

NUOVE FUNZIONI A POTENZIALE COMPLESSO PER IL CALCOLO DEL CAMPO DI TENSIONE IN PROSSIMITÀ DI INTAGLI DI DIVERSO TIPO

Stefano Filippi ¹, Paolo Lazzarin ²

¹ Dipartimento di Ingegneria Meccanica - Università di Padova, Via Venezia 1, 35100 Padova

² Dipartimento di Tecnica e Gestione dei sistemi industriali - Università di Padova,

Stradella S.Nicola 3 – 36100 Vicenza

essefilippi@dim.unipd.it, lazzarin@dim.unipd.it

Sommario

Nelle stime di resistenza a fatica dei componenti è di fondamentale importanza la conoscenza del campo di tensione in corrispondenza degli intagli. Le equazioni descritte nel presente contributo vengono sviluppate a partire da espressioni già presenti in letteratura per lo studio di intagli a V su piano semi-infinito. Aggiungendo un termine alle funzioni potenziale della formulazione originale, viene migliorata la precisione delle distribuzioni teoriche delle tensioni. I risultati analitici verranno confrontati con i dati numerici relativi sia a modelli con intagli laterali simmetrici (interessati solo da modo I), sia a geometrie tipiche delle giunzioni saldate, dove il campo di tensione locale è dato dalla combinazione di modo I e modo II.

Abstract

Fatigue life predictions of structural components need the accurate knowledge of stress fields at the notch tip (blunt notches) or in the neighbourhood of notches (severe notches). The equations described in the present paper are obtained by modifying some expressions already reported in the literature for V-shaped notches in a semi-infinite plane. By adding a term to the potential functions previously reported, the new solution shows a better agreement with the exact stress fields, in particular for mode I problems. Analytical predictions will be compared with numerical results pertaining both to edge-notched strips under mode I conditions, and welded-like geometries, where the stress fields depend on the opening and sliding mode.

Introduzione

La determinazione dei campi di tensione in prossimità di intagli e discontinuità di carattere geometrico è un problema che ha interessato negli anni numerosi ricercatori. Come evidenziato in [1], le modalità di analisi riportate in letteratura cambiano in modo sostanziale in presenza o assenza

di un raggio di raccordo. Nella referenza [1] si è cercato un approccio unitario allo studio dei campi di tensione dovuti a cricche e intagli aperti a V, con raggio di raccordo all'apice sia nullo sia diverso da zero.

La formulazione prevedeva l'utilizzo di funzioni a potenziale complesso, in accordo con il metodo di Kolosoff-Mushkelisvili [2], e una rappresentazione conforme su piano semi-infinito tramite le coordinate u e v . (Figura 1 e Figura 2).

Successivamente la formulazione è stata estesa a casi di piastra di larghezza finita interessate da intagli di diverso tipo, sia laterali che centrali [3,4]. Come osservato in [1], le distribuzioni di tensione teoriche relative a problemi di modo I presentavano nelle zone a pendenza costante (in un diagramma su scale doppie logaritmiche) uno scostamento sistematico, lieve ma non trascurabile, rispetto ai dati numerici. Tale evento era maggiormente evidente nei casi in cui l'angolo di apertura dell'intaglio risultava superiore a 90° [1].

Nel presente contributo viene aggiunto un termine alle funzioni a potenziale complesso suggerite in [1], con l'obiettivo di rendere più accurata la descrizione dello stato tensionale nella zona critica e di fornire, in presenza di raggi di raccordo ρ sufficientemente ampi, un preciso legame tra tensioni elastiche di picco e tensioni valutate a una distanza dall'apice compresa tra 2ρ e 5ρ . Le relazioni che verranno riportate potrebbero pertanto consentire una stima accurata del fattore di concentrazione delle tensioni usando dati numerici ed estensimetrici ottenuti a una conveniente distanza dall'apice dell'intaglio.

