

# LA FRATTURA NEI MATERIALI QUASI-FRAGILI: UNA TEORIA UNIFICATA DEGLI EFFETTI DI SCALA

Alberto Carpinteri, Pietro Cornetti

*Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica, Politecnico di Torino, Torino  
carpinteri@polito.it*

## Sommario

Recentemente, evidenze sperimentali hanno mostrato l'utilità della geometria frattale nella modellizzazione dei materiali a matrice eterogenea. Tanto la porosità quanto le superfici di frattura nel calcestruzzo presentano infatti caratteristiche autosomiglianti o autoaffini. Attraverso un approccio frattale, il presente lavoro propone un modello di danneggiamento in grado di fornire una spiegazione globale degli effetti di scala cui sottostanno i parametri che caratterizzano la legge coesiva di un materiale quasi-fragile. L'ipotesi di una microfessura-razione frattale all'interno di una banda dove si concentra il danneggiamento spiega l'innalzamento della coda della legge coesiva all'aumentare della dimensione strutturale riscontrato in prove di trazione diretta. E' altresì possibile definire una nuova grandezza, la deformazione frattale che, insieme alla tensione e all'energia di frattura frattali già introdotte dal primo autore, porta ad una legge coesiva funzione esclusivamente del materiale. Il modello viene infine applicato ad alcuni risultati sperimentali.

## Abstract

*The hypothesis of a damage band characterized by microcrack distributions with fractal patterns leads to the definition of a new quantity, the fractal strain, whose value governs the rupture independently of the structural size. The fractal nature of the damage process is able to explain the rising tail of the cohesive law observed while increasing the size, i.e. it clarifies the scaling law of the critical displacement. Together with the fractal stress introduced by the first author, it is possible to define a fractal cohesive law which is scale-independent, i.e. a material property. The fractal model is applied eventually to some experimental data.*

## 1. Introduzione

Nella meccanica dei solidi, col termine *effetto di scala* si indica genericamente la dipendenza di uno o più parametri dalle dimensioni del solido in esame. Si parla cioè di effetti di scala quando strutture

geometricamente simili presentano comportamenti differenti. Come già osservava Galileo [1] in relazione alla minore snellezza delle ossa degli animali di taglia maggiore, la localizzazione del danneggiamento è la causa primaria dell'insorgere degli effetti di scala (relativi alla resistenza, nel caso di Galileo) nei materiali fragili. Oggigiorno, il modello che viene comunemente adottato per descrivere la localizzazione del danno nei materiali a microstruttura disordinata (materiali quasi-fragili) è il modello della *fessura coesiva* introdotto da Hillerborg [2]. Il materiale viene caratterizzato da una coppia di leggi costitutive: una relazione tensione-deformazione ( $\sigma$ - $\varepsilon$ ), valida per la parte del solido che non subisce danneggiamento, ed una relazione tensione-apertura della fessura che descrive come la tensione decresca dal valore massimo  $\sigma_u$  a 0 al crescere della distanza tra le labbra della fessura da 0 al valore critico  $w_c$ . L'area sottesa alla curva tensione-apertura della fessura (detta *legge coesiva*) rappresenta l'energia ( $G_F$ ) necessaria per creare una fessura di area unitaria.

Il modello della fessura coesiva è in grado di spiegare gran parte degli effetti di scala rilevabili negli esperimenti effettuati su provini di calcestruzzo. In particolare tale modello ben si presta alla simulazione di prove dove siano presenti elevati gradienti di tensione, cioè in provini con intaglio iniziale. L'applicazione del modello di Hillerborg permette di cogliere la transizione duttile-fragile riscontrabile all'aumentare della dimensione strutturale. D'altra parte, effetti di scala rilevanti possono emergere anche in prove di trazione uniassiale su provini a clessidra, dove i gradienti di sforzo sono o nulli o comunque di gran lunga inferiori a quelli presenti in altri esperimenti come la prova di flessione su tre punti. Nel caso delle prove di trazione uniassiale la presenza di effetti di scala deve dunque essere imputata al materiale stesso piuttosto che alla geometria dei provini e alle relative condizioni di carico.

