

CONTATTO E DILATANZA NELLE FRATTURE DEI SOLIDI ETEROGENEI

Bernardino Chiaia, Mauro Borri-Brunetto

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica, Politecnico di Torino, Torino

Abstract

In many concrete and rock structures, depending on the surface morphology, friction arises inside rough cracks and contributes to the stability of the structure. In this work, the stress transmission mechanisms inside rock and concrete cracks are investigated. The surface topography, experimentally digitized at the meso-scale, shows peculiar self-affine properties. As a consequence, the contact domain, obtained numerically, is a lacunar fractal set whose characteristics considerably change during the sliding process. The asperities interlocking mechanism is more effective than the purely adhesive one, and thus the dilatancy behaviour plays a fundamental role, especially if filtration across the cracks has to be taken into account. Finally, the distribution of the micro-forces within the contact domain is shown to be multifractal. This permits to give an interpretation of the typical stick-slip behaviour of these interfaces, in principle extendible up to the scale of the tectonic faults, which are responsible for earthquakes.

1. Introduzione: fratture autoaffini in roccia e calcestruzzo

L'attrito che si sviluppa tra i lembi di una fessura o tra le facce di un giunto scabro contribuisce in molte situazioni alla stabilità globale delle strutture in calcestruzzo. A scale molto differenti, la stabilità dei pendii in roccia è fortemente influenzata dalla morfologia superficiale e mostra notevoli effetti di scala [1]. In un lavoro precedente [2], la simulazione del processo di contatto elastico sotto carichi normali crescenti era stata effettuata adottando superfici scabre sintetiche di dimensione frattale assegnata. In questo lavoro si indaga invece il meccanismo di trasmissione degli sforzi di contatto tra le facce di fratture reali (non coesive), in una roccia e in un calcestruzzo. La morfologia superficiale auto-affine, per la cui descrizione la dimensione frattale si rivela un efficace parametro qualitativo, risulta fondamentale per la definizione della legge di richiusura e della dilatanza dell'interfaccia. Si ricorda infatti, che la relazione di *scaling* di una superficie frattale autoaffine $z(x, y)$, detto Δr l'incremento generico nel piano proiettivo ($\Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$), può scriversi: $\Delta z \sim \Delta r^H$, dove $0.5 < H < 1$ è detto esponente di Hurst. La dimensione frattale si ottiene come: $\Delta_G = 3 - H$, e le superfici risultano invasive, cioè $\Delta_G > 2$. La frattalità delle superfici di frattura, responsabile degli effetti di scala sull'energia di frattura [4], assume un ruolo molto importante anche *post-mortem*, in quanto influenza direttamente i meccanismi di contatto elastico all'interfaccia.

L'interfaccia di roccia (Fig. 1a) è stata ottenuta fratturando, per mezzo di una prova di flessione, un provino cilindrico di arenaria a grana fine, di diametro pari a 50mm. La frattura nel calcestruzzo (Fig. 1b) è stata invece indotta in un provino sottoposto a trazione uniassiale. La tecnica sperimentale di acquisizione delle superfici di frattura, descritta in [3], fa uso di un profilometro laser servo-controllato, che rileva le altezze delle asperità sulla base di una griglia ortogonale di passo s , creando una matrice di punti. Le superfici così ottenute, come del resto anche le superfici generate al computer, rappresentano solo delle immagini (*pre-frattali*) dell'insieme frattale vero e proprio, ottenibile teoricamente nel limite di $s \rightarrow 0$.

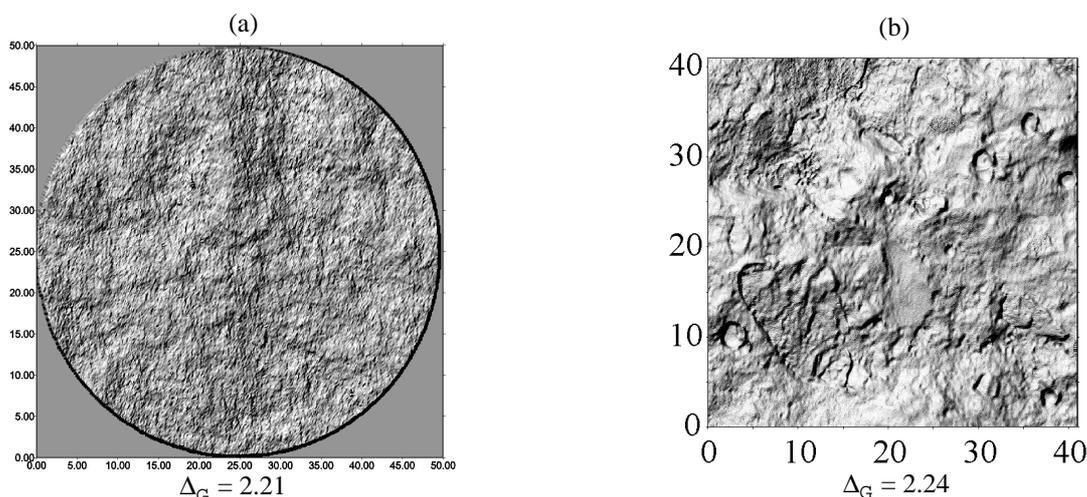


Fig. 1 - Rendering delle superfici di frattura in roccia (a), e in calcestruzzo (b).