Formulazione del problema

Viene proposta una nuova espressione delle funzioni a potenziale complesso, che vede l'aggiunta del termine d rispetto alle funzioni già riportate da Lazzarin e Tovo in [1]:

$$\varphi(z) = a \cdot z^\lambda + d \cdot z^\mu ; \quad \psi(z) = b \cdot z^\lambda + c \cdot z^\mu ; \quad (1)$$

Dalle (1) derivano le seguenti espressioni delle componenti di tensione:

$$\sigma_\vartheta = \lambda r^{\lambda-1} [a_1 (1+\lambda) \cos(1-\lambda)\vartheta + b_1 \cos(1+\lambda)\vartheta + a_2 (1+\lambda) \sin(1-\lambda)\vartheta - b_2 \sin(1+\lambda)\vartheta] + \mu r^{\mu-1} [d_1 (1+\mu) \cos(1-\mu)\vartheta + c_1 \cos(1+\mu)\vartheta + d_2 (1+\mu) \sin(1-\mu)\vartheta - c_2 \sin(1+\mu)\vartheta] ; \quad (2)$$

$$\sigma_r = \lambda r^{\lambda-1} [a_1 (3-\lambda) \cos(1-\lambda)\vartheta - b_1 \cos(1+\lambda)\vartheta + a_2 (3-\lambda) \sin(1-\lambda)\vartheta + b_2 \sin(1+\lambda)\vartheta] + \mu r^{\mu-1} [d_1 (3-\mu) \cos(1-\mu)\vartheta - c_1 \cos(1+\mu)\vartheta + d_2 (3-\mu) \sin(1-\mu)\vartheta + c_2 \sin(1+\mu)\vartheta] ; \quad (3)$$

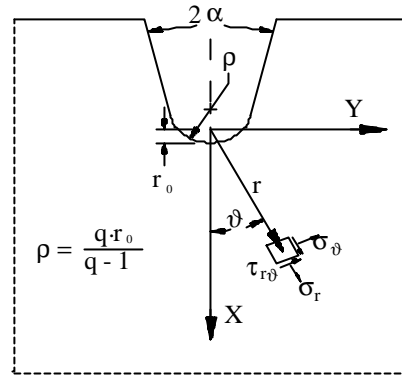


Figura 1
Sistema di riferimento polare.

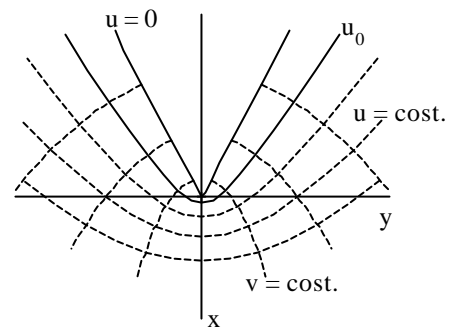


Figura 2
Sistema di riferimento ausiliario [1]

$$\tau_{r\vartheta} = \lambda r^{\lambda-1} [a_1(1-\lambda) \operatorname{sen}(1-\lambda)\vartheta + b_1 \operatorname{sen}(1+\lambda)\vartheta - a_2(1-\lambda) \operatorname{cos}(1-\lambda)\vartheta + b_2 \operatorname{cos}(1+\lambda)\vartheta] + \mu r^{\mu-1} [d_1(1-\mu) \operatorname{sen}(1-\mu)\vartheta + c_1 \operatorname{sen}(1+\mu)\vartheta - d_2(1-\mu) \operatorname{cos}(1-\mu)\vartheta + c_2 \operatorname{cos}(1+\mu)\vartheta] ; \quad (4)$$

dove r e ϑ rappresentano le coordinate nel sistema di riferimento locale (Figura 1), λ è l'autovalore di Williams [5] e, infine, μ , a , b , c , d , sono i parametri caratteristici della nuova soluzione. Le nuove funzioni, dal punto di vista formale, risultano essere la somma di due potenziali di Williams, cosicché la condizione di biarmonicità è sicuramente verificata.

