

# **CRITERI PER LA DETERMINAZIONE DELLA VITA A FATICA DI STRUTTURE SOGGETTE A CARICHI MULTIASSIALI**

**Andrea Carpinteri, Roberto Brighenti, Andrea Spagnoli**

*Department of Civil Engineering, University of Parma,  
Parco Area delle Scienze 181/A, 43100 Parma, Italy  
E-mail: carpint@parma1.eng.unipr.it*

## **Sommario**

Secondo il cosiddetto ‘approccio del piano critico’, il piano rispetto a cui eseguire la verifica a fatica è determinato massimizzando le ampiezze e/o i valori di alcune componenti di tensione. Nella presente nota è proposta una relazione tra la giacitura del piano critico e le direzioni medie delle tensioni principali, direzioni ottenute utilizzando il metodo delle funzioni peso. La verifica a fatica è poi eseguita considerando una funzione delle componenti di tensione agenti sul piano critico. I risultati ricavati applicando il presente criterio e criteri proposti da altri autori sono messi a confronto con le risultanze di numerose prove sperimentali relative a differenti metalli fragili (duri) soggetti a stati piani di tensione sinusoidale, in fase e fuori fase.

## **Abstract**

*According to the so-called critical plane approach, the plane where the fatigue failure assessment should be performed is determined by maximising the amplitudes and/or values of some stress components. In the present paper, the critical plane orientation is proposed to be correlated with the averaged principal stress directions deduced through the weight function method. Then the fatigue failure assessment is performed by considering a function of the stress components acting on the critical plane. The results derived by applying this criterion or some critical plane criteria proposed by other authors are compared with experimental data related to different brittle (hard) metals under in-phase or out-of-phase sinusoidal biaxial stress states.*

## **1. Introduzione**

I numerosi criteri, sviluppati negli ultimi decenni per la verifica a fatica di strutture soggette a carichi multiassiali, sono generalmente volti a ridurre uno stato di tensione multiassiale ad una

condizione di tensione monoassiale equivalente (si veda, ad esempio, lo stato dell'arte sull'argomento in [1]). Alcuni di questi criteri sono basati sul cosiddetto 'approccio del piano critico', secondo il quale la verifica a fatica è eseguita rispetto al piano dove l'ampiezza o il valore di specifiche componenti di tensione raggiunge un massimo [2-5]. In alternativa, la posizione del piano critico può essere messa in relazione con le direzioni principali di tensione. Tuttavia, dal momento che tali direzioni, nel caso di carichi di fatica, sono generalmente variabili nel tempo, appare opportuno utilizzare una procedura per mediare i valori istantanei delle direzioni principali di tensione.

Nella presente nota viene illustrato un criterio che mette in relazione la giacitura del piano critico con le direzioni principali medie di tensione, direzioni determinate attraverso il metodo delle funzioni peso [6-8]. Successivamente la verifica a fatica è eseguita considerando una funzione quadratica dell'ampiezza della componente tangenziale e del massimo valore della componente normale agenti sul piano critico. Il criterio viene applicato ad una serie di prove sperimentali, reperibili in letteratura, su metalli fragili (duri) soggetti a stati piani di tensione prodotti da carichi variabili sinusoidalmente sia in fase che fuori fase. Per i materiali esaminati, il valore del rapporto tra il limite di fatica per torsione alterna e quello per flessione alterna,  $\tau_{af}/\sigma_{af}$ , ricade nell'intervallo  $(1/\sqrt{3}, 1)$ .

## 2. Alcuni criteri basati sull'approccio del piano critico

Consideriamo uno stato piano di tensione, rappresentato da due componenti normali ed una tangenziale, nel generico punto P di un corpo cilindrico (Figura 1a) soggetto a carichi sincroni non proporzionali, variabili con legge sinusoidale:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{xx} &= \mathbf{s}_t(t) = \mathbf{s}_{t,a} \sin(\mathbf{w} - \mathbf{a}) + \mathbf{s}_{t,m} \\ \mathbf{s}_{yy} &= \mathbf{s}_l(t) = \mathbf{s}_{l,a} \sin(\mathbf{w}) + \mathbf{s}_{l,m} \\ \mathbf{s}_{xy} &= \mathbf{t}(t) = \mathbf{t}_a \sin(\mathbf{w} - \mathbf{b}) + \mathbf{t}_m \end{aligned} \quad (1)$$

dove i pedici  $t$ ,  $l$ ,  $a$  e  $m$  stanno per tangenziale (circonferenziale), longitudinale, ampiezza e valore medio, rispettivamente.

