verificare l'efficienza dei metodi di tipo perturbativo, fra i quali è stato introdotto il metodo moltiplicativo, basato sull'applicazione del concetto di fattore di concentrazione di tensione. Tale metodo, sicuramente efficiente nel caso di sovrapposizione ad un assegnato profilo sinusoidale di un perturbazione dello stesso tipo, ma a lunghezza d'onda molto piccola, è stata verificato utilizzando perturbazioni alla Weber, che tendono alla sinusoidale per piccole ampiezze, nel caso di rapporti tra lunghezze d'onda pari a 2 oppure 3 e nel caso di sovrapposizione di tre perturbazioni con ampiezza in progressione geometrica.

L'utilizzazione combinata dei due risultati ottenuti (approccio moltiplicativo e stima della concentrazione della singola onda con soluzione di Weber a parità di curvatura

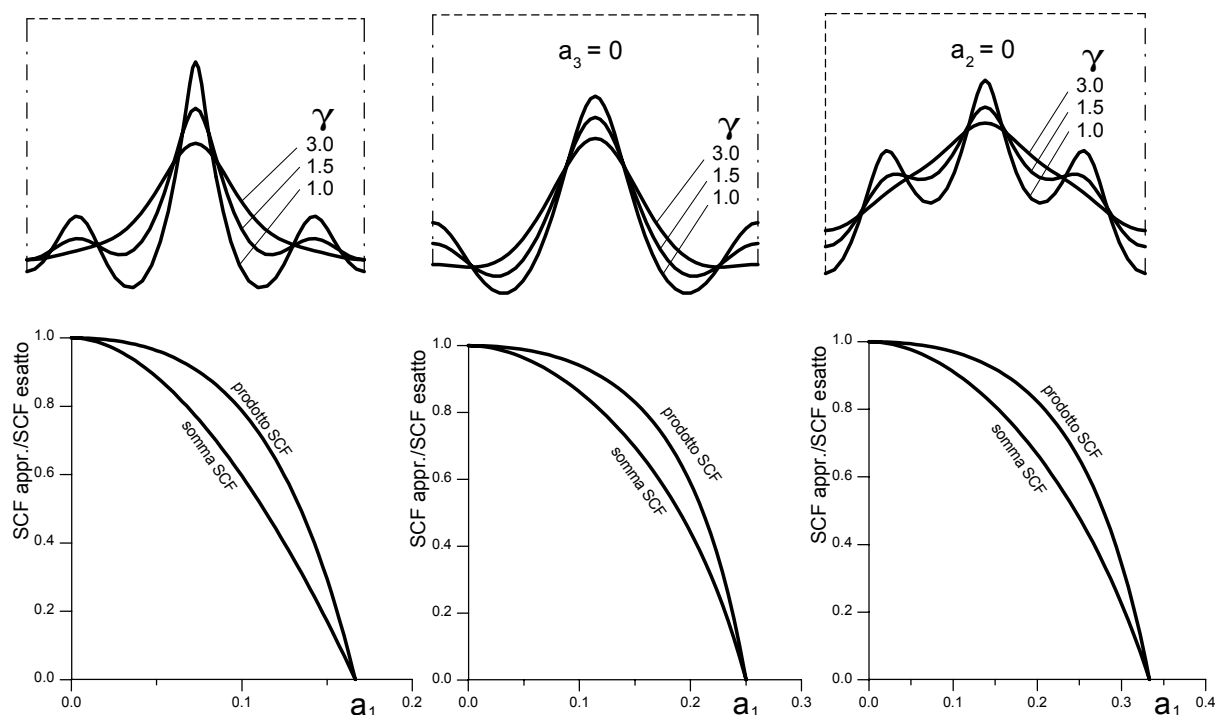


Figura 2: Geometria dei profili ottenibili con tre e due termini dello sviluppo di Weber nel caso di $a_1 = 0.1$ e confronto tra approccio di tipo moltiplicativo e sommativo per $\gamma = 1$.

massima) è promettente per il conseguimento di validi risultati nella determinazione delle distribuzioni delle concentrazioni di tensione e, al limite, dei fattori di intensità degli sforzi in superfici rugose.

BIBLIOGRAFIA

- Weber, C., Halbebene mit periodisch gewelltem Rand, Z.A.M.M., bd.22 (1), 29-34, 1942
- Mandelbrot, B.B. 1982, The Fractal Geometry of Nature, Freeman, San Francisco
- Slorovitz, D., On the stability of surfaces of stressed solids, Acta Metall., 37-2, 621-625, 1989..
- Gao, H., A boundary perturbation analysis for elastic inclusions and interfaces, Int. J. Solids Struct., 28, 703-725, 1991.
- Chiu, C., Gao, H., Stress singularities along a cycloid rough surface, Int. J. Solids Struct., 30 (21), 2983-3012, 1993
- Vandembrouq, D., Roux, S., Conformal mapping on rough boundaries. II. Applications to biharmonic problems, Phys. Rev. E, 55(5). 6186-6196, 1997
- Thomas, T.R., Rough Surfaces, 2nd edition (1999) Imperial College Press, London, UK.