Negli ultimi anni sono state realizzate due campagne di prova su provini a clessidra: la prima è stata effettuata da Carpinteri e Ferro [3] con un'apparecchiatura in grado di mantenere parallele tra loro le basi dei provini su un intervallo di scale 1:16; la seconda da van Mier & van Vliet [4] con un'apparecchiatura che permette la rotazione delle basi su un intervallo 1:32. Entrambe le indagini sperimentali hanno rilevato come le quantità fisiche ( $\sigma_u$ ,  $G_F$ ) caratterizzanti la legge coesiva siano funzioni della dimensione strutturale, evidenziando in tal modo i limiti del modello coesivo. Infatti, aumentando le dimensioni del provino, la resistenza a trazione diminuisce mentre l'energia di frattura aumenta.

Sulla base di questi risultati sperimentali, sono stati sviluppati modelli come la Size Effect Law di Bazant [5] e le Multi-Fractal Scaling Laws di Carpinteri et al. [6,7] al fine di poter estrapolare i valori di resistenza ed energia di frattura di strutture con dimensioni maggiori o minori di quelle usualmente presenti in laboratorio. Il presente lavoro rappresenta il logico sviluppo dei concetti esposti dal primo autore in [8].

## 2. Meccanica del danneggiamento

Nella meccanica dei continui la definizione di tensione si basa su alcune ipotesi di regolarità del mezzo in esame (continuità e misurabilità). Tale definizione cade però in difetto quando si analizzano mezzi con matrice disomogenea e discontinua: occorre pertanto ricorrere ad un approccio di tipo mesoscopico. Il calcestruzzo, presentando difetti che interagiscono tra loro ad ogni scala di osservazione, appartiene a questa categoria.

Recenti risultati sperimentali [9] relativi alla porosità del calcestruzzo, così come l'evidenza stessa dell'effetto di scala sulla resistenza a trazione, portano a modellare la sezione resistente attraverso un frattale stocastico *lacunare*, avente cioè dimensione  $D_G \leq 2$ . La lacunarità della sezione resistente è fisicamente motivata dalla distribuzione autosomi-gliante di vuoti e microfessure, mentre da un punto di vista matematico può essere caratterizzata dal decremento  $d_G$  rispetto alla dimensione euclidea  $D$

$= 2$ , cioè  $D_{\sigma} = 2 - d_{\sigma}$ . E' noto che l'area di un frattale lacunare dipende dalla scala di osservazione e tende a zero al crescere della risoluzione di misura. La classica definizione di tensione cade in tal caso in difetto. Per ovviare a tale problema Carpinteri [8] ha definito una nuova grandezza: la tensione frattale  $\sigma^*$ .

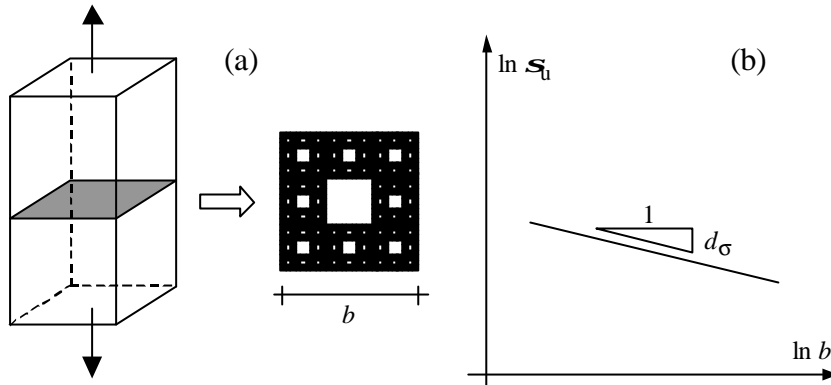


Figura 1. Sezione resistente frattale (a) ed effetto di scala sulla resistenza a trazione  $\sigma_u$  (b).

Si descriva, per semplicità, la sezione resistente con un frattale deterministico quale il tappeto di Sierpinski costruito sul quadrato di lato  $b$ . La sua dimensione è  $D_{\sigma} = \log 8 / \log 3 = 1.893$  ( $d_{\sigma} = 0.107$ ). La massima tensione sopportabile  $\sigma_u$  può essere calcolata come rapporto tra il massimo carico e l'area nominale della sezione  $A_0 = b^2$ . Queste sono peraltro quantità fittizie, tendendo l'area effettiva della sezione a zero all'aumentare della risoluzione. Il carico massimo ammissibile sarà invece dato dal prodotto della misura di Hausdorff del tappeto di Sierpinski  $A^* \approx b^{(2-d_{\sigma})}$  per la *tensione ultima frattale*  $\sigma_u^*$ :

$$F = \sigma_u A_0 = \sigma_u^* A^* \quad (1)$$

La resistenza frattale  $\sigma_u^*$  è caratterizzata da dimensioni non intere ( $[F][L]^{-(2-d_{\sigma})}$ ) e rappresenta il vero parametro indipendente dalla scala. Viceversa la legge di scala della tensione ultima  $\sigma_u$  può dedursi dalla relazione (1), tenendo conto delle misure rispettivamente dell'area nominale e dell'effettivo dominio frattale:

$$\sigma_u = \sigma_u^* b^{-d_{\sigma}} \quad (2)$$

La (2) rappresenta la legge di potenza che definisce lo *scaling* di  $\sigma_u$  e giustifica da un punto di vista teorico il decremento della resistenza a trazione all'aumentare della dimensione strutturale riscontrato da molti autori. Sul piano bilogarithmico di figura 1b la (2) è rappresentata da una retta con pendenza negativa in valore assoluto pari a  $d_{\sigma}$ . Risultati teorici e sperimentali portano ad ipotizzare per  $d_{\sigma}$  un valore compreso tra 0 ( $\sigma_u^*$  con dimensioni canoniche, assenza di effetti di scala sulla resistenza) e 1/2 ( $\sigma_u^*$  con le dimensioni del fattore di intensificazione degli sforzi, effetto di scala sulla resistenza massimo e pari a quello previsto dalla LEFM nel caso di distribuzione autosomigliante dei difetti nel materiale).

Volgendo ora l'attenzione dalla singola sezione resistente all'intero provino, si osserva che spesso il danneggiamento si disloca su una banda [10]. Nel presente modello si suppone che l'ampiezza della banda sia proporzionale ad una dimensione caratteristica del provino, ad esempio la larghezza  $b$

del *ligament*. Ciò che provoca l'insorgere di effetti di scala è l'ulteriore ipotesi che all'interno della banda danneggiata la microfessurazione abbia caratteristiche frattali (*banda frattale*). Ciò può apparire eccessivamente astratto, ma la sperimentazione pare invece confermarlo: tanto le bande di plasticizzazione in alcuni metalli [11], quanto le fessure causate dal ritiro nei dipinti antichi o nella terra arida presentano tipiche strutture frattali.

Si consideri ora, come rappresentativo del comportamento della banda danneggiata, il caso di una barra soggetta a trazione in cui, in prossimità del carico massimo, la deformazione tenda a concentrarsi in sezioni la cui proiezione sull'asse della barra sia un frattale lacunare; la parte rimanente del corpo va invece incontro ad uno scarico elastico. Sotto tali ipotesi il diagramma di spostamento a rottura è rappresentato da un diagramma tipo *scala del diavolo* [12], tracciato in figura 2a nel caso in cui il frattale lacunare sia rappresentato dall'insieme di Cantor. Si noti come la classica definizione di deformazione non sia in grado di caratterizzare questo diagramma in quanto la sua derivata prima diverge nei punti singolari pur essendo le discontinuità finite. E' dunque necessario introdurre una nuova quantità: la deformazione critica frattale  $\epsilon_c^*$ .

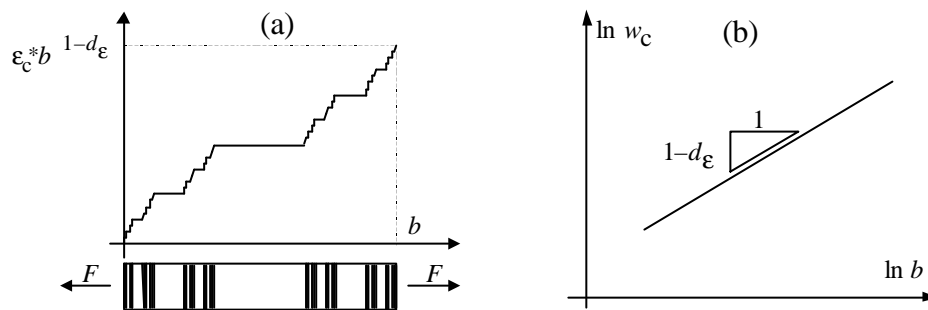


Figura 2. Localizzazione frattale della deformazione (a) ed effetto di scala sullo spostamento critico  $w_c$  (b).

Sia  $D_\epsilon = 1-d_\epsilon = \ln 2/\ln 3 = 0.6391$  la dimensione della proiezione delle sezioni danneggiate. Essendo  $D_\epsilon$  compreso tra 0 e 1, anche il relativo decremento  $d_\epsilon$  rispetto all'unità sarà compreso tra gli stessi valori. Lo spostamento critico  $w_c$  può essere calcolato come prodotto della deformazione nominale  $\epsilon_c$  per la lunghezza  $b$  della barra, sebbene queste siano solo quantità fittizie, essendo la lunghezza della zona danneggiata tendente a zero all'aumentare della risoluzione. In accordo con la geometria frattale del problema in esame, lo spostamento  $w_c$  andrà più realisticamente computato come prodotto della misura frattale dell'insieme di Cantor per la *deformazione critica frattale*  $\epsilon_c^*$ :

$$w_c = \epsilon_c b = \epsilon_c^* b^{1-d_\epsilon} \quad (3)$$

La deformazione critica frattale  $\epsilon_c^*$  rappresenta il vero parametro invariante di scala ed è caratterizzato da dimensioni non intere ( $[L]^{(d_\epsilon)}$ ). La (3) definisce la legge di potenza che regola lo *scaling* dello spostamento critico  $w_c$ , giustificando da un punto di vista teorico l'innalzamento della coda della legge coesiva all'aumentare della dimensione strutturale [4]. Sul piano bilogarithmico di figura 2b, la relazione (3) è rappresentata da una retta con pendenza positiva pari a  $(1-d_\epsilon)$ . L'infragilimento della risposta strutturale viene evidenziato anche dal decremento della deformazione critica nominale  $\epsilon_c$  all'aumentare della dimensione:

$$\epsilon_c = \epsilon_c^* b^{-d_\epsilon} \quad (4)$$

L'esponente  $d_\varepsilon$  è legato al grado di disordine del processo di danneggiamento: minore è  $d_\varepsilon$ , più diffuso è il danno. In particolare, per  $d_\varepsilon = 0$ ,  $\varepsilon_c^*$  assume le dimensioni di una classica dilatazione: si ha dunque rottura qualora la deformazione raggiunga il suo valore critico (danneggiamento diffuso, materiale duttile). Viceversa per  $d_\varepsilon = 1$  (localizzazione del danno su una singola sezione, materiale fragile), la rottura occorre quando lo spostamento raggiunge il valore critico  $w_c$ , che, in tal caso, è indipendente dalla scala (come nel modello di Hillerborg).