Determinazione delle costanti per problemi di modo I

Seguendo la procedura riportata in [1], si formula l'ipotesi che λ sia maggiore di μ , cosicché la componente di tensione legata al secondo esponente diviene trascurabile rispetto alla prima ad una certa distanza dall'apice. Pertanto le equazioni utilizzate per il calcolo di λ_1 e b_1 sono quelle usate da Williams [5]. L'introduzione del parametro d richiede ovviamente una condizione al contorno aggiuntiva rispetto a quanto previsto in [1].

$$(\sigma_u)_{v=0}^{u=u_0} = 0 ; \quad \left(\frac{\partial \tau_{uv}}{\partial v} \right)_{v=0}^{u=u_0} = 0 ; \quad (\sigma_u)_{v \gg v_0}^{u=u_0} = 0 ; \quad (5)$$

Lasciando invariate le due condizioni al contorno relative all'apice, si impone qui che la componente in μ della tensione σ_u sia nulla sul bordo. Esplicitando le condizioni al contorno (5), si ottengono i parametri b_1 , c_1 , d_1 . In particolare valgono le seguenti espressioni:

$$\left\{ \left[\frac{1-q(1+\mu_1)}{q} \right] [3-\lambda_1 - \chi_1(1-\lambda_1)] - \varepsilon_1 \right\} (1+\mu_1) \cos \left[(1-\mu_1)q \frac{\pi}{2} \right] + \left\{ (1-\mu_1)^2 - \frac{1}{q}(1+\mu_1) \right\} [3-\lambda_1 - \chi_1(1-\lambda_1)] - (3-\mu_1)\varepsilon_1 \left\} \cos \left[(1+\mu_1)q \frac{\pi}{2} \right] = 0 ; \quad (6)$$

$$c_1 = \left\{ \left[(1-\mu_1)^2 - \frac{1}{q}(1+\mu_1) \right] [(3-\lambda_1) - \chi_1(1-\lambda_1)] - (3-\mu_1)\varepsilon_1 \right\} \frac{q\lambda_1 r_0^{\lambda_1-\mu_1}}{4\mu_1(q-1)} a_1 ; \quad (7)$$

$$d_1 = \left\{ \left[\frac{1-q(1+\mu_1)}{q} \right] [3-\lambda_1 - \chi_1(1-\lambda_1)] - \varepsilon_1 \right\} \frac{q\lambda_1 r_0^{\lambda_1-\mu_1}}{4\mu_1(q-1)} a_1 ; \quad (8)$$

$$\varepsilon_1 = \left[(1-\lambda_1)^2 + \chi_1(1-\lambda_1^2) - \frac{1}{q}(1+\lambda_1) - \frac{1}{q}\chi_1(1-\lambda_1) \right] ; \quad (9)$$

Il coefficiente χ_1 non cambia rispetto alla definizione riportata in [1]. I parametri b_1 , c_1 , e d_1 sono noti a meno del fattore moltiplicativo a_1 , che può essere determinato utilizzando il valore della tensione elastica di picco σ_0 , in alternativa, il valore di un parametro di campo K_1 , in accordo con quanto già esposto in [1].

Determinazione delle costanti per problemi di modo II

Come per il modo I, le costanti λ_2 e b_2 coincidono con quelle di Williams [5]. Per il calcolo dei restanti parametri, oltre alle condizioni all'apice, è necessario introdurre un vincolo ulteriore sulla componente in μ della τ_{uv} .

$$(\tau_{uv})_{\substack{u=u_0 \\ v=0}} = 0; \quad \left(\frac{\partial \sigma_u}{\partial v} \right)_{\substack{u=u_0 \\ v=0}} = 0; \quad (\tau_{uv})_{\substack{u=u_0 \\ v \gg v_0}} = 0; \quad (10)$$