Consideriamo il piano  $\Delta$ , passante per il punto P, ed i due versori ortogonali,  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ , appartenenti a tale piano (Figura 1b). Assumiamo la direzione del versore  $\mathbf{u}$  coincidente con l'intersezione tra il piano  $\Delta$  ed il piano definito dalla normale  $\mathbf{w}$  e dall'asse Z, in modo che Puvw sia un sistema di coordinate ortogonali levogiro. I coseni direttori, rispetto al sistema di coordinate PXYZ, dell'asse  $w$  possono essere espressi in funzione dei due angoli,  $\varphi$  e  $\vartheta$ , in un sistema di coordinate sferico ( $0^\circ \leq \varphi < 360^\circ$ ;  $0^\circ \leq \vartheta \leq 180^\circ$ ):  $l_w = \sin \vartheta \cos \varphi$ ,  $m_w = \sin \vartheta \sin \varphi$ ,  $n_w = \cos \vartheta$  (Figura 1b). Inoltre, i coseni direttori degli assi  $u$  e  $v$  sono rispettivamente uguali a  $l_u = \cos \vartheta \cos \varphi$ ,  $m_u = \cos \vartheta \sin \varphi$ ,  $n_u = -\sin \vartheta$  e  $l_v = -\sin \vartheta$ ,  $m_v = \cos \varphi$ ,  $n_v = 0$ .

Il vettore tensione  $\mathbf{S}_w$  agente nel punto P del piano  $\Delta$  (Figura 1b) può essere determinato mediante il tensore degli sforzi  $\mathbf{s}$ :

$$\mathbf{S}_w = \mathbf{s} \cdot \mathbf{w} \Rightarrow [S_w] = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{xx} & \mathbf{s}_{xy} & 0 \\ \mathbf{s}_{xy} & \mathbf{s}_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_w \\ m_w \\ n_w \end{bmatrix} \Rightarrow [S_w] = \begin{bmatrix} \sin \vartheta (\mathbf{s}_t \cos \varphi + \mathbf{t} \sin \varphi) \\ \sin \vartheta (\mathbf{s}_l \sin \varphi + \mathbf{t} \cos \varphi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Il valore scalare  $N(t)$  della componente normale di tensione risulta

$$N(t) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{S}_w \Rightarrow N(t) = \sin^2 \vartheta \left[ \mathbf{s}_t \cos^2 \varphi + \mathbf{s}_l \sin^2 \varphi + \mathbf{t} \sin 2\varphi \right] \quad (3)$$

Sostituite le componenti di tensione (1) nella (3), possono essere poi determinati il valore medio  $N_m$  e l'ampiezza  $N_a$  di  $N(t)$  [8].

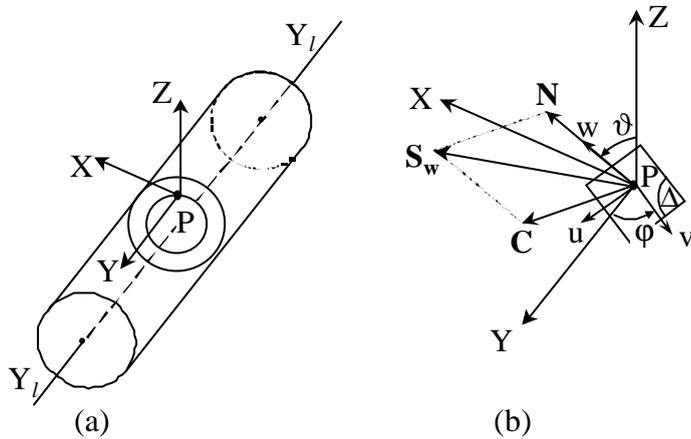


Figura 1

(a) Sistema di coordinate PXYZ ;  
(b) Sistema di coordinate Puvw ,  
con l'asse w normale al piano  $\Delta$