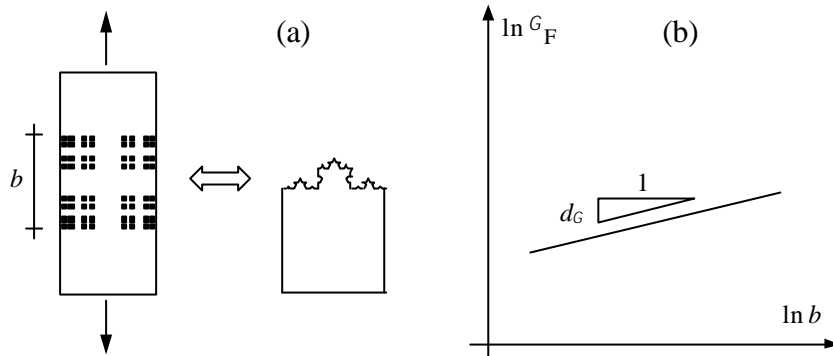


Figura 3. Dominio frattale di dissipazione (a); effetto di scala sull'energia di frattura  $G_F$  (b).

Anche il terzo parametro caratterizzante la legge coesiva – l'energia di frattura  $G_F$  – è soggetto ad effetti di scala. Numerose prove sperimentali hanno mostrato come l'energia di frattura cresca all'aumentare della dimensione strutturale. Coerentemente con le ipotesi esposte nei due paragrafi precedenti, l'energia nel corso del processo di rottura verrà dissipata sulle infinite sezioni lacunari su cui si localizza la deformazione. In altre parole, la doppia localizzazione, trasversale (di sforzo) e longitudinale (di deformazione), che si manifesta al raggiungimento del carico massimo, fa sì che il processo di *softening* vada descritto in funzione della tensione e della deformazione frattali; generalizzando la (2) e la (3) ad un livello di carico qualsiasi, si ha:

$$\sigma = \sigma^* b^{-d_\sigma} , \quad w = \varepsilon^* b^{1-d_\varepsilon} \quad (5)$$

Diversamente da  $\sigma_u$  e  $w_c$ , l'energia di frattura è una quantità integrale:  $G_F = \int_0^{w_c} \sigma dw$ . Le relazioni (5) consentono di evidenziare l'effetto della dimensione strutturale su  $G_F$ :

$$G_F = \int_0^{w_c} \sigma dw = b^{1-d_\varepsilon-d_\sigma} \int_0^{\varepsilon_c^*} \sigma^* d\varepsilon^* = G_F^* b^{1-d_\varepsilon-d_\sigma} \quad (6)$$

La legge di potenza (6) descrive lo *scaling* di  $G_F$  ed è una conseguenza del dominio frattale  $A^*$  su cui ha luogo la dissipazione. Si indichi con  $D_G = 2 + d_G \geq 2$  la dimensione di  $A^*$ . Il lavoro  $W$  necessario per rompere il provino può esprimersi come segue:

$$W = G_F A_0 = G_F^* A^* \quad (7)$$

$A_0 = b^2$  e  $G_F$  sono solo quantità nominali: i valori effettivi di area ed energia di frattura tendono rispettivamente a infinito e a zero. Al contrario,  $A^*$  e  $G_F^*$  sono le *vere* variabili rispettivamente

geometrica e fisica del problema, indipendenti dalla risoluzione di misura. La prima ha misura di Hausdorff  $A^* \approx b^{(2+d_G)}$ , mentre  $G_F^*$  ha dimensione  $[FL][L]^{-(2+d_G)}$  e viene chiamata *energia di frattura frattale*. Dalle (6) e (7) è possibile esprimere  $d_G$  in funzione di  $d_\sigma$  e  $d_\varepsilon$  ovvero evidenziare la relazione che sussiste fra i tre esponenti di *scaling*:

$$d_\sigma + d_\varepsilon + d_G = 1 \quad (8)$$

I tre esponenti della (8) sono tutti positivi: mentre  $d_\varepsilon$  può assumere tutti i valori compresi nell'intervallo  $[0,1]$ ,  $d_\sigma$  e  $d_G$  sembrano essere compresi tra 0 ed  $1/2$  (disordine *browniano*). L'equazione (8) stabilisce un limite al massimo disordine riscontrabile nel processo di danneggiamento: in particolare conferma che la somma ( $d_G + d_\sigma$ ) è minore o uguale a 1, come precedentemente affermato da Carpinteri [8] in base all'analisi dimensionale.

Nel corso degli ultimi anni sono stati ipotizzati diversi modelli frattali al fine di spiegare l'effetto di scala sull'energia di frattura. Tutti hanno in comune l'ipotesi di un dominio di dissipazione con dimensione maggiore di due, sia esso una superficie particolarmente rugosa [7] o una fessura con infinite ramificazioni [13]. Numerosi rilevamenti hanno inoltre verificato la natura frattale (autoaffine) delle superfici di frattura (dette anche *invasive*, poiché con dimensioni superiori a quelle topologiche). Al fine di evidenziare il dominio di dissipazione previsto dal presente modello, si ipotizzi per semplicità una lacunarità di tipo cantoriano, sia longitudinale ( $D_\varepsilon = \ln 2 / \ln 3$ ) che trasversale ( $D_\sigma = 1 + \ln 2 / \ln 3$ ). L'insieme sul quale si dissipa l'energia è dato dal prodotto cartesiano dei due insiemi lacunari; la sua intersezione con un piano parallelo all'asse longitudinale è mostrata in figura 3a (la cosiddetta *polvere di Cantor*), mentre la sua dimensione è pari alla somma delle dimensioni degli insiemi lacunari:

$$D_G = D_\sigma + D_\varepsilon \quad (9)$$

da cui  $D_G = 1 + 2 \ln 2 / \ln 3 = 1 + \ln 4 / \ln 3$ . Anzitutto si noti che la relazione (9) è del tutto equivalente alla (8). In secondo luogo, si osservi che la polvere di Cantor ha la stessa dimensione di Hausdorff della curva di von Koch (fig. 3a), usualmente assunta come archetipo di superfici estremamente rugose. Ciò dimostra come il presente lavoro sia in accordo coi risultati precedentemente trovati da Carpinteri & Chiaia [7]. In altre parole, il processo di danneggiamento previsto dal modello della banda frattale è equivalente a quello della formazione di una superficie *invasiva*.

### 3. Legge coesiva invariante di scala

La relazione (6) evidenzia come l'energia di frattura frattale  $G_F^*$  coincida con l'area sottesa al diagramma tensione frattale-deformazione frattale che caratterizza il *softening* (fig. 4b):

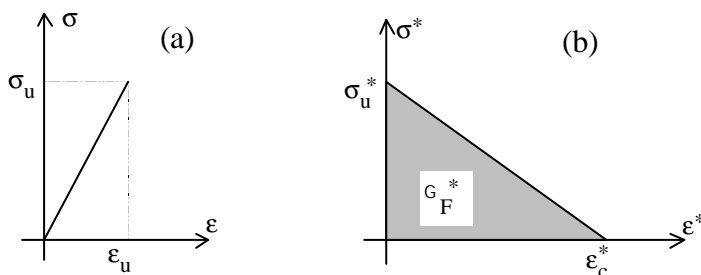


Figura 4. Legge lineare elastica (a) e legge coesiva frattale (b).

$$J_F^* = \int_0^{\epsilon_c^*} \sigma^* d\epsilon^* \quad (10)$$

A causa della natura frattale della localizzazione del danno, il ramo di *softening* deve essere descritto in termini di tensioni e deformazioni frattali. Mentre la parte del materiale non danneggiata subisce uno scarico elastico, la parte danneggiata viene caratterizzata dalla diminuzione di  $\sigma^*$  da  $\sigma_u^*$  a 0 mentre  $\epsilon^*$  cresce da 0 a  $\epsilon_c^*$ . Il diagramma  $\sigma^* - \epsilon^*$  definisce la *legge coesiva invariante di scala* (o *frattale*). Contrariamente alla classica legge coesiva, i cui parametri risultano dipendere sperimentalmente dalla dimensione strutturale, la legge coesiva frattale risulta essere una proprietà esclusiva del materiale.

Recentemente van Mier & van Vliet [4] hanno effettuato esperimenti di trazione su provini a clessidra in un ampio intervallo di scale (1:32). Eccetto che per i provini più piccoli, ove insorgono altri tipi di fenomeni, essi hanno trovato che “all’aumentare della dimensione, il picco della legge coesiva decresce mentre la coda si alza”. In altre parole,  $\sigma_u$  decresce mentre  $w_c$  cresce. Più in particolare  $w_c$  cresce in maniera più marcata in quanto nel contempo si riscontra un aumento dell’area sottesa, cioè dell’energia di frattura. Come si è mostrato, tutti questi effetti di scala vengono colti dal modello frattale qui elaborato.

Al fine di evidenziare le implicazioni del modello sulle leggi costitutive, si ipotizzi per semplicità che le leggi  $\sigma - \epsilon$  e  $\sigma^* - \epsilon^*$  siano lineari (fig. 4). Si considerino tre provini dello stesso materiale con un *ligament* di dimensione rispettivamente  $b_1$ ,  $b_2 = 2b_1$ ,  $b_3 = 4b_1$ . Se  $w_{c1}$ ,  $\epsilon_{c1}$  e  $\sigma_{u1}$  sono i valori relativi al primo provino, i diagrammi  $\sigma - \epsilon$  e  $\sigma - w$  dei tre provini possono essere tracciati (fig. 5) nell’ipotesi, ad esempio, di  $d_\sigma = 0.2$  e  $d_\epsilon = 0.6$  (quindi  $d_G = 0.2$ ). I diagrammi  $\sigma - \epsilon$  (fig. 5a) assumono così un andamento più fragile all’aumentare della dimensione, anche se in maniera meno marcata rispetto al modello classico. Le tre leggi coesive (fig. 5b) sottostanno agli effetti di scala riscontrati da van Mier & van Vliet [4].

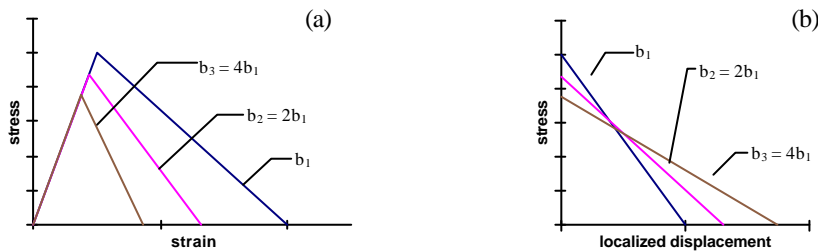


Figura 5. Implicazioni della legge coesiva frattale sui diagrammi  $\sigma - \epsilon$  (a) e  $\sigma - w$  (b).

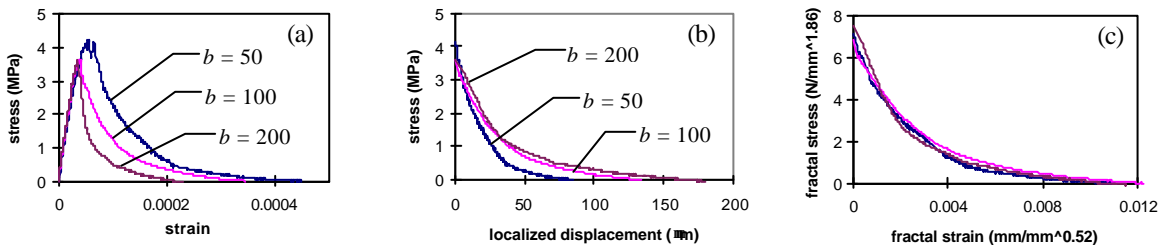


Figura 6. Diagrammi  $\sigma - \epsilon$  (a), legge coesiva (b) e legge coesiva frattale (c) per provini a clessidra di larghezza  $b$  [mm] [3,14].

Si sono applicati infine i concetti esposti a dati sperimentali ottenuti da Carpinteri & Ferro [3,14] nel corso di prove di trazione uniassiale su provini a clessidra. Relativamente alle prove qui riportate, essi hanno giustificato gli effetti di scala sulla resistenza e sull’energia di frattura in base alla natura

frattale del *ligament* e della superficie di rottura, trovando i valori 0.14 e 0.38 rispettivamente per  $d_{\sigma}$  e  $d_{\epsilon}$ . In figura 6a,b sono riportate le curve  $\sigma$ - $\epsilon$  e  $\sigma$ - $w$ , ove  $w$  è lo spostamento localizzato nella banda danneggiata ed è ottenuto sottraendo allo spostamento totale la quota dovuta alla deformazione elastica ed anelastica pre-picco. Si noti come l'andamento delle curve sperimentali (fig. 6a,b) sia lo stesso delle curve teoriche (fig. 5a,b). Dalla relazione (8) è poi possibile ricavare per  $d_{\epsilon}$  il valore 0.48 e tracciare quindi le leggi coesive frattali per i diversi provini. Come previsto dal modello teorico, tutte le curve tendono a fondersi in un'unica legge coesiva indipendentemente dalla dimensione (fig. 6c).

## Ringraziamenti

Questa ricerca è stata realizzata grazie al contributo del MURST, del CNR e del contratto europeo EC-TMR n° ERBFMRXCT 960062.

## Bibliografia

- [1] Galileo G., *“Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica e i movimenti locali”*, **1638**.
- [2] Hillerborg A., Modeer M. & Petersson P.E. *“Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements”*, Cement and Concrete Research, **6**, 773-782, **1976**.
- [3] Carpinteri A., Ferro G. *“Size effects on tensile fracture properties: a unified explanation based on disorder and fractality of concrete microstructure”*, Materials and Structures, **27**, 563-571, **1994**.
- [4] van Mier J.G.M., van Vliet M.R.A. *“Effect of strain gradients on the size effect of concrete in uniaxial tension”*, International Journal of Fracture, **94**, 195-219, **1999**.
- [5] Bazant Z.P. *“Size effect in blunt fracture: concrete, rock, metal”*, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, **110**, 518-535, **1984**.
- [6] Carpinteri A., Chiaia B., Ferro G. *“Size effect on nominal tensile strength of concrete structures: multifractality of material ligament and dimensional transition from order to disorder”*, Materials and Structures, **28**, 311-317, **1995**.
- [7] Carpinteri A., Chiaia B. *“Multifractal nature of concrete fracture surfaces and size effects on nominal fracture energy”*, Materials and Structures, **28**, 435-443, **1995**.
- [8] Carpinteri A. *“Fractal nature of material microstructure and size effects on apparent mechanical properties”*, Mechanics of Materials, **18**, 89-101, **1994**.
- [9] Carpinteri A., Chiaia B., Invernizzi S. *“Three-dimensional fractal analysis of concrete fracture at the meso-level”*, Theoretical and applied fracture mechanics, **31**, 163-172, **1999**.
- [10] Bazant Z.P., Oh B.H. *“Crack band theory for fracture of concrete”*, Materials and Structures, **16**, 155-177, **1983**.
- [11] Kleiser T., Bocek M. X. *“The fractal nature of slip in crystals”*, Zeitschrift fur Metallkunde, **77**, 582-587, **1986**.
- [12] Feder J. *“Fractals”*, Plenum Press, **1988**.
- [13] Ji X.H., Chan S.Y.N., Feng N.Q. *“A fractal model for simulating the formation of microcracks in the fracture process zone and a theoretical explanation of the size effect of the fracture energy of concrete”*, Magazine of Concrete Research, **49**, 253-258, **1997**.
- [14] Carpinteri A., Ferro G. *“Scaling behaviour and dual renormalization of experimental*



*tensile softening response*”, Materials and Structures, **31**, 303-309, **1998**.