L'area rilevata misura $\pi(25)^2 = 1962\text{mm}^2$ nel caso della roccia e $40 \times 40 = 1600\text{mm}^2$ nel caso del calcestruzzo. Esse sono state ottenute con un passo di acquisizione s rispettivamente pari a $100\mu\text{m}$ e a $80\mu\text{m}$. Ancorché possibili, ulteriori raffinamenti del passo di digitalizzazione (la precisione di lettura delle altezze è pari a $2\mu\text{m}$) appesantirebbero notevolmente la simulazione numerica, senza apportare significativi vantaggi a livello della descrizione mesoscopica del processo di contatto. Per entrambe le interfacce considerate, si è proceduto al rilievo di una sola faccia della frattura, ipotizzando quindi la perfetta corrispondenza iniziale della faccia opposta. La dimensione frattale Δ_G della superficie di roccia, calcolata sia per mezzo di algoritmi deterministici che statistici, risulta compresa nell'intervallo 2.16 - 2.25, con un valore medio pari a 2.21. Nel caso del calcestruzzo, il valore è risultato compreso tra 2.15 e 2.29, con un valore medio pari a 2.24.

2. Soluzione numerica del problema del contatto elastico

Il problema del contatto unilatero viene affrontato modellando i giunti di roccia e calcestruzzo per mezzo di semispazi elastici lineari con scambio di micro-forze a livello delle interfacce scabre descritte in precedenza. L'algoritmo, descritto estensivamente in [2], pur nella sua semplicità, permette di evidenziare gli aspetti più interessanti dell'interazione meccanica a livello dell'interfaccia. Il problema viene discretizzato introducendo, nel piano orizzontale di riferimento $X-Y$, una griglia quadrata di punti di passo pari a s . Evidentemente, s rappresenta la scala cui si affronta il problema, e coincide con la risoluzione adottata nell'acquisizione delle superfici di frattura. In ciascun nodo della griglia le asperità contrapposte, se in contatto, possono scambiarsi una micro-forza di compressione. Si assume, all'apice di ogni asperità, un'area di

contatto finita, di misura legata al lato s della griglia.

Considerando un piano orizzontale di riferimento $z=0$, sia w lo spostamento relativo lungo z all'infinito, positivo se nella direzione di chiusura del giunto (Fig. 2b). Si introduca, per ogni valore dell'*offset* v , la funzione $\Delta h_v(x, y)$, che rappresenta la somma delle altezze delle asperità contrapposte nella configurazione indeformata. Il grafico di questa funzione risulta essere una superficie invasiva virtuale (detta topografia composta, v. Fig. 2c), in cui sia la dimensione frattale che soprattutto la varianza delle aperture aumentano all'aumentare dello spostamento orizzontale relativo v . In particolare, la dimensione frattale passa dal valore iniziale 2.0 (corrispondente al piano liscio ottenuto dalla combinazione delle facce perfettamente combacianti per $v=0$) ad un valore maggiore di 2.0 non appena v aumenta e le correlazioni tra le facce contrapposte diminuiscono.

Il sistema lineare risolvibile può scriversi nel modo seguente:

$$\frac{-w + \Delta h_r}{2} = \sum_s H_{rs} f_s, \quad \forall P_r \in \mathcal{D}, \quad (1)$$

ove f_s è la risultante delle forze agenti sull'areola di contatto attorno al punto P_s e \mathcal{D} rappresenta l'insieme dei punti che si scambiano forze di contatto, ossia il dominio di contatto. Le funzioni di influenza H_{rs} possono calcolarsi con riferimento agli spostamenti indotti in P_r da un carico unitario applicato nel punto P_s tramite una areola rigida. Il sistema di equazioni (1) viene risolto per mezzo di un algoritmo iterativo tipo Gauss-Seidel, e le forze di contatto tra i due corpi possono essere quindi calcolate, una volta determinato il dominio di contatto \mathcal{D} , a priori incognito. La determinazione di \mathcal{D} (e quindi degli sforzi trasmessi) è ottenuta per mezzo di una strategia iterativa tipo '*active set*', e riduce notevolmente le dimensioni computazionali del problema rispetto agli approcci di programmazione non-lineare. L'analisi viene effettuata imponendo ai due semispazi dapprima lo spostamento relativo orizzontale v , in assenza di contatto, e quindi incrementando progressivamente lo spostamento relativo normale w . In tal modo si descrive l'evoluzione del dominio di contatto, durante lo scorrimento, sia per F costante, sia per spostamento w imposto.

Con riferimento alla Fig. 2a (giunto di roccia), la simulazione è stata condotta facendo scorrere, rispetto alla superficie inferiore, una porzione di superficie superiore di $20 \times 20 \text{mm}^2$, inizialmente perfettamente combaciante con l'opposta. Lo spostamento relativo v delle due facce, nel piano orizzontale X - Y , può essere in qualsiasi direzione. Per comodità, sono state studiate due direzioni ortogonali, assumendo, come passo minimo per l'*offset* v , il valore di un pixel (rispettivamente $100 \mu\text{m}$ per la roccia e $80 \mu\text{m}$ per il calcestruzzo). In corrispondenza di ogni valore di *offset* v , si ottiene quindi la legge di richiusura delle fratture (curva F - w). Variando invece l'*offset* v , per diversi valori del carico normale $F = \text{cost}$, si ottengono le curve di dilatanza (v - δ). Le simulazioni forniscono, ad ogni passo, il dominio di contatto \mathcal{D} relativo alla risoluzione s , più le forze e gli spostamenti in tutti i punti appartenenti a \mathcal{D} .