Esplicitando le (10), si ricavano i parametri μ_2 , c_2 , d_2 con le relazioni (11-14):

$$-\left\{ \left[\frac{q(1+\mu_2)-2}{q} \right] [\lambda_2 - 1 - \chi_2(1+\lambda_2)] - \varepsilon_2 \right\} (1-\mu_2) \cos \left[\frac{q}{2} \pi(1-\mu_2) \right] + \left\{ (\mu_2-1) \left[\frac{q(\mu_2-3)-2}{q} \right] [(\lambda_2-1) - \chi_2(1+\lambda_2)] + (1-\mu_2)\varepsilon_2 \right\} \cos \left[\frac{q}{2} \pi(1+\mu_2) \right] = 0; \quad (11)$$

$$c_2 = \left\{ (\mu_2-1) \left[\frac{q(\mu_2-3)-2}{q} \right] [(\lambda_2-1) - \chi_2(1+\lambda_2)] + (1-\mu_2)\varepsilon_2 \right\} \frac{\lambda_2 r_0^{\lambda_2-\mu_2}}{4\mu_2(\mu_2-1)} a_2; \quad (12)$$

$$d_2 = -\left\{ \left[\frac{q(1+\mu_2)-2}{q} \right] [\lambda_2 - 1 - \chi_2(1+\lambda_2)] - \varepsilon_2 \right\} \frac{\lambda_2 r_0^{\lambda_2-\mu_2}}{4\mu_2(\mu_2-1)} a_2; \quad (13)$$

$$\varepsilon_2 = (3-\lambda_2)(1-\lambda_2) - \chi_2(1+\lambda_2)^2 + \frac{2}{q}(1-\lambda_2) + \frac{1}{q}\chi_2(1+\lambda_2); \quad (14)$$

Anche in questo caso, i parametri b_2 , c_2 , d_2 sono noti a meno del fattore moltiplicativo a_2 . Contrariamente a quanto osservato per le distribuzioni di modo I, non è possibile utilizzare un criterio di picco per tarare la soluzione di modo II, in quanto all'apice tutte le tensioni sono nulle. Si utilizzerà quindi un criterio di campo, basandosi sull'andamento delle $\tau_{r\theta}$ per $\theta = 0$.

Confronto con risultati FEM e altre soluzioni presenti in letteratura

Le Tabelle 1 e 2 mettono a confronto i valori dei parametri che compaiono nelle (2), (3) e (4) e quelli caratteristici della formulazione riportata in [1].

Tabella 1

Valore dei parametri relativi alle distribuzioni di tensione di modo I.

2α [rad]	ρ [mm]	λ_1	b_1	μ_1	d_1	c_1	μ_1 [1]	c_1 [1]
0	0.5	0.5	0.5	-0.5	0	-0.5	-0.5	-0.5
$\pi/4$	0.5	0.5050	0.5769	-0.4319	-0.0013	-0.5753	-0.3877	-0.6288
$\pi/2$	0.5	0.5448	0.8388	-0.3449	-0.0252	-0.6027	-0.2802	-0.7168
$3\pi/4$	0.5	0.6736	1.3558	-0.2198	-0.0333	-0.48651	-1.5045	-0.6518

Tabella 2

Valore dei parametri relativi alle distribuzioni di tensione di modo II.

2α [rad]	ρ [mm]	λ_2	b_2	μ_2	d_2	c_2	μ_2 [1]	c_2 [1]
0	0.5	0.5	-1.5	-0.5	0	-0.5	-0.5	-0.5
$\pi/4$	0.5	0.6597	-1.351	-0.118	-0.0246	-0.5548	-0.1451	-2.2255
$\pi/2$	0.5	0.9085	-0.4178	-0.2882	-0.0175	-0.2106	0.1901	-0.6719
$3\pi/4$	0.5	1.3021	1.311	-0.1514	-0.0747	0.5743	0.5530	-0.6768

I dati in Tabella 1 e2 mostrano come la nuova formulazione comporti variazioni significative di μ e c solo nel caso di ampi angoli di apertura. Si può inoltre osservare come per $2\alpha=0$ la nuova soluzione continui ad essere in accordo con i coefficienti della soluzione classica di Glinka [6]. Il grado di accuratezza delle nuove espressioni è stata verificato utilizzando diversi modelli numerici, i primi sollecitati secondo modo I, i secondi da modo I e modo II combinati.

Tabella 3

Dati caratteristici dei modelli con intagli laterali simmetrici a U e a V

n°	a [mm]	2α [mm]	ρ [mm]	H [mm]	h [mm]	$K_{t \text{ gros}}$	$K_{t \text{ net}}$
1	10	0	2,5	40	20	5,57	2,79
2	10	0	2,5	60	40	5,33	3,56
3	10	0	1,25	60	40	7,26	4,84
4	10	0	0,5	60	40	11,12	7,41
5	10	0	0,5	100	80	11,31	9,05
6	10	45	2,5	60	40	5,33	3,55
7	10	45	1,25	60	40	7,25	4,83
8	10	45	0,5	60	40	11,09	7,40
9	10	90	2,5	60	40	5,27	3,51
10	10	90	1,25	60	40	7,08	4,72
11	10	90	0,5	60	40	10,61	7,07
12	10	135	0,5	40	20	4,83	2,42
13	10	135	0,5	60	40	4,50	3,00
14	10	135	0,5	100	80	4,58	3,66
15	10	135	2,5	40	20	8,10	4,05
16	10	135	2,5	60	40	7,57	5,04
17	10	135	2,5	100	80	7,70	6,16

In Tabella 3 sono riportati i dati geometrici e i valori di $K_{t \text{ net}}$ e $K_{t \text{ gross}}$ relativi a 17 modelli con intagli laterali simmetrici (Figura 3). Le analisi Tutte le simulazioni sono state svolte con il codice di calcolo ANSYS nell'ipotesi di stato piano di deformazione. Per quantificare l'errore che le nuove equazioni comportano rispetto ai dati FEM, si è valutato per i diversi modelli lo scarto percentuale $\Delta\%$ così definito:

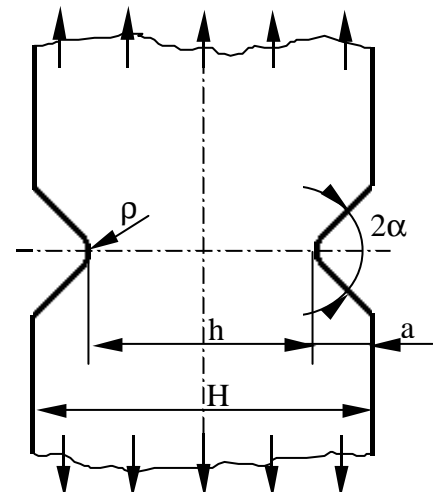


Figura 3
Parametri geometrici del modello

$$\Delta\% = \frac{(\mathbf{s}_{J \ J=0})_{FEM} - (\mathbf{s}_{J \ J=0})_{Analitico}}{(\mathbf{s}_{J \ J=0})_{FEM}} \cdot 100 \quad (15)$$

In Tabella 4 sono riportati i valori di $\Delta\%$ valutati lungo l'asse di simmetria a varie distanze dall'apice dell'intaglio. La costante a_1 che compare nelle equazioni è stata determinata con un criterio di picco, cosicché l'errore è nullo per $r = r_0$. E' possibile osservare come le stime offerte dalla nuova soluzione risultino nel complesso più che soddisfacenti, in particolare per angoli di apertura 2α di 135° (modelli 12-17). Tale condizione è tipicamente presente nelle giunzioni saldate.

Tabella 4

Variazioni percentuali $\Delta\%$ tra valori numerici e previsioni teoriche

n°	$\Delta\%$							
	(r-ro)/ $\rho=0,1$	(r-ro)/ $\rho=0,2$	(r-ro)/ $\rho=0,3$	(r-ro)/ $\rho=0,4$	(r-ro)/ $\rho=0,5$	(r-ro)/ $\rho=0,7$	(r-ro)/ $\rho=1$	(r-ro)/ $\rho=3$
1	-0.50	-1.27	-1.96	-2.48	-2.76	-2.60	-1.07	-
2	-0.90	-2.01	-3.01	-3.82	-4.36	-4.71	-3.84	-
3	-0.47	-1.41	-2.41	-3.33	-4.08	-5.12	-5.65	-
4	-0.02	-0.76	-1.50	-2.45	-3.32	-4.66	-5.96	-4.80
5	-0.03	-0.77	-1.52	-2.49	-3.37	-4.75	-6.12	-5.47
6	1.07	1.14	0.99	0.76	0.62	1.31	2.00	-
7	1.63	1.75	1.53	1.21	0.87	0.42	0.33	-
8	1.86	2.31	2.34	1.95	1.51	0.77	0.03	1.97
9	2.66	3.31	3.15	2.85	2.55	2.34	2.72	-
10	2.88	3.51	3.38	3.04	2.52	1.81	1.25	-
11	3.06	3.90	3.74	3.26	2.74	1.83	0.90	1.34
12	2.94	2.80	2.23	1.86	1.67	1.81	2.7	-
13	2.70	2.30	1.43	0.81	0.28	-0.11	-0.06	4.41
14	2.61	2.11	1.11	0.36	-0.32	-0.92	-1.57	0.75
15	2.71	2.31	1.43	0.74	0.202	-0.49	-0.65	0.58
16	2.68	2.23	1.31	0.56	-0.03	-0.71	-1.18	-1.07
17	2.69	2.21	1.26	0.50	0.12	-0.84	-1.40	1.79

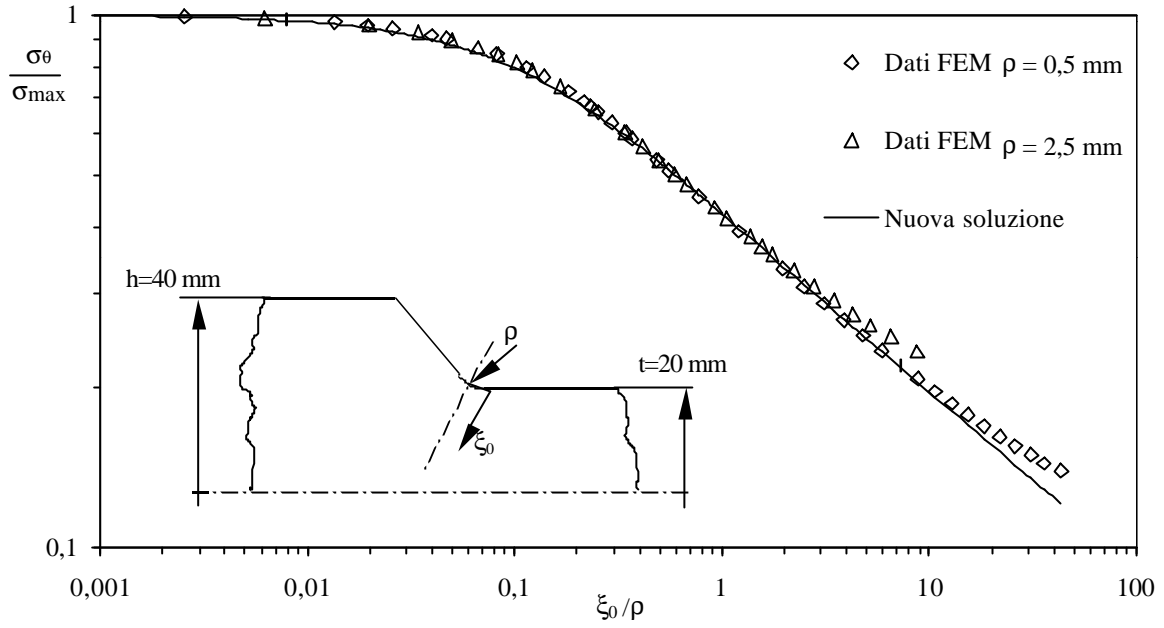


Figura 4
 Andamento delle tensioni s_q per $q=0$ in giunti saldati con diverso raggio di raccordo.

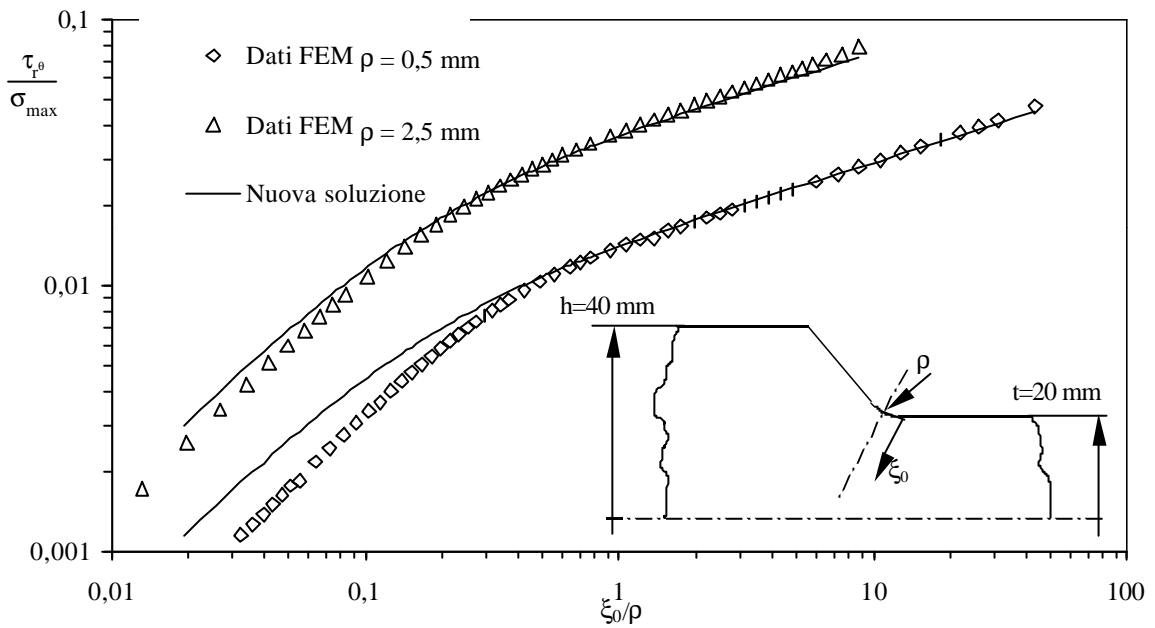


Figura 5
 Andamento delle tensioni t_q per $q=0$ su giunti saldati con diverso raggio di raccordo.

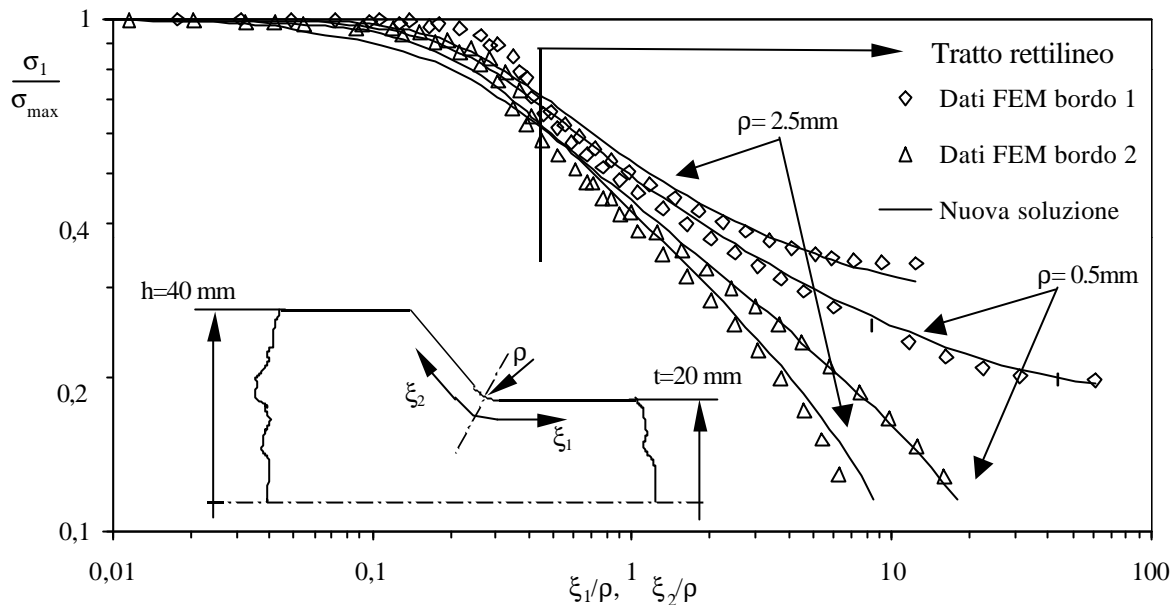


Figura 6
Andamento delle tensioni sul bordo d'intaglio su giunti saldati con diverso raggio di raccordo.