La tensione tangenziale  $\mathbf{C}$ , giacente nel piano  $\Delta$ , è calcolata utilizzando le espressioni (2) :

$$\mathbf{C} = \mathbf{S}_w - \mathbf{N} = \mathbf{S}_w - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{S}_w) \cdot \mathbf{w} \Rightarrow [\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} \sin \vartheta \left[ \cos \varphi \left( \mathbf{s}_t \cos^2 \vartheta + (\mathbf{s}_l - \mathbf{s}_t) \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi \right) + \mathbf{t} \sin \varphi \left( 1 - 2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi \right) \right] \\ \sin \vartheta \left[ \sin \varphi \left( \mathbf{s}_l \cos^2 \vartheta + (\mathbf{s}_l - \mathbf{s}_t) \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi \right) + \mathbf{t} \cos \varphi \left( 1 - 2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi \right) \right] \\ - \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \left( \mathbf{s}_t \cos^2 \varphi + \mathbf{s}_l \sin^2 \varphi + \mathbf{t} \sin 2\varphi \right) \end{bmatrix} \quad (4)$$

La direzione del vettore  $\mathbf{C}$  è in genere variabile nel tempo e, quindi, la definizione dell'ampiezza e del valore medio di tale vettore non è immediata. Papadopoulos [9] ha di recente proposto di considerare le componenti di  $\mathbf{C}$  lungo gli assi  $u$  e  $v$ . Richiamando le (1) e (4), tali componenti possono essere scritte nella forma seguente :

$$\begin{aligned} C_u &= f \sin(\mathbf{w}) + g \cos(\mathbf{w}) + C_{u,m} \\ C_v &= p \sin(\mathbf{w}) + q \cos(\mathbf{w}) + C_{v,m} \end{aligned} \quad (5)$$

dove  $C_{u,m}$  e  $C_{v,m}$  sono i valori medi delle componenti di  $\mathbf{C}$  lungo gli assi  $u$  e  $v$ , mentre le funzioni  $f$ ,  $g$ ,  $p$  e  $q$  dipendono dagli angoli di fase,  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , e dagli angoli di giacitura,  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{J}$ , del piano  $\Delta$  [8]. La (5) rappresenta le equazioni parametriche dell'ellisse descritta dall'estremo del vettore  $\mathbf{C}$  della tensione tangenziale nel piano  $\Delta$  durante un ciclo di carico. Tale ellisse è centrata nel punto  $(C_{u,m}; C_{v,m})$ , e i suoi semiassi sono funzioni di  $f$ ,  $g$ ,  $p$  e  $q$ . Il valore medio  $C_m$  della tensione tangenziale  $\mathbf{C}$  è pari a  $\sqrt{C_{u,m}^2 + C_{v,m}^2}$ , mentre l'ampiezza di  $\mathbf{C}$  coincide con il semiasse maggiore  $C_a$  dell'ellisse.

Le espressioni analitiche delle componenti di tensioni determinate sopra possono essere usate per applicare i comuni criteri di fatica multiassiale, basati sull'approccio del piano critico, al caso di generico stato piano di tensione sinusoidale. La verifica a fatica è eseguita in due fasi. Innanzitutto si determina il piano critico attraverso la ricerca del massimo delle ampiezze e/o dei valori di alcune componenti di tensione. Ad esempio, i criteri proposti da Findley [2], Mataka [4], e McDiarmid [5] possono essere espressi nel modo seguente :

$$(\varphi_c, \vartheta_c): \quad \max_{(\varphi, \vartheta)} \{ C_a(\varphi, \vartheta) + A N_{\max}(\varphi, \vartheta) \} \quad (6)$$

dove il massimo valore  $N_{\max}$  della tensione normale  $N(t)$  è uguale alla somma del valore medio e dell'ampiezza, cioè  $N_{\max} = N_m + N_a$ . La verifica a fatica è poi eseguita in base ad alcune componenti di tensione agenti sul piano critico :

$$C_a(\varphi_c, \vartheta_c) + B N_{\max}(\varphi_c, \vartheta_c) \leq D \quad (7)$$

dove A, B e D sono costanti del materiale che presentano espressioni diverse per ciascuno dei criteri considerati.