Le simulazioni mostrano come il dominio di contatto (ossia l'insieme dei punti ove effettivamente si trasmette lo sforzo) nelle fratture reali sia un frattale di tipo lacunare, ossia un insieme rarefatto dotato di dimensione Δ minore di 2.0. Nel lavoro [2] si è mostrato infatti come la misura dell'area reale di contatto sia dipendente dalla scala e tenda a zero all'aumentare della risoluzione. Ciò richiederebbe una modellazione indipendente dalla scala di osservazione, laddove le modellazioni convenzionali [5] delle superfici scabre fanno uso di parametri statistici come la varianza delle altezze, delle pendenze e delle curvature superficiali, che risultano fortemente dipendenti dalla risoluzione. Nel presente lavoro, anziché effettuare un'indagine multiscala (già proposta in [2]), si studia la trasmissione degli sforzi alla cosiddetta *mesoscala*, ossia ad una scala intermedia tra la classica scala macroscopica ove le gran-

dezze geometriche e meccaniche vengono assunte con i loro valori nominali, e quella microscopica ove invece altri fenomeni (ad esempio le interazioni chimiche e gli scambi termici) svolgono un ruolo non trascurabile.

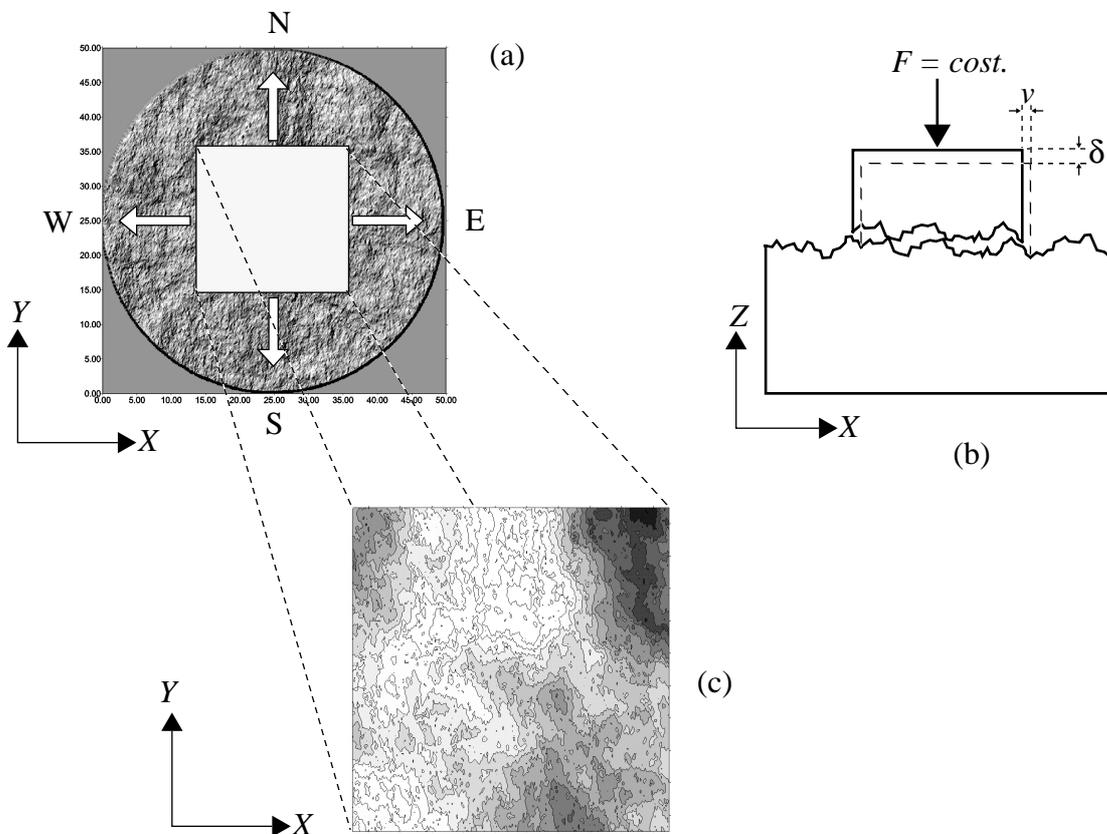


Fig. 2 - Schema della simulazione numerica sul giunto in roccia: dilatanza δ , offset v , e topografia composta (c) ottenuta per $v=10$ mm (c).

3. Risposta meccanica e deformabilità di interfaccia

Il fenomeno della richiusura dei giunti sotto carico normale è di grande importanza in meccanica delle rocce e può assumere una certa rilevanza anche per i serbatoi e le dighe in calcestruzzo. Le leggi di richiusura del giunto in roccia, ottenute numericamente per cinque diversi valori dell'offset v (nella direzione W di Fig. 2), sono riportate in Fig. 3a. Il valore effettivo w_{int} della chiusura dell'interfaccia si ottiene sottraendo, dallo spostamento totale all'infinito w , la parte dovuta all'elasticità dei semispazi ($w_{int} = w - w_b$), ove il contributo dei semispazi w_b dipende solo dal carico normale F .

Attraverso la regressione dei dati si possono stimare i valori asintotici delle curve, corrispondenti alla chiusura totale dei giunti. Si noti come, all'aumentare dello scorrimento relativo v tra le facce del giunto, la fase di richiusura è più estesa, ossia la deformabilità di interfaccia aumenta. Ciò corrisponde all'incremento della varianza delle aperture della topografia composta $\Delta h_v(x, y)$, in accordo con i risultati su superfici sintetiche riportati in [2]. Ciò è vero soprattutto per le fasi iniziali dello scorrimento: al di là di un certo valore di v , la deformabilità resta costante. D'altra parte, per offset molto alti ($v \approx 10$ mm) la deformabilità di interfaccia aumenta nuovamente poiché le correlazioni tra le facce del giunto possono considerarsi esaurite (v . l'ultimo dominio di contatto in Fig. 4). Le curve di richiusura per la frattura in calce-

struzzo sono mostrate in Fig. 3c. Valgono qui le stesse osservazioni riportate per il giunto in roccia. È importante sottolineare che, indipendentemente dal valore dello scorrimento relativo v , la legge di richiusura dipende dall'area nominale dell'interfaccia. Più precisamente, maggiore è l'area nominale in contatto, più deformabile appare la frattura, come già rilevato nel caso di superfici sintetiche. Ciò deriva dall'autoaffinità delle superfici, che implica l'incremento della varianza delle aperture con l'aumento dell'area nominale, e risulta in perfetto accordo con l'effetto-scala sperimentale rilevato da Sage et al. [6].

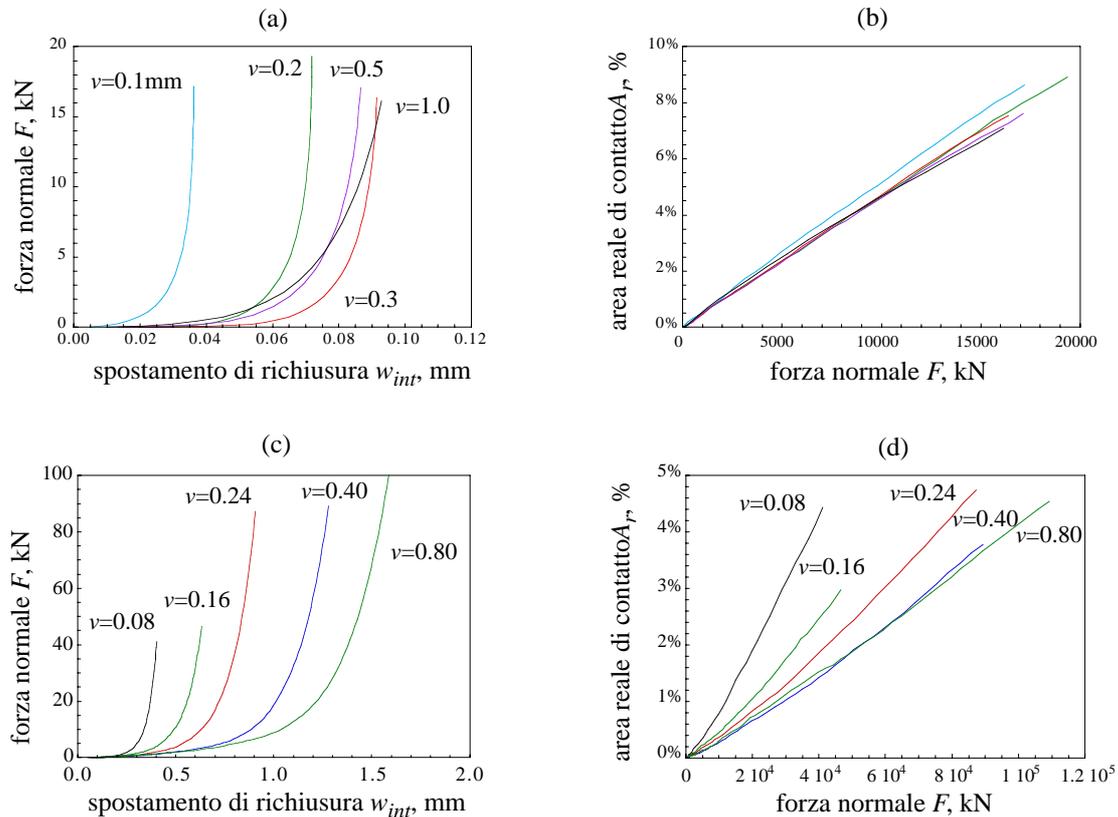


Fig. 3 - Leggi di chiusura (a, c) e variazione dell'area reale di contatto con la forza (b, d) per il giunto in roccia (a, b) e per quello in calcestruzzo (c, d).

Se si diagramma l'area reale di contatto A_r (calcolata alla scala s) in funzione della forza normale applicata F , si osserva un andamento pseudo-lineare ($A_r \sim F$), sia per la roccia che per il calcestruzzo. Ciò è in accordo con i vasti risultati sperimentali e con le classiche teorie sul contatto tra superfici scabre [5]. D'altra parte, è bene ricordare che, poiché il valore di A_r dipende dalla risoluzione adottata [2], le teorie tradizionali non possono fornire previsioni univoche. Si noti, tra l'altro, fissato il valore di F , il decremento di A_r all'aumentare dell'*offset* v , specialmente nel caso della frattura di calcestruzzo (Fig. 3d).

Le curve di dilatanza rigida δ_r (corrispondenti cioè a $F=0$) del giunto in roccia, nelle quattro direzioni ortogonali di scorrimento, sono riportate in Fig. 4. Si noti che le curve sono state depurate dall'inclinazione media del piano di frattura, per cui raggiungono un *plateau* orizzontale. La dilatanza elastica δ , una volta fissato il valore di F , si ottiene semplicemente sottraendo, dalla dilatanza rigida δ_r , lo spostamento di richiusura del giunto w_{int} :

$$\delta(F, v) = \delta_r(v) - w_{int}(F, v) = \delta_r(v) - [w(F, v) - w_b(F)] \quad (2)$$

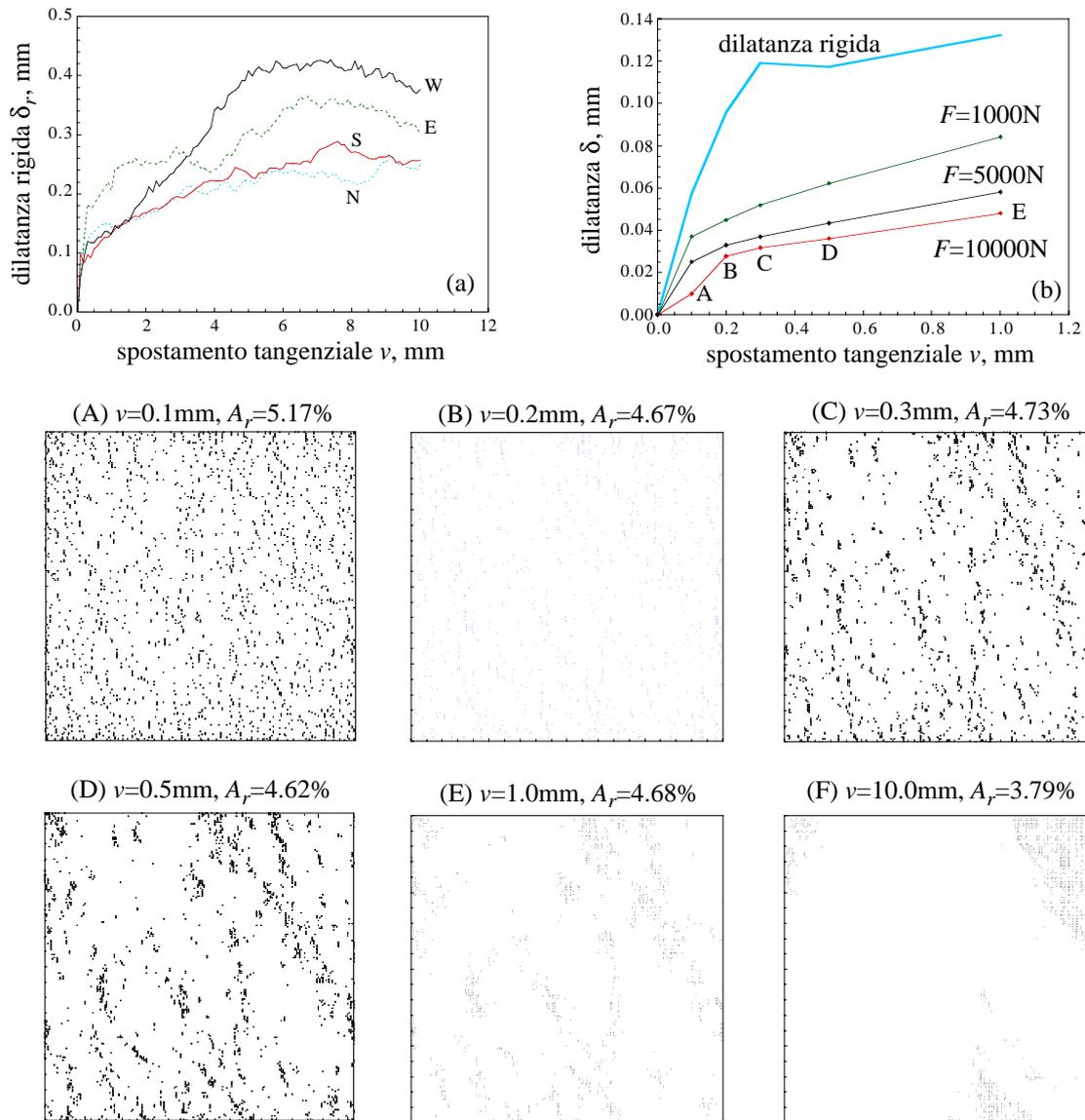


Fig. 4 - Curve di dilatanza rigida (a), dilatanza elastica (dir. W) (b), e domini di contatto calcolati in corrispondenza dei punti A-E (e per $v=10.0mm$) sulla curva per $F=10000N$ (giunto in roccia).

In Fig. 4b si mostrano le parti iniziali ($v \leq 1.0mm$) delle curve di dilatanza elastica ricavate, nella direzione W, per tre diversi valori del carico normale F (1000N, 5000N e 10000N, corrispondenti, rispettivamente alle pressioni nominali di 2.5MPa, 12.5MPa e 25MPa).

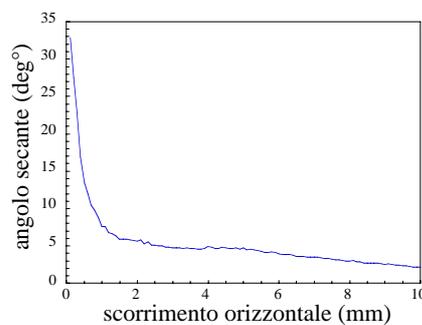


Fig. 5 - Variazione dell'angolo di attrito per ingranamento per il giunto in roccia (scorrimento in direzione W).

L'analisi delle curve di dilatanza consente di stimare in modo euristico il forte contributo, alla resistenza al taglio del giunto, rappresentato dall'ingranamento delle asperità. Infatti, nell'ambito di un criterio tipo Mohr-Coulomb, si può assumere [7] che il valore effettivo dell'angolo di attrito del giunto sia dato dalla somma di un angolo intrinseco, dovuto all'adesione, più l'angolo di ingranamento, ricavabile dalla pendenza corrente delle curve di dilatanza sopra riportate. Si noti (Fig. 5) come l'effetto di ingranamento è massimo nella prima fase di scorrimento e poi si assesta su valori più modesti. Questo contributo, come quello adesivo, è tanto più forte quanto più la dilatanza è impedita dalle condizioni al contorno.

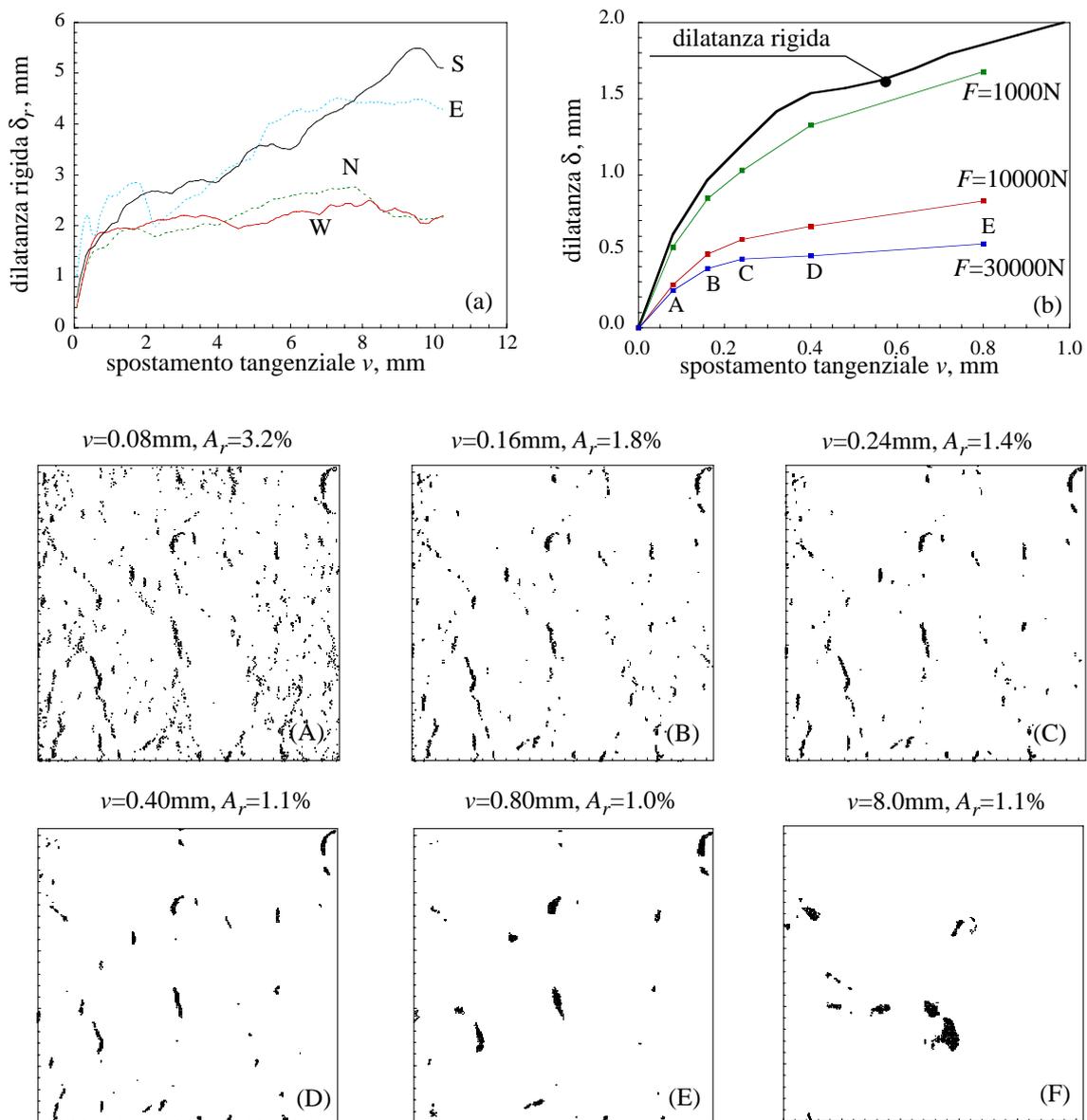


Fig. 6 - Curve di dilatanza rigida (a), dilatanza elastica (direzione W) (b), e domini di contatto calcolati in corrispondenza dei punti A-E (e per $v=8.0mm$) sulla curva per $F=30000N$ (giunto in calcestruzzo).

In Fig. 4 si riportano anche sei domini di contatto, generati nel giunto in roccia per sei diversi valori dello scorrimento v , sotto carico normale costante $F=10000N$. Come già osservato nella Fig. 3b, all'aumentare dello scorrimento relativo tra le due facce, diminuisce l'area reale di contatto A_r , anche se questa tendenza è meno netta che nel caso della frattura di calcestruzzo. Ad ogni modo, all'aumentare di v , i domini di contatto tendono a divenire sempre

meno omogenei e la trasmissione dello sforzo nell'interfaccia tende a concentrarsi sempre più in poche zone (*clusters*) separate. Si può facilmente arguire che l'evoluzione delle distribuzioni delle pressioni di contatto influenzi notevolmente molti fenomeni meccanici. Tra questi, *in primis*, la resistenza al taglio dei giunti. In secondo luogo, la concentrazione delle pressioni in aree di misura ridotta favorisce senz'altro la microfessurazione per indentazione nelle aree in esame, comportando, di conseguenza, una notevole accelerazione dei processi di usura superficiale. Si noti anche come l'ultimo dominio (F), corrispondente alla topografia composta di Fig. 2c, sia completamente diverso da tutti gli altri, a causa dell'*offset* relativamente grande (10mm) tra le due facce. Ciò suggerisce l'esistenza di una soglia, legata a una lunghezza caratteristica delle superfici, al di là della quale non si notano più apprezzabili correlazioni tra le due facce del giunto, alla scala esaminata. La lunghezza di correlazione aumenta durante lo scorrimento tangenziale e, ad una modesta diminuzione di area reale di contatto, si contrappone un drastico cambiamento della geometria dei vuoti nell'interfaccia. Uno scorrimento relativo di soli 10mm infatti provoca la formazione di ampi "canali" liberi per il flusso dei liquidi che, insieme all'aumento della dilatanza, comporta un'enorme variazione della permeabilità della frattura.

Le curve di dilatanza rigida δ_r (corrispondenti a $F=0$) della frattura di calcestruzzo, nelle quattro direzioni ortogonali di scorrimento, sono riportate in Fig. 6a, mentre tre curve di dilatanza elastica (nella direzione W) sono in Fig. 6b. In Fig. 6 si mostrano anche sei domini di contatto ottenuti per $F=30000\text{N}$. Come nel caso del giunto in roccia, si nota che, fissato il carico normale (e la risoluzione s), al crescere dello spostamento relativo tra le facce della frattura, minore è la percentuale di area reale di contatto A_r . A rigore, ciò vale fino a un certo valore dell'*offset* v , oltre il quale A_r sembra rimanere pressoché costante (si confrontino anche, nella Fig. 3d, le curve per $v=0.40\text{mm}$ e $v=0.80\text{mm}$). Anche nel caso della frattura in calcestruzzo, l'ultimo dominio (F) è completamente diverso dai precedenti, a causa del notevole valore dello scorrimento ($v=8\text{mm}$). Le zone di trasmissione dello sforzo risultano ancora più concentrate che nel giunto in roccia, per la presenza di macro-eterogeneità (inerti).

4. Distribuzione multifrattale degli sforzi di contatto

In questa sezione si esamina la distribuzione spaziale delle micro-forze di contatto (a un dato valore della risoluzione) per il giunto in roccia. Si mostra come le suddette distribuzioni abbiano un tipico comportamento multifrattale, strettamente legato alle caratteristiche del dominio di contatto.

Una vasta classe di fenomeni fisici è fortemente influenzata dalla distribuzione spaziale di una certa quantità. Esistono, inoltre, grandezze che mostrano forti variazioni spaziali a tutte le scale. Si consideri, ad esempio, la distribuzione dell'oro sulla Terra. Laddove forti concentrazioni del metallo si trovano solo in pochissimi punti (i giacimenti), concentrazioni più basse si trovano in molte posizioni e infine concentrazioni bassissime pressoché dappertutto. Cambiando la scala di osservazione, però, si nota che anche all'interno di un giacimento esistono zone a concentrazione decisamente maggiore (es. un filone); con un dettaglio ancora più elevato si potrebbero addirittura individuare punti dello spazio dove si trova oro puro.

La descrizione matematica di distribuzioni siffatte può avvalersi del concetto di *misura multifrattale* [8]. Il termine multifrattale, nel presente contesto, implica il fatto che il dominio di contatto sia composto da infiniti sottoinsiemi frattali, ciascuno con una propria dimensione frattale e quindi con una certa legge di scala. A ciascuno di detti sottoinsiemi può essere associato il tipo di singolarità della distribuzione delle micro-forze di contatto.

Detta $F[B(x, r)]$ la risultante delle micro-forze scambiate nell'intorno B del punto x avente raggio r , la dimensione locale della misura F in x è $\alpha(F, x)$ se [9]:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log F[B(x, r)]}{\log r} = \alpha(F, x) . \quad (3)$$

È quindi possibile scrivere, nell'ipotesi di r sufficientemente piccolo:

$$F[B(x, r)] \sim r^{\alpha(F, x)} . \quad (4)$$

Se il punto x appartenesse ad un'area di contatto propriamente detta (contatto localmente liscio, $\Delta=2$) risulterebbe:

$$F[B(x, r)] \sim r^2 . \quad (5)$$

Nel caso $\alpha < 2$, l'esponente non intero α corrisponde alla potenza della singolarità locale dello sforzo e in linguaggio matematico si chiama *esponente di Hölder*. Sebbene α dipenda dalla posizione in esame sul dominio di contatto, vi sono in genere molti sottoinsiemi caratterizzati dallo stesso indice α . Se le micro-forze fossero distribuite in maniera uniforme sul dominio di contatto \mathcal{D} , ogni sottoinsieme sarebbe caratterizzato dallo stesso valore $\alpha = \Delta$. La realtà è più complessa, e per ciascun valore di α , si può definire un sottoinsieme \mathcal{D}_α del dominio di contatto che comprende i punti ove la singolarità della forza di contatto F ha esponente pari ad α . Per descrivere le singolarità di F e la loro distribuzione spaziale è necessario studiare le proprietà frattali degli insiemi \mathcal{D}_α . Lo strumento matematico più espressivo risulta essere lo *spettro delle dimensioni*, che associa ad ogni esponente locale α la dimensione frattale $f(\alpha)$ di \mathcal{D}_α .

In pratica, si suddivide il dominio di contatto \mathcal{D} in celle, corrispondenti alla discretizzazione s adottata nei calcoli, e si conta il numero $n(s, \alpha)d\alpha$ di celle ove la dimensione frattale locale della misura risulta compresa fra α e $\alpha+d\alpha$, quindi:

$$f(\alpha) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\log n(s, \alpha)}{-\log s} \quad (6)$$

La funzione $f(\alpha)$, al variare di α , è detta spettro degli esponenti ed è, in genere, una curva continua con un massimo pari alla dimensione frattale Δ del supporto (dominio \mathcal{D}). In Fig. 7 si mostrano alcuni spettri multifrattali, calcolati, per diversi valori della forza normale F e diversi valori dello scorrimento per il giunto in roccia. La distribuzione degli sforzi dipende dallo scorrimento relativo tra le facce: gli spettri diminuiscono di ampiezza all'aumentare dello scorrimento, e i massimi progressivamente si abbassano (Fig. 7a).

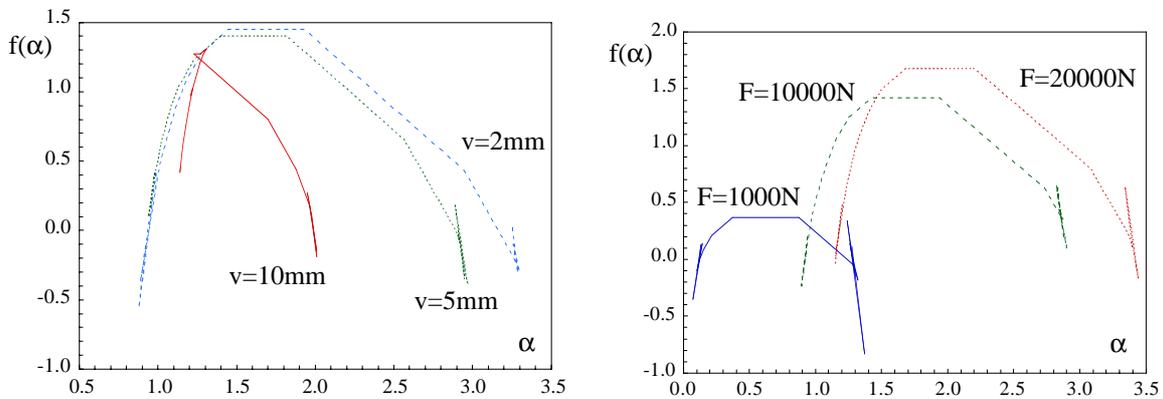


Fig. 7 - Analisi multifrattale delle micro-forze di contatto nell'interfaccia in roccia: (a) spettri calcolati per $F=\text{cost}$ al variare dello scorrimento v , e (b) spettri calcolati al crescere di F , fissato v .

È da notare anche che le distribuzioni cambiano al variare della forza normale F (Fig. 7b). In primo luogo, aumentando F , si assiste all'aumento del valore massimo dello spettro ($\max f(\alpha)$), in accordo con l'evoluzione della dimensione frattale del sottostante dominio di contatto. In secondo luogo, aumenta l'ampiezza della distribuzione, dal momento che l'intervallo delle microforze si allarga progressivamente (nuove asperità entrano in contatto mentre le precedenti incrementano il loro sforzo).

Poter quantificare il grado di eterogeneità nella distribuzione delle pressioni di contatto rappresenta uno degli obiettivi cruciali per l'ottimizzazione degli utensili di perforazione [10] (ad esempio, le carotatrici per il calcestruzzo). La distribuzione ottimale delle concentrazioni tensionali nel materiale da rimuovere ne favorisce la microfessurazione, a vantaggio dell'efficienza degli utensili stessi. Il formalismo multifrattale potrebbe rappresentare uno strumento molto potente in questa direzione, in quanto fornisce una descrizione più completa ed efficace rispetto alla statistica classica e ad altri parametri quali l'entropia informazionale.

La multifrattalità della distribuzione delle forze di contatto si riflette infine, a livello macroscopico, sul comportamento sperimentale di tipo *stick-slip* dei giunti in esame [11]. Attraverso l'applicazione del gruppo di rinormalizzazione, i risultati possono estrapolarsi fino alla scala delle faglie tettoniche. Ipotizzando che la distribuzione del rilascio di energia elastica, a seguito di uno scorrimento, sia proporzionale alla distribuzione delle forze di contatto, il modello multifrattale potrebbe interpretare anche l'origine della nota legge di potenza (tipo Gutenberg-Richter) valida per la frequenza della magnitudo dei sismi.

Bibliografia

- [1] Borri-Brunetto, M., Carpinteri, A. e Chiaia, B., "Scaling phenomena due to fractal contact in concrete and rock fractures", *Int. J. of Fracture*, Vol. 95, 221-238, 1999.
- [2] Borri-Brunetto, M., Carpinteri, A. e Chiaia, B., "Lacunarity of the contact domain between elastic bodies with rough boundaries", in *Probabilities and Materials. Tests, Models and Applications*, NATO ASI Series 3 (Applied Sciences), Vol. 46, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 45-64, 1998.
- [3] Borri-Brunetto, M., Chiaia, B. e Invernizzi, S., "Lacunar fractality of the contact domain in a closed rock fracture", in *Damage and Fracture Mechanics: Computer Aided Assessment and Control*, Computational Mechanics Publication, Southampton, 545-554, 1998.
- [4] Carpinteri, A., "Scaling laws and renormalization groups for strength and toughness of disordered materials", *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 31, 291-302, (1994).
- [5] Greenwood, J.A. e Williamson, J.B.P., "The contact of nominally flat surfaces", *Proceedings of the Royal Society of London A* **295**, 300-319, 1966.
- [6] Sage, J.D., Aziz, A.A. and Danek, E.R., "Aspects of scale effects on rock closure", in *Scale Effects in Rock Masses 93* (Edited by A. Pinto da Cunha), Balkema, Rotterdam, 175-181, 1993.
- [7] Goodman, R.E., *Introduction to rock mechanics*, John Wiley & Sons, New York, 1989.
- [8] Feder, J., *Fractals*, Plenum Press, New York, 1988.
- [9] Lesne A., *Renormalization Methods*, John Wiley & Sons, New York, 1998.
- [10] L.L. Mishnaevsky Jr., "Physical mechanisms of hard rock fragmentation under mechanical loading: a review", *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* Vol. 32, pp. 763-766, 1995.
- [11] Chakrabarti, B.K. e Stinchcombe R.B., "Stick-slip statistics for two fractal surfaces: a model for earthquakes", in *Archives Cond-Mat*, n. 9902164 (<http://xxx.sissa.it/archive/cond-mat/9902164>), 1999.