Le Figure 4 e 5 mostrano gli andamenti delle tensioni in geometrie analoghe a quelle delle unioni saldate, per due diversi raggi di raccordo al piede dei cordoni. In questo caso, lo stato di tensione è dato dalla combinazione di equazioni di modo I e modo II. I parametri a_1 e a_2 sono stati determinati con un criterio di campo, tarato rispettivamente sulle tensioni σ_θ e $\tau_{r\theta}$ valutate lungo la bisettrice dell'intaglio ($\theta = 0$) [7].

Infine, la Figura 6 mostra come sulla superficie esterna del giunto sia presente un buon accordo tra dati numerici e previsioni analitiche, in particolare per distanze maggiori di ρ . Pare dunque possibile stimare con sufficiente accuratezza lo stato di tensione all'apice sulla base di misure effettuate ad una conveniente distanza dall'apice stesso. Ciò dovrebbe consentire l'estensione di criteri basati sul fattore di intensificazione delle tensioni K_I [7] anche alle geometrie con raggi di raccordo non nulli.

Conclusioni

E' stata presentata una nuova formulazione per il calcolo del campo di tensione in prossimità di intagli a U e a V raccordati. Rispetto alle espressioni già suggerite in passato da uno degli scriventi [1], è stato introdotto un nuovo termine a potenziale complesso con l'intento di migliorare la previsione dei campi di tensione di modo I. I nuovi potenziali appaiono formalmente come la somma di due potenziali di Williams, cosicché la condizione di biarmonicità è automaticamente soddisfatta. Il confronto tra previsioni teoriche e dati numerici ha mostrato un accordo assai soddisfacente per una serie di modelli simmetrici sollecitati secondo modo I.

Le equazioni proposte sono state poi applicate a geometrie tipicamente presenti nelle unioni saldate, imponendo al piede del cordone un raggio di raccordo ρ pari a 0,5 e 2,5 mm. Sulla superficie la tensione principale massima (che dipende dalla combinazione di modo I e modo II) è risultata in ottimo accordo con i dati FEM per distanze superiori a 2ρ . Tale evento appare particolarmente interessante da un punto di vista applicativo, in quanto rende possibile una stima sufficientemente

accurata del valore di picco elastico delle tensioni a partire da dati numerici o da misure estensimetriche ottenute a una conveniente distanza dall'apice dell'intaglio.

Bibliografia

- [1] Lazzarin P., Tovo R., “*A Unified Approach to the Evaluation of Linear Elastic Stress Field in the Neighbourhood of Cracks and Notches*”, International Journal of Fracture, **78**, 3-19, **1996**
- [2] N.I. Mushkelishvili, “*Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*”, Noordhoff Leyden, **1953**
- [3] Lazzarin P., Tovo R., Filippi S., “*Stress Distributions in Finite Size Plates with Edge Notches*”, International Journal of Fracture, **81**, 269-282, **1998**
- [4] Filippi S., Lazzarin P., “*Distribuzioni Approssimate della Tensione Principale Massima in Piastre di Larghezza Finita con Intagli Circolari ed Ellittici*”, Atti XXVIII Convegno AIAS, 103-112, **1999**
- [5] Williams M. L., “*Stress Singularities Resulting From Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates In Tension*”, Journal of Applied Mechanics, **19**, 526-528, **1952**
- [6] Glinka G., Newport A., “*Universal Features of Elastic Notch-Tip Stress Fields*”, International Journal of Fatigue, **9**, 143-150, **1987**
- [7] Lazzarin P., Tovo R.: “*A Notch Stress Intensity Factor Approach to the Stress Analysis of Welds*”, Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures, **21**, 1089-1104, **1998**