### 3. Un nuovo criterio basato sull'approccio del piano critico

#### 3.1 Giacitura del piano di frattura e del piano critico

Una procedura teorica è stata di recente sviluppata dagli autori per determinare le direzioni medie delle tensioni principali attraverso il metodo delle funzioni peso [6-8]. In un generico istante di tempo, le tensioni principali,  $\mathbf{s}_n$  ( $n = 1, 2, 3$ ), sono gli autovalori del tensore degli sforzi istantaneo, mentre gli autovettori forniscono i nove coseni direttori delle direzioni principali. Assumiamo che  $\mathbf{s}_1 \geq \mathbf{s}_2 \geq \mathbf{s}_3$ , cioè che le direzioni della tensione principale massima e minima siano indicate come asse 1 ed asse 3, rispettivamente. Il sistema di coordinate ortogonali P123, con origine nel punto P e assi coincidenti con le direzioni principali di tensione, può essere definito attraverso gli angoli 'principali' di Eulero,  $\mathbf{f}, \mathbf{q}, \mathbf{y}$  ( $0^\circ \leq \mathbf{f} < 360^\circ; 0^\circ \leq \mathbf{q} \leq 180^\circ; 0^\circ \leq \mathbf{y} < 360^\circ$ ), ottenuti dai coseni direttori delle direzioni principali. I loro intervalli di definizione al termine di una procedura di riduzione descritta in [6-8] diventano i seguenti :  $0^\circ \leq \mathbf{f}, \mathbf{q} \leq 90^\circ$  e  $-90^\circ \leq \mathbf{y} \leq 90^\circ$ , in modo da permettere una corretta operazione di media dei valori istantanei degli angoli di Eulero.

Esaminiamo ora il tensore degli sforzi con le componenti normali  $\mathbf{s}_t(t), \mathbf{s}_l(t)$  e la componente tangenziale  $\mathbf{t}(t)$ , espresse dalla (1). Le direzioni principali medie  $\hat{1}, \hat{2}$  e  $\hat{3}$  delle tensioni principali sono calcolate mediando i valori istantanei degli angoli principali di Eulero ridotti,  $\mathbf{f}(t), \mathbf{q}(t)$  e  $\mathbf{y}(t)$ , attraverso opportune funzioni peso  $W(t_k)$  :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{f}} &= \frac{1}{W} \sum_{t_1}^{t_N} \mathbf{f}(t_k) W(t_k) & \hat{\mathbf{q}} &= \frac{1}{W} \sum_{t_1}^{t_N} \mathbf{q}(t_k) W(t_k) \\ \hat{\mathbf{y}} &= \frac{1}{W} \sum_{t_1}^{t_N} \mathbf{y}(t_k) W(t_k) & W &= \sum_{t_1}^{t_N} W(t_k) \end{aligned} \quad (8)$$

dove  $W$  rappresenta la somma dei pesi  $W(t_k)$ , con  $t_k$  variabile da  $t_1$  a  $t_N$ . Adottiamo la seguente funzione peso, il cui significato fisico è discusso in [6-8] :

$$W(t_k) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathbf{s}_1(t_k) < c\mathbf{s}_{af} \\ \left( \frac{\mathbf{s}_1(t_k)}{c\mathbf{s}_{af}} \right)^{m_s} & \text{se } \mathbf{s}_1(t_k) \geq c\mathbf{s}_{af} \end{cases} \quad 0 < c \leq 1 \quad (9)$$

Si noti che  $m_s$  è un coefficiente che dipende dalla pendenza della curva S-N per flessione alterna. Dal confronto con numerose risultanze sperimentali a fatica [8,10], la normale al piano di

frattura sembra coincidere con la direzione media  $\hat{1}$  della tensione principale massima, ottenuta impiegando la funzione peso espressa in (9).

