

MODELLAZIONE PROBABILISTICA DEL PROCESSO DI ACCRESCIMENTO DELLA FRATTURA IN UNA LEGA **Ti-15V-3Al-3Cr-3Sn** DI TITANIO.

G. Allegri, S. Corradi, M. Marchetti

Dipartimento Aerospaziale, Università "La Sapienza", Via Eudossiana 18, 00184 Roma

e-mail marchett@aerorisc.ing.uniroma1.it

Abstract.

*A simple probabilistic model of fatigue crack growth, caused by deterministic loads, denoted as VFT, has been here developed: this approach allows to obtain the probability of samples breakage as a function of time by a direct analysis of virtual generated data. VFT model has been compared with two classical approaches found in literature: the first, developed by Spencer, Enneking and Tang (1990), is based on the randomization of a semi-empirical fatigue law by a gaussian white noise: the probability of sample breakage is thus obtained in the frame of Itô equations and Markovian diffusion theories. The second model, developed by Ray and Tangirala (1997), is hinged on a discrete time representation of the autocorrelation function of fatigue crack length. Comparison with fatigue tests has been performed on CT samples made by Titanium **Ti-15V-3Al-3Cr-3Sn** Alloy.*

Sommario.

*Un semplice modello puramente probabilistico di propagazione della cricca in materiali isotropi e sotto l'azione di carichi di frequenza, stress-ratio ed ampiezza costanti, denominato VFT, viene proposto nel presente lavoro: questo approccio consente di determinare la distribuzione statistica dei tempi di rottura dei campioni di materiale mediante una analisi diretta dei dati ottenuti dalla simulazione numerica. Il modello VFT è stato messo a confronto con due approcci presenti in letteratura: il primo, sviluppato da Spencer, Enneking e Tang (1990), è basato sulla randomizzazione di una legge semi-empirica di fatica a mezzo di un rumore bianco gaussiano di opportuna intensità. La probabilità di rottura di un generico campione di materiale è così ottenuta ricorrendo alla teoria delle equazioni differenziali stocastiche alla Itô e dei processi diffusivi di Markov. Il secondo modello, proposto da Ray e Tangirala (1997), è basato su una rappresentazione discretizzata della funzione di autocorrelazione del processo di accrescimento della cricca. Sono stati eseguiti test di fatica su provini CT realizzati con la lega **Ti-15V-3Al-3Cr-3Sn**: i dati sperimentali sono stati messi a confronto con le previsioni numeriche ottenute dai modelli elencati in precedenza.*

Simbologia:

- γ : generico evento random;
- t: tempo;
- T: tempo medio di vita del campione;
- V: varianza del tempo di vita del campione;
- a: lunghezza della cricca;
- a_0 : lunghezza iniziale della cricca;
- a^* : lunghezza della cricca per propagazione instabile;
- A: lunghezza della cricca come processo stocastico;
- G: legge deterministica semi-empirica di fatica;
- E: valore atteso;
- P: probabilità

1. Introduzione.

Il processo di propagazione della cricca ha natura aleatoria a causa della massiccia presenza nei materiali di difetti quali inclusioni, porosità e disomogeneità, che contribuiscono ad alterarne le caratteristiche meccaniche su scala mesoscopica: poiché la distribuzione dei difetti citati è fortemente aleatoria, la descrizione del fenomeno di accrescimento della frattura può essere eseguita vantaggiosamente ricorrendo ad approcci di tipo probabilistico.

Una grave limitazione allo sviluppo di modelli stocastici di propagazione della cricca consiste nella scarsità di dati sperimentali, dovuta essenzialmente all'elevato numero di test di laboratorio che è necessario eseguire per poter ottenere statistiche attendibili. In questo articolo si prendono come confronto due modelli che hanno già avuto una validazione sperimentale mediante dati relativi a prove di fatica condotte su leghe leggere di Alluminio [1], [2].

Il primo modello, dovuto a Spencer, Enneking e Tang (1990), è basato su una randomizzazione delle equazioni semi-empiriche che vengono comunemente impiegate nell'analisi deterministica della durata della vita a fatica (legge di Paris, legge di Forman, ecc.).

Il secondo modello, sviluppato da Ray e Tangirala (1997), è fondato su un'operazione di inferenza statistica concernente le proprietà della distribuzione della lunghezza della cricca in funzione del tempo: questo approccio è concettualmente molto distante dal precedente, in quanto nella sua formulazione si prescinde completamente dall'introdurre considerazioni di Meccanica della Frattura. Questo modo di procedere, comune nella modellistica stocastica, rende problematica la corretta interpretazione della fisica del fenomeno.

Il terzo modello, VFT("Virtual Fatigue Tests") viene proposto dagli autori del presente lavoro: si tratta di un semplice approccio puramente probabilistico di accrescimento della cricca, che viene introdotto allo scopo di verificare la possibilità di sviluppare statistiche attendibili del processo stocastico in esame a partire da un insieme di dati sperimentali relativamente limitato.

2. Modelli probabilistici di accrescimento della cricca.

2.1 Il modello di Spencer, Enneking e Tang.

Il modello di Spencer, Enneking e Tang, (SET 1990) [3] [4] [5], è basato sull'ipotesi che la velocità di avanzamento della cricca sia rappresentabile mediante un processo stocastico stazionario a distribuzione lognormale: il primo momento statistico di tale funzione random restituisce l'andamento medio della velocità di accrescimento della frattura in funzione del fattore di intensificazione degli sforzi (SIF). Assumendo di condurre test sperimentali con un carico ciclico di ampiezza, stress-ratio e frequenza costanti, la dipendenza dal SIF può essere immediatamente espressa in relazione al numero di cicli di sollecitazioni imposti, ovvero al tempo. L'ipotesi di lognormalità della velocità di avanzamento della cricca permette di riformulare le consuete leggi semi-empiriche di fatica nell'ambito di un sistema di equazioni differenziali random alla Itô, la cui soluzione è rappresentata da un processo stocastico Markoviano. Pertanto il tempo medio di vita di un generico campione di materiale che presenti una cricca e la relativa deviazione standard saranno governati dalle equazioni di Pontryagin-Vitt

$$\begin{cases} G[a_0, \Delta K(a_0)] e^{z_0} \frac{\partial T}{\partial a_0} - \mathbf{x} z_0 \frac{\partial T}{\partial z_0} + D \frac{\partial^2 T}{\partial z_0^2} + 1 = 0 \\ G[a_0, \Delta K(a_0)] e^{z_0} \frac{\partial V}{\partial a_0} - \mathbf{x} z_0 \frac{\partial V}{\partial z_0} + D \frac{\partial^2 V}{\partial z_0^2} + 2D \left(\frac{\partial T}{\partial z_0} \right) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

dove ξ e D sono legati alla deviazione standard σ_z della variabile normale z_0 dalla relazione

$$\mathbf{s}_z^2 = \frac{D}{\mathbf{x}} \quad (2)$$

In linea di principio la determinazione dei primi due momenti del tempo random di vita di un campione di materiale difettato non permette di determinarne in modo univoco la probabilità di rottura in funzione del numero di cicli di sollecitazione imposti: tuttavia Kozin e Bogdanoff [6] hanno dimostrato che la distribuzione del tempo random di vita di un componente che presenti una cricca macroscopica, ovvero la probabilità che il difetto in esso presente raggiunga una dimensione critica, è esprimibile mediante la legge di Gumbel [7]

$$F_{T^*}(t) = P[A(t) > a^* | A(0) = a_0] = e^{-e^{a(t-u)}} \quad (3)$$

dove

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{p}}{\sqrt{6V(a_0)}}, \quad u = T(a_0) - \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{a}} \quad (4)$$

con $\delta = 0.5772$.

Sperimentalmente si è osservato che la legge di Gumbel è valida anche per valori della lunghezza della cricca inferiori a quello di propagazione instabile a^* : la (3) può quindi considerarsi rappresentativa della probabilità di raggiungimento da parte della frattura di una arbitraria lunghezza a' , purché risulti ovviamente $a' \leq a^*$.

2.2 Il modello di Ray e Tangirala.

Il modello di Ray e Tangirala, (RT 1997). [8], è basato sull'assunzione che la lunghezza della cricca sia descrivibile in termini di un processo stocastico lognormale: nell'approccio SET, invece, tale ipotesi è stata introdotta per la velocità di avanzamento della frattura.

Nel modello RT si assume che sia noto il valore medio della lunghezza della cricca in funzione del tempo: tale funzione può essere ricavata, ad esempio, per integrazione delle leggi semi-empiriche di fatica cui si è fatto riferimento nel precedente paragrafo.

La funzione di densità di probabilità di lunghezza della cