

# ELASTICITÀ NON LOCALE NELLA MECCANICA DELLA FRATTURA: RISULTATI E PROSPETTIVE

Castrenze Polizzotto

Dipartimento di Ingegneria Strutturale & Geotecnica, DISeG  
Università di Palermo, Viale delle Scienze, 90128 Palermo, Italia  
Tel. 091-6568.411, Fax 091-6568.407, E-mail cpoli@stru.diseg.unipa.it

## Sommario

In un quadro termodinamico dei processi di frattura, si considera un solido elasto-plastico con elasticità non locale e plasticità standard (locale), nel quale la frattura è preceduta da fenomeni di danno localizzati in interfacce rigido-decoesive. Basandosi sul secondo principio della termodinamica, si formula un criterio di stabilità per frattura tri-dimensionale, generalizzazione del classico criterio di Griffith, in cui intervengono il vettore forza attiva, il vettore resistenza alla frattura e la matrice (simmetrica) di rigidità nei confronti della frattura, tutti definiti (in modo continuo o discreto) nel fronte della frattura. Si ritrova il concetto di energia di frattura di Griffith. L'elasticità non locale rende applicabili i classici criteri di resistenza basati sulle tensioni.

## *Abstract*

*In the thermodynamic framework of fracture processes, a solid made of a material obeying nonlocal elasticity and standard plasticity is considered, in which fracture is preceded by damage phenomena localized in rigid-decohesive interfaces. Basing on the second principle of thermodynamics, a stability criterion for three-dimensional fracture is formulated, which turns out to be a generalization of the classical Griffith's one, and in which a decisive role is played by the fracture driving force vector, the fracture resistance vector and the (symmetric) fracture stiffness matrix, all being defined on the fracture front (either continuously, or for discrete modes). The Griffith's fracture energy concept is met. Nonlocal elasticity renders applicable the classical stress-based safety criteria.*

## 1. Introduzione

L'inapplicabilità dei criteri di sicurezza basati sulle tensioni a problemi strutturali che comportano singolarità nel campo delle tensioni, quali tipicamente i problemi di meccanica della frattura, ha indotto taluni a ritenere ciò essere dovuto a insufficienza non dei criteri suddetti, bensì del classico modello di elasticità impiegato, e a riconoscere nell'elasticità non locale un modello idoneo allo scopo. Eringen e collaboratori [4-7] hanno messo a punto un tale modello per l'elasticità isotropa omogenea, in cui la tensione  $\boldsymbol{\sigma}$  in un punto  $\mathbf{X}$  del dominio  $V$  del solido è espressa come valore medio pesato nella forma (vedi anche [10]):

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} : \mathcal{R}(\boldsymbol{\varepsilon}^e), \quad \mathcal{R}(\boldsymbol{\varepsilon}^e)|_X = \int_V A(\mathbf{X}, \mathbf{X}') \boldsymbol{\varepsilon}^e(\mathbf{X}') dV(\mathbf{X}') \quad \forall \mathbf{X} \in V \quad (1)$$

dove  $\mathbf{D}$  è il consueto tensore di rigidezza dell'elasticità isotropa,  $\mathcal{R}$  è un operatore integrale,  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  è il campo delle deformazioni (elastiche) e  $A(\mathbf{X}, \mathbf{X}')$  è la funzione di attenuazione. Questa dipende da  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{X}'$  in generale attraverso la distanza euclidea, ossia  $A = a(r)$ ,  $r = |\mathbf{X}' - \mathbf{X}|$ ;  $a(r)$  positiva, monotonicamente decrescente al crescere di  $r$ , ed in pratica  $a(r) \simeq 0$  per  $r > R$  ed  $R$  sufficientemente grande—ma in generale minore della più piccola dimensione trasversale del solido. Una scelta tipica per  $a(r)$  è la funzione errore, i.e.  $a = k \exp(-r^2/\ell^2)$ , dove  $k$  è una costante,  $\ell$  una lunghezza interna del materiale. Questo modello è stato usato dagli stessi suoi proponenti per risolvere numerosi problemi di meccanica della frattura [6-10,13] ottenendo soluzioni con tensioni regolari e aventi un picco (finito) in vicinanza dell'apice della frattura.

Quest'ultimo risultato è di validità generale. Il suddetto modello di Eringen è stato incorporato in un classico problema di valori al contorno del continuo con l'intento di studiarne l'unicità di soluzione [1,11], nonché altri aspetti come la formulazione di principi variazionali quali estensioni alla non-località dei classici principi dell'elasticità locale [11]; è stato altresì formulato un metodo agli elementi finiti non locali [11]. Data l'insufficienza di spazio, si rimanda ai lavori sopra citati e alle rispettive bibliografie per maggiori ragguagli sull'argomento. Qui interessa riportare brevemente gli sviluppi di una ricerca in corso, volta alla formulazione di un approccio termodinamico alla meccanica della frattura in ambiente elastoplastico con elasticità non locale (modello di Eringen).

## 2. Il problema meccanico

Si considera un solido di dominio  $V$  che contiene, nello stato iniziale, una frattura adagiata sulla superficie  $A_c^0$ . La superficie di contorno del solido è  $\partial V = S + S_c^0$ , essendo  $S_c^0$  le facce della frattura. Il materiale è elastoplastico con elasticità non locale (modello di Eringen) e plasticità standard (variabili interne, incrudimento non lineare, associatività). Il danno è simulato come comportamento *softening*. Questo, per ipotesi, si manifesta come decoesione in una o più interfacce governate da specifiche leggi costitutive trazione/decoesione (di tipo locale), in cui si ha progressivo decadimento della trazione fino al totale distacco delle facce e formazione di frattura. Al progredire dei carichi, si manifestano deformazioni plastiche in  $V$  e, da un certo stadio in poi,

decoesione in una certa superficie  $A_d$ , che rappresenta la zona di processo. Questa superficie (in generale gobba) è compresa tra due linee (aperte o chiuse), cioè il *fronte della decoesione*  $L_d$  (nei cui punti la decoesione è incipiente) ed il *fronte della frattura*  $L_f$  (nei cui punti la decoesione è al limite di distacco).

Nello stato iniziale,  $L_d$  e  $L_f$  coincidono con la linea di contorno della frattura iniziale  $A_c^0$ ; al crescere del carico, i due fronti avanzano (prima  $L_d$ , poi  $L_f$ ) espandendosi (ed eventualmente cambiando di forma) ed in questo avanzamento  $L_d$  descrive una superficie  $A_F = A_c + A_d$ , mentre  $L_f$  descrive  $A_c$ . In ciò si presuppone che la frattura sia stabile; se essa diventa instabile in un certo istante del processo deformativo, la frattura si propaga spontaneamente con modalità da valutare.

Per un problema come quello sopra descritto occorrono tre distinti gruppi di equazioni costitutive, ossia: i) per il materiale elastoplastico in  $V$ , ii) per l'interfaccia di decoesione avente giacitura predeterminata in ogni punto di  $A_d$ , iii) per il meccanismo di decoesione incipiente su giacitura incognita davanti a  $L_d$  onde controllarne l'avanzamento. Tali equazioni vengono qui formulate in modo termodinamicamente coerente.

### 3. Aspetti termodinamici

Seguendo [5,12], si considera un processo irreversibile nel quale la superficie di frattura/decoesione  $A'_F = A_c^0 + A_F$ ,  $A_F = A_c + A_d$ , evolve con l'avanzamento progressivo dei due fronti  $L_f$  e  $L_d$ . Come in [5,12], si fa l'ipotesi che esistano due densità di energia interna,  $e$  in  $V$ ,  $e^*$  nella superficie  $A_F$ . Considerando il problema come isoterma (la propagazione della frattura avviene assai più rapidamente della propagazione del calore), il primo principio della termodinamica si scrive, in forma globale per tutto il solido e ponendo  $V_c = V \setminus A_c$ :

$$\int_{V_c} \dot{e} dV + \frac{d}{dt} \int_{A_F} e^* dS = \int_{V_c} \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{u}} dV + \int_{\partial V_c} \mathbf{t}_{(n)} \cdot \dot{\mathbf{u}} dS \quad (2)$$

dove  $e = e(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \mathcal{R}(\boldsymbol{\varepsilon}^e), \boldsymbol{\xi}, \eta)$ ,  $e^* = e(\gamma, \eta^*)$ , essendo  $(\boldsymbol{\xi}, \gamma) =$  variabili interne,  $(\eta, \eta^*) =$  densità di entropia. In difformità con [5], ed in parte con [12], il suddetto principio viene qui scritto anche per ogni elemento di volume  $dV$ , ma tenendo conto di talune circostanze fisiche basilari per la validità dell'operazione. A tal proposito si osserva che ogni elemento di superficie di frattura  $A_c(t)$  non è sede di processi irreversibili dall'istante della sua formazione in poi, e che quindi  $A_c(t)$  può riguardarsi come una continuazione di  $S + S_c^0$ . Si possono allora considerare due diverse posizioni tipiche dell'elemento di volume: a) esso non è intersecato da  $A_d(t)$ , e b) esso è intersecato da  $A_d(t)$ , Fig. 1.

Nel caso di elemento di volume  $dV$  intersecato da  $A_d(t)$ , l'unico accorgimento da adottare è che nell'equazione di bilancio deve entrare anche il *residuo di non-località* [4,11], cioè l'energia  $JdV$  che l'elemento di volume riceve da tutti gli altri in  $V \setminus A_d$  attraverso i processi diffusivi associati alla non-località. Pertanto, introducendo l'energia libera  $\psi = e - \eta T$ , dove  $T =$  temperatura assoluta, si può pervenire (con procedimento qui tralasciato per brevità) alla diseuguaglianza:

$$T\dot{\eta} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\psi} + J \geq 0 \quad \text{in } V_c \setminus A_d. \quad (3)$$

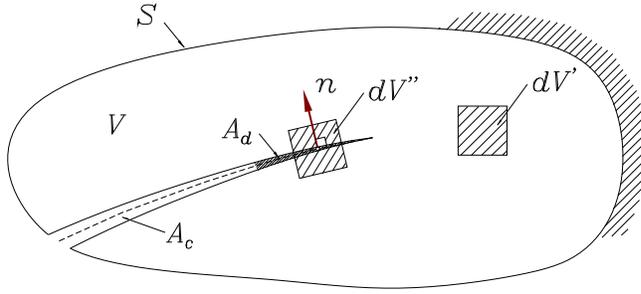


Fig. 1. Solido con superficie di frattura  $A_c$  e interfaccia decoesiva  $A_d$ : posizioni tipiche dell'elemento di volume.

La (3) è la diseuguaglianza di Clausius-Duhem per il caso in esame. Seguendo un procedimento ormai consolidato [3], ma che qui non si espone per brevità, la (3) può essere usata per determinare le restrizioni termodinamiche cui le equazioni costitutive del materiale in  $V_c \setminus A_d$  devono soddisfare. Si ottengono così le equazioni di stato

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} + \mathcal{R} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \mathcal{R}(\boldsymbol{\varepsilon}^e)} \right), \quad \eta = -\frac{\partial \psi}{\partial T} \quad \text{in } V_c \setminus A_d, \quad (4)$$

nonché la densità di dissipazione intrinseca, i.e.

$$D = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \boldsymbol{\chi} \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}} \geq 0 \quad \text{in } V_c \setminus A_d \quad (5)$$

dove  $\boldsymbol{\chi} = \partial \psi / \partial \boldsymbol{\xi}$  = vettore delle variabili interne duale di  $\boldsymbol{\xi}$ , come pure il residuo  $J$ , i.e.

$$J = \frac{\partial \psi}{\partial \mathcal{R}(\boldsymbol{\varepsilon}^e)} : \mathcal{R}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e) - \mathcal{R} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \mathcal{R}(\boldsymbol{\varepsilon}^e)} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \quad \text{in } V_c \setminus A_d, \quad (6)$$

che soddisfa la condizione di isolamento  $\int_V J dV = 0$ .

Nel caso poi di elemento  $dV$  intersecato da  $A_d$  (ma non da  $L_f$ , né da  $L_d$ ), Fig. 1, introducendo l'energia libera  $\psi^* = e^* - \eta^* T$ , non c'è residuo di non-località da considerare e si può ottenere la diseuguaglianza

$$T \dot{\eta}^* = \mathbf{t}_{(n)} \cdot [\dot{\mathbf{u}}] - \dot{\psi}_{in}^* \geq 0 \quad \text{in } A_d, \quad (7)$$

che è la diseuguaglianza di Clausius-Duhem per l'interfaccia decoesiva. Dalla (7) si può poi ricavare, ancora seguendo [3], oltre all'equazione di stato  $\eta^* = -\partial \psi^* / \partial T$  in  $A_d$ , anche la densità superficiale di dissipazione intrinseca, i.e.

$$D^* = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{g}} - Y \dot{\gamma} \geq 0 \quad \text{in } A_d, \quad (8)$$

dove  $\mathbf{p} = \mathbf{t}_{(n)}$  = trazione,  $\mathbf{g} = [\mathbf{u}]$  = discontinuità dello spostamento,  $Y = \partial \psi^* / \partial \gamma$  = variabile interna duale di  $\gamma$ .

#### 4. Equazioni costitutive

Per il materiale in  $V$  si osserva che, affinché la prima delle (4) coincida con (1), è sufficiente assumere una funzione energia libera del tipo  $\psi = (1/2)\boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbf{D} : \mathcal{R}(\boldsymbol{\varepsilon}^e) + \psi_{in}(\boldsymbol{\xi})$ , dove  $T$  non compare perché costante. Poiché la densità di dissipazione in (5) ha la consueta forma per materiale plastico a variabili interne, le relative equazioni costitutive sono della forma, ben nota in letteratura,

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\chi}) \geq 0, \quad \dot{l} \geq 0, \quad \dot{l}f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\chi}) = 0 \quad \text{in } V_c \quad (9)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{l} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \dot{\boldsymbol{\xi}} = -\dot{l} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\chi}} \quad \text{in } V_c, \quad (10)$$

il cui significato non richiede alcun commento esplicativo. Queste equazioni hanno carattere locale, ma se del caso si potrebbe introdurre un modello di tipo non locale o a gradiente.

Per l'interfaccia  $A_d$ , il cui comportamento è rigido-decoesivo, basandosi sulla (8) si introduce una funzione (convessa) di decoesione, sia  $\phi(\mathbf{p}, Y)$ , e si scrivono le relative leggi evolutive in forma simile a (9) e (10), ossia:

$$\phi(\mathbf{p}, Y) \leq 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad \dot{\lambda}\phi(\mathbf{p}, Y) = 0 \quad \text{in } A_d \quad (11)$$

$$\dot{\mathbf{g}} = \dot{\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\gamma} = -\dot{\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial Y} \quad \text{in } A_d. \quad (12)$$

Anche queste equazioni hanno carattere locale. Si può verificare che ogni meccanismo decoesivo espresso da (11) e (12) soddisfa il requisito termodinamico (8).

Per quanto riguarda il meccanismo decoesivo incipiente, si fa l'ipotesi che esso sia di tipo normale (modo I), i.e.  $\dot{\mathbf{g}} = g_n \mathbf{n}$ , e obbedisca al criterio della massima tensione normale. È anche possibile interpretare tale meccanismo come un fenomeno di localizzazione della deformazione plastica in fase softening.