Viene ora proposta una relazione tra la direzione media pesata  $\hat{1}$  e la normale  $w_c$  al piano rispetto al quale eseguire la verifica a fatica (piano critico) :

$$\mathbf{d} = 45 \frac{3}{2} \left[ 1 - \left( \frac{\mathbf{t}_{af}}{\mathbf{s}_{af}} \right)^2 \right] \quad (10)$$

dove  $\delta$  è l'angolo, espresso in gradi, formato da  $\hat{1}$  e  $w_c$ . Tale angolo è uguale a  $0^\circ$  per  $\tau_{af}/\sigma_{af} = 1$  (metalli molto fragili), mentre risulta uguale a  $45^\circ$  per  $\tau_{af}/\sigma_{af} = 1/\sqrt{3}$  (valore di transizione tra metalli fragili e duttili). Pertanto, il piano critico risulta prossimo al piano di frattura per metalli molto fragili, mentre i due piani formano un angolo uguale a  $45^\circ$  per materiali in cui il rapporto dei limiti di fatica,  $\tau_{af}/\sigma_{af}$ , tende al valore di transizione fragile-duttile.

### 3.2 Verifica a fatica

La verifica a fatica è eseguita attraverso una funzione quadratica della massima tensione normale ( $N_{\max}$ ) e dell'ampiezza della tensione tangenziale ( $C_a$ ), agenti sul piano critico:

$$\left( \frac{N_{\max}}{\mathbf{s}_{af}} \right)^2 + \left( \frac{C_a}{\mathbf{t}_{af}} \right)^2 \leq 1 \quad (11)$$

La disuguaglianza tiene conto, tra l'altro, di alcune ben note evidenze sperimentali sull'influenza del valore medio delle tensioni applicate. Il criterio di fatica (11) corrisponde alla seguente ampiezza di tensione equivalente,  $\mathbf{s}_{eq}$ , da confrontare con il limite di fatica  $\mathbf{s}_{af}$ :

$$\mathbf{s}_{eq} = \sqrt{N_{\max}^2 + \left( \frac{\mathbf{s}_{af}}{\mathbf{t}_{af}} \right)^2 C_a^2} \leq \mathbf{s}_{af} \quad (12)$$

## 4. Applicazioni

Il criterio di fatica qui proposto e quelli di altri autori sono stati applicati a numerosi risultati sperimentali, reperibili in letteratura, relativi a carichi sinusoidali, in fase e fuori fase, per barre circolari soggette a flessione e torsione [11-13], e per tubi circolari soggetti a sforzo normale e pressione interna [14]. Un quadro riassuntivo delle caratteristiche meccaniche dei materiali sperimentati è riportato in Tabella 1.

Sono stati considerati nelle prove in esame diversi valori degli angoli di fase,  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , del rapporto tra le ampiezze delle tensioni applicate ( $\mathbf{t}_a / \mathbf{s}_{i.a}$  o  $\mathbf{s}_{i.a} / \mathbf{s}_{i.a}$ ) e dei rapporti di fatica (Tabella 2). Nelle prove di Nishihara e Kawamoto [11], sono stati applicati valori nulli della tensione media (rapporti di fatica uguali a -1). Si sottolinea che i valori sperimentali delle tensioni applicate si riferiscono allo stato limite di non-frattura del provino per un numero di cicli dell'ordine del milione.

Una volta determinata la giacitura del piano critico, il criterio (11) mostra che, in una rappresentazione nel piano  $N_{\max} - C_a$ , la crisi per fatica ha luogo per i punti che giacciono al di fuori dell'ellisse con semiassi pari a  $\mathbf{s}_{af}$  e  $\mathbf{t}_{af}$ . Ad esempio, in Figura 2 sono riportati i valori sperimentali relativi alle prove di Nishihara & Kawamoto [11] su acciaio duro. Si osserva una buona correlazione, per i diversi valori dell'angolo di fase  $\mathbf{b}$  e del rapporto tra le ampiezze delle tensioni

applicate, tra l'ellisse teorica (tratto continuo) e i risultati sperimentali relativi allo stato limite di fatica, poichè la maggior parte dei punti sperimentali giace molto vicino all'ellisse e, comunque, all'interno delle due curve tratteggiate che rappresentano un errore pari a  $\pm 10\%$  (determinato come discusso nel seguito). Inoltre, quasi tutte le predizioni risultano a favore di sicurezza, trovandosi i punti sperimentali all'esterno del dominio di sicurezza.

Tabella 1

Caratteristiche meccaniche dei materiali delle prove sperimentali [11-14]

Reference	Material	$S_{af}$ [MPa]	$t_{af}$ [MPa]	$t_{af}/S_{af}$	$S_u$ [MPa]	$m_s$
Nishihara & Kawamoto (HS)	hard steel	313.9	196.2	0.63	704.1	8.7
Nishihara & Kawamoto (MS)	mild steel	235.4	137.3	0.58	518.8	18.2
Nishihara & Kawamoto (CI)	cast iron	96.1	91.2	0.95	230.0	19.4
Zenner <i>et al.</i>	34Cr4	410.0	256.0	0.62	795.0	20.9
Froustey & Lasserre	30NCD16	660.0	410.0	0.62	1880.0	13.2
Rotvel	low-carbon steel	215.8	127.2	0.59	570.0	14.5

Tabella 2

Condizioni di carico nelle prove sperimentali [11-14]

Reference	Test No.	Stress state (1) + (2)	Loading ratios		Stress amplitude ratio (2)/(1)	Phase angle [°] (2) vs. (1)
			(1)	(2)		
Nishihara & Kawamoto (HS)	24	$s_l + t$	-1.0	-1.0	0.0, 0.2, 0.5, 1.2, $\infty$	0, 30, 60, 90
Nishihara & Kawamoto (MS)	17	$s_l + t$	-1.0	-1.0	0.0, 0.2, 0.5, 1.2, $\infty$	0, 60, 90
Nishihara & Kawamoto (CI)	14	$s_l + t$	-1.0	-1.0	0.0, 0.2, 0.5, 1.2, $\infty$	0, 60, 90
Zenner <i>et al.</i>	12	$s_l + t$	0.0, -1.0	0.0, -1.0	0.25, 0.5, 1.0	0, 60, 90, 120
Froustey & Lasserre	10	$s_l + t$	0.2, -0.2, -0.3, -1.0	-1.0	0.25, 0.6, 1.7	0, 45, 60, 90
Rotvel	6	$s_l + s_t$	-0.3, -0.6, -0.8, -1.0, -1.3	-0.6, -1.0, -1.1	0.0, 0.8, 1.3, 32.7	0, 180

Per una data prova ed un generico criterio di fatica, il criterio adottato predice esattamente il comportamento sperimentale se il primo ed il secondo membro della disuguaglianza (7) sono uguali tra loro (come ricordato, tutti i risultati sperimentali corrispondono allo stato limite di non-frattura). Quindi la deviazione tra risultati teorici e sperimentali può essere espressa da un indice di errore  $I$ , definito come differenza relativa (rispetto al secondo membro) tra il primo ed il secondo membro della disuguaglianza (7). Nel caso del criterio qui proposto, l'indice di errore è uguale a  $(S_{eq} - S_{af}) / S_{af}$  (si veda l'Equazione 12).

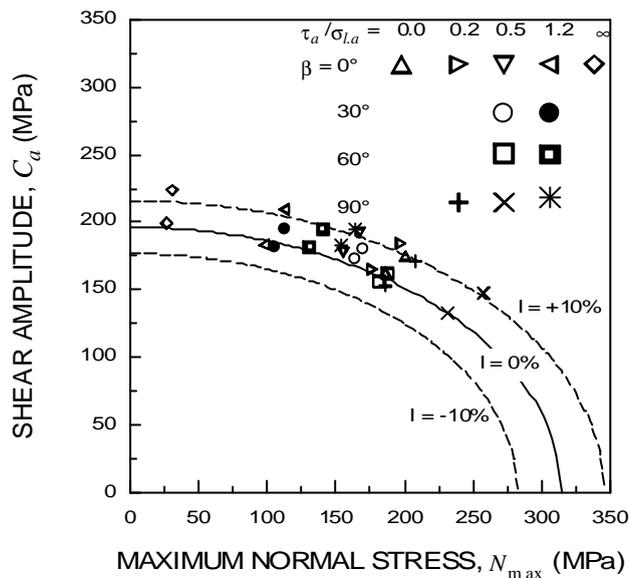


Figura 2  
 Ampiezza della tensione tangenziale vs. massima tensione normale, agenti sul piano critico: risultati teorici e sperimentali per le prove di Nishihara & Kawamoto [11] su acciaio duro (hard steel, HS)

Il confronto teorico-sperimentale effettuato per le 83 prove sperimentali presentate in [11-14] è illustrato in Figura 3, nella quale è riportata la frequenza relativa dell'indice di errore calcolato secondo il criterio (12) e secondo i criteri di Findley [3], Mataka [5] e McDiarmid [6]. Tale frequenza relativa rappresenta, per ciascun intervallo dell'indice di errore di ampiezza pari al 5%, il numero di prove per cui l'indice di errore cade nell'intervallo considerato, rapportato al numero totale di prove. Si osserva una correlazione generalmente buona tra i risultati teorici e quelli sperimentali per i 4 criteri considerati, come mostrato dai valori maggiori della frequenza relativa per gli intervalli prossimi allo zero. Inoltre, per il presente criterio e, in una certa misura, per il criterio di Mataka, si notano dei valori della frequenza relativa più elevati per indice di errore positivo, che corrisponde, come detto, ad una predizione teorica conservativa rispetto al risultato sperimentale.

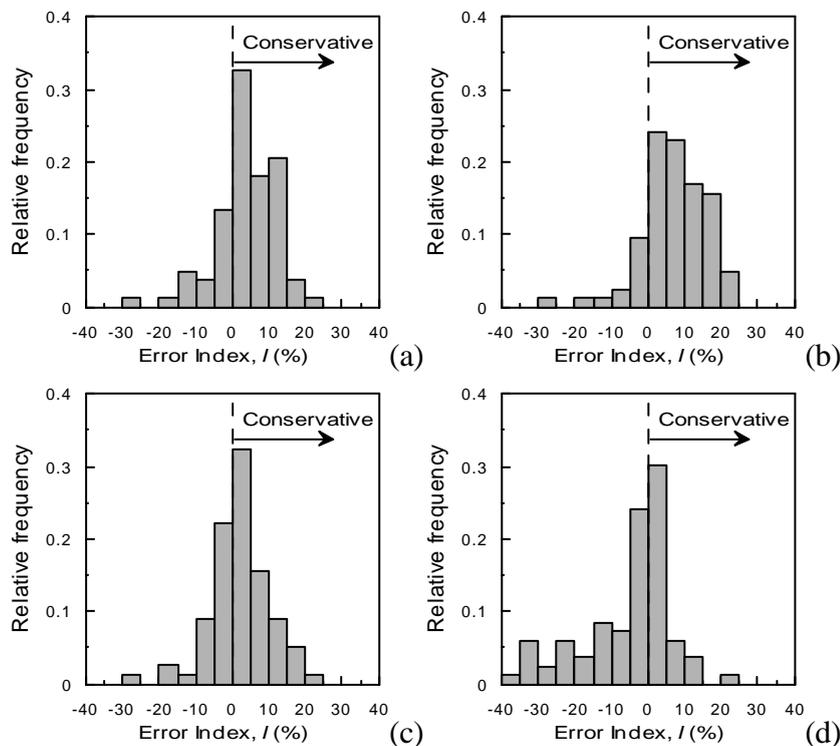


Figura 3  
 Distribuzione della frequenza relativa per l'indice di errore secondo:  
 (a) criterio (12); (b) Findley;  
 (c) Mataka; (d) McDiarmid

## 5. Conclusioni

È stata sviluppata una procedura teorica per determinare le direzioni principali medie attraverso il metodo delle funzioni peso. La direzione media pesata della tensione principale massima è stata utilizzata sia per determinare la giacitura del piano di frattura prodotto da carichi multiassiali di fatica, sia per dedurre il piano critico rispetto a cui eseguire la verifica a fatica. È stato poi presentato un criterio per effettuare tale verifica, basato sulla massima tensione normale e sull'ampiezza della tensione tangenziale agenti sul piano critico.

Il criterio proposto e altri criteri basati sull'approccio del piano critico sono stati applicati ad alcune prove sperimentali su metalli fragili (duri) soggetti a stati piani di tensione sinusoidale, in fase e fuori fase. Le predizioni basate sul presente criterio sono in buon accordo con le risultanze sperimentali e, in generale, sono a favore di sicurezza.

## Bibliografia

- [1] You B.-R., Lee S.-B. “*A critical review on multiaxial fatigue assessments of metals*” Int. J. Fatigue, **18**, 235-244, **1996**
- [2] Findley W.N. “*A theory for the effect of mean stress on fatigue of metals under combined torsion and axial load or bending*” J. Engng Industry, **81**, 301-306, **1959**
- [3] Brown M.W., Miller K.J. “*A theory for fatigue failure under multiaxial stress-strain condition*” Proc. Inst. Mech. Engrs, **187**, 745-755, **1973**
- [4] Matake T. “*An explanation on fatigue limit under combined stress*” Bull. JSME **20**, 257-263, **1977**
- [5] McDiarmid D.L. “*A general criterion for high cycle multiaxial fatigue failure*” Fatigue Fract. Engng Mater. Struct., **14**, 429-453, **1991**
- [6] Carpinteri A., Macha E., Brighenti R., Spagnoli A. “*Expected principal stress directions for multiaxial random loading - Part I: Theoretical aspects of the weight function method*” Int. J. Fatigue, **21**, 83-88, **1999**
- [7] Carpinteri A., Brighenti R., Macha E., Spagnoli A. “*Expected principal stress directions for multiaxial random loading - Part II: Numerical simulation and experimental assessment through the weight function method*” Int. J. Fatigue, **21**, 89-96, **1999**
- [8] Carpinteri A., Brighenti R., Spagnoli A. “*A fracture plane approach in multiaxial high-cycle fatigue of metals*” Fatigue Fract. Engng Mater. Struct., **23**, **2000**
- [9] Papadopoulos I.V. “*Critical plane approaches in high-cycle fatigue: on the definition of the amplitude and mean value of the shear stress acting on the critical plane*” Fatigue Fract. Engng Mater. Struct., **21**, 269-285, **1998**
- [10] Carpinteri A., Macha E., Brighenti R., Spagnoli A. “*Critical fracture plane under multiaxial random loading by means of Euler angles averaging*” Multiaxial Fatigue and Fracture, Ed. E. Macha, W. Bedkowski, T. Lagoda, Elsevier Science Ltd., 166-178, **1999**
- [11] Nishihara T., Kawamoto M. “*The strength of metals under combined alternating bending and torsion with phase difference*” Memories of the College of Engineering, Kyoto Imperial University, **11**, 85-112, **1945**
- [12] Zenner H., Heidenreich R., Richter I. Z. “*Fatigue strength under nonsynchronous multiaxial stresses*” Werkstofftech., **16**, 101-112, **1985**
- [13] Froustey C., Lasserre S. “*Multiaxial fatigue endurance of 30NCD16 steel*” Int. J. Fatigue, **11**, 169-175, **1989**
- [14] Rotvel F. “*Biaxial fatigue tests with zero mean stresses using tubular specimens*” Int. J. Mech.

Sci., **12**, 597-613, **1970**