A maggiore chiarimento del modello costitutivo precedente, si considera il caso semplice mono-dimensionale nell'ipotesi di elasticità locale, Fig. 2. Nei punti  $\mathbf{X}$  non giacenti in  $A_d$ , il diagramma  $\sigma - \varepsilon$  è come in Fig. 2(b), con tensione di snervamento  $\sigma_y$ , mentre nei punti  $\mathbf{X} \in A_d$  il diagramma  $p - g$  è come in Fig. 2(c). L'interfaccia ha una tensione di (prima) decoesione  $p_d > \sigma_y$ , ed una curva  $p - g$  discendente che intercetta l'asse  $g$  nel punto  $g_{cr} = \delta_c$ . Il criterio di decoesione è  $\phi = |p| - Y - p \leq 0$ , e quindi  $-Y > 0$  è la riduzione del limite di decoesione al crescere di  $g$ . In fase di carico, lo stato di tensione in un elemento di volume intersecato da  $A_d$ , Fig. 2(a), evolve con  $\sigma$  crescente dal punto  $O$  fino a un punto dove  $\sigma = \sigma_d = p_d$ , in corrispondenza del quale nell'elemento di interfaccia incluso nell'elemento di volume considerato ha inizio la decoesione  $g$ , ed al crescere di questa  $p$  decade fino ad annullarsi (punto  $C$ ), mentre il materiale circostante si scarica elasticamente.

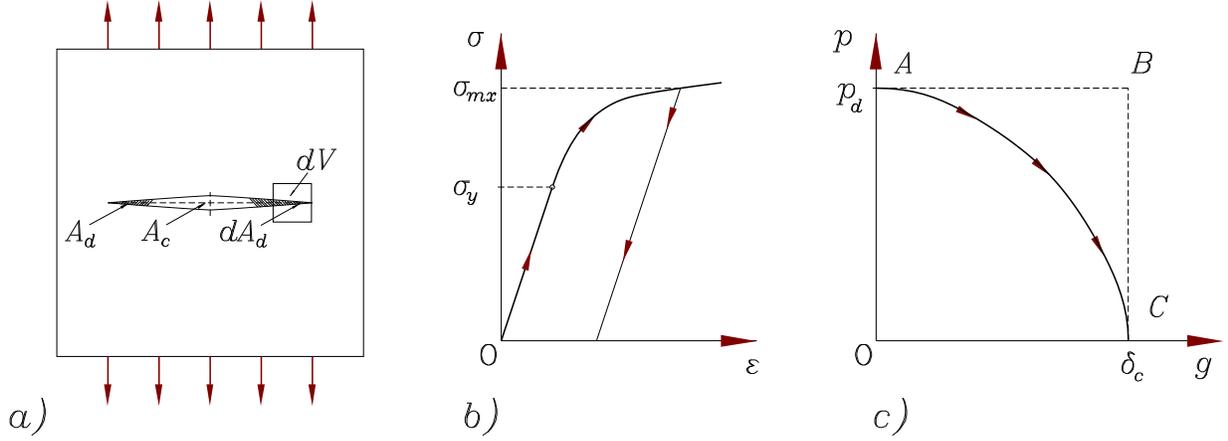


Fig. 2. Solido in stato di tensione monoassiale con frattura: a) elemento di volume  $dV$  intersecato dall'interfaccia di decoesione; b) Diagramma  $\sigma - \varepsilon$  del materiale; c) Diagramma  $p - g$  dell'interfaccia decoesiva.

## 5. Energia di frattura

In un punto  $\mathbf{X}$  della zona di processo, il meccanismo decoesivo viene attivato nell'istante  $t_d(\mathbf{X})$  in cui  $\mathbf{X}$  è attraversato dal fronte della decoesione,  $L_d$ , e si esaurisce nell'istante  $t_f(\mathbf{X})$  in cui  $\mathbf{X}$  è attraversato dal fronte della frattura,  $L_f$ . Ovviamente,  $t_f(\mathbf{X}) > t_d(\mathbf{X})$ , (tranne nel caso limite di frattura fragile, in cui  $t_d(\mathbf{X}) = t_f(\mathbf{X})$  e  $A_d$  infinitamente piccola attorno a  $L_f$ ). L'energia dissipata in  $\mathbf{X}$  è:

$$\Gamma = \int_{t_d(\mathbf{X})}^{t_f(\mathbf{X})} (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{g}} - Y \dot{\gamma}) d\tau = \Gamma_{ext} + \Gamma_{in}, \quad (13)$$

in cui si è posto

$$\Gamma_{ext} = \int_{t_d(\mathbf{X})}^{t_f(\mathbf{X})} \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{g}} d\tau, \quad \Gamma_{in} = - \int_{t_d(\mathbf{X})}^{t_f(\mathbf{X})} \dot{\psi}^* d\tau. \quad (14)$$

Con riferimento al caso di Fig. 2(c),  $\Gamma$  coincide con l'area del rettangolo  $OABC$ , cioè  $\Gamma = p_d \delta_c$ ;  $\Gamma_{ext}$  è l'area sottesa dalla curva  $p - g$ , mentre  $\Gamma_{in}$  è l'area della parte di rettangolo  $OABC$  sovrastante la curva  $p - g$ .  $\Gamma$  è somma di due contributi: il lavoro meccanico speso dalla trazione,  $\Gamma_{ext}$ , e l'energia rilasciata dalla microstruttura nella fase di decoesione,  $\Gamma_{in}$ . Per materiale omogeneo, le suddette tre grandezze,  $\Gamma, \Gamma_{in}, \Gamma_c = \Gamma - \Gamma_{in}$ , sono delle costanti del materiale.  $\Gamma_c$  corrisponde all'*energia di frattura* di Griffith; essa infatti è l'energia che per unità di superficie fratturata deve essere impartita a spese del lavoro meccanico compiuto dalla trazione,  $\Gamma_{ext}$ , o energia rilasciata dal solido elasticamente deformato.  $\Gamma_{in}$  è l'energia resa disponibile dalla microstruttura del materiale attraverso i meccanismi decoesivi, e tale energia si somma al lavoro meccanico della trazione onde garantire il livello di dissipazione,  $\Gamma$ , richiesto per la formazione della frattura.

## 6. Stabilità della frattura

Seguendo Bažant [2], si formula un criterio di stabilità della frattura basato sul secondo principio della termodinamica. A tale scopo, si considera il sistema nello stato equilibrato al tempo  $t$  e —mantenendo fissi tutti carichi applicati— si impongono degli avanzamenti virtuali,  $\delta \mathbf{x}$ , dei punti  $\mathbf{x}$  del fronte della frattura, del tipo  $\delta \mathbf{x} = \dot{\mathbf{x}} \Delta t$ , e si effettua una analisi *incrementale* (i.e. tipo 'rate'), ottenendo le risposte  $\delta \mathbf{u}, \delta \boldsymbol{\sigma}, \delta \boldsymbol{\varepsilon}^p, \dots$  da considerare ciascuna come un funzionale dei punti  $\mathbf{x} \in L_f(t)$ . La frattura è *stabile* se l'incremento di entropia del sistema,  $\Delta \mathcal{E}$ , risulta negativa per qualunque modo di avanzamento virtuale del fronte della frattura. Poiché dalla (2) è:

$$T\mathcal{E} = -(\Pi + \Phi) \quad \forall t \geq 0 \quad (15)$$

dove

$$\Pi = \int_{V_c} \psi_e dV - W \quad (\text{energia potenziale totale}) \quad (16)$$

$$\Phi = \int_{V_c} \psi_{in}(\boldsymbol{\xi}) dV + \int_{A_F} \psi_{in}^*(\gamma) dA \quad (\text{energia libera interna totale}) \quad (17)$$

e poiché inoltre è  $\Delta \mathcal{E} \simeq \delta \mathcal{E} + \delta^2 \mathcal{E}$ , deve aversi:

$$T\delta \mathcal{E} = \int_{L_f} (\mathbf{G} - \mathbf{R}) \cdot \delta \mathbf{x} dL(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (18)$$

dove si è posto, per ogni punto  $\mathbf{x} \in L_f$ ,

$$\mathbf{G} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{x}} \quad (\text{Forza attiva di frattura}) \quad (19)$$

$$\mathbf{R} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \quad (\text{Resistenza alla frattura}). \quad (20)$$

Dovendo la (18) valere per qualunque  $\delta \mathbf{x} = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}) \delta m(\mathbf{x}), \delta m(\mathbf{x}) \geq 0 \in L_f$ , risulta

$$G_\mu - R_\mu \leq 0 \quad \text{in } L_f \quad (21)$$

dove  $G_\mu = \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\mu}, R_\mu = \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\mu}$ .

Se la (21) è verificata come uguaglianza in una parte  $L'_f$  del fronte della frattura e come disequaglianza stretta nella rimanente parte, la variazione seconda  $\delta^2 \mathcal{E}$  deve soddisfare:

$$-T\delta^2 \mathcal{E} = \int_{L'_f} \int_{L'_f} \delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \cdot \delta \mathbf{x}' dL(\mathbf{x}') dL(\mathbf{x}) > 0, \quad (22)$$

dove  $\mathbf{M}$  è una matrice simmetrica definita da:

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{\partial^2 (\Phi + \Pi)}{\partial \mathbf{x} \otimes \partial \mathbf{x}'}. \quad (23)$$

Per via della (22),  $\mathbf{M}$  deve essere *definita positiva* in  $L'_f$  affinché la frattura sia stabile. Se poi è  $|\mathbf{M}| = 0$ , la frattura è in uno stato *critico* (stabile o meno a seconda delle variazioni di ordine superiore  $\delta^3\mathcal{E}, \delta^4\mathcal{E}, \dots$ ), con possibilità di biforcazione.

La (21) rappresenta una generalizzazione del classico criterio di stabilità di Griffith. Come si vede, esso da solo è insufficiente per definire compiutamente il criterio di stabilità e deve a tale scopo essere integrato dalla condizione di positività della matrice  $\mathbf{M}$  in quelle parti del fronte della feattura dove  $\mathbf{G} = \mathbf{R}$ . Si può altresì dimostrare che la (18) implica anche un criterio di stabilità del tipo  $\phi(\mathbf{p}, Y) < 0$  in  $A_d$ , ma questo punto viene tracciato per brevità.

## 7. Conclusione

In questa nota sono stati brevemente e sinteticamente illustrati i risultati più significativi di una ricerca in corso. Gli argomenti trattati sono ancora oggetto di ulteriore studio.

## Bibliografia

- [1] Altan S.B., "*Uniqueness of the initial-value problem in nonlocal elastic solids*", Int. J. Solids Structures, **25**, 1271-1278, **1989**
- [2] Bažant Z. P., Cedolin L., *Stability of Structures*, Oxford University Press, New York, 1991.
- [3] Coleman B.D., Gurtin M., "*Thermodynamics with internal variables*", J. Chem. Phys., **47**, 597-613, **1967**
- [4] Edelen G.B.D., Law N., "*On the thermodynamics of systems with nonlocality*", Arch. Rat. Mech. Anal., **43**, 24-35, **1971**
- [5] Eftis J., Liebowitz H., "*On surface energy and the continuum thermodynamics of brittle fracture*", Engineering Fracture Mechanics, **8**, 459-485, **1976**
- [6] Eringen A.C., "*Line crack subjected to shear*", Int. J. Fracture, **14**, 367-379, **1978**
- [7] Eringen A.C., "*Line crack subjected to anti-plane shear*", Engineering Fracture Mechanics, **12**, 211-219, **1979**
- [8] Eringen A.C., Kim B.S., "*Stress concentration at the tip of a crack*", Mech. Res. Comm., **1**, 233-237, **1974**
- [10] Kröner E., "*Elasticity theory of materials with long range cohesive forces*", Int. J. Solids Structures, **3**, 731-742, **1967**
- [11] Polizzotto C., "*Nonlocal elasticity and related variational principles*", Int. J. Solids Structures (submitted 1999)
- [12] Zhang C., Karihaloo B.L., "*A thermodynamic framework of fracture mechanics*", Engineering Fracture Mechanics, **46**, 1023-1030, **1993**
- [13] Zhou Z.-G., Han J.-C., Du S.-Y., "*Investigation of a Griffith crack subjected to anti-plane shear by using the nonlocal theory*", Int. J. Solids Structures, **36**, 3891-3901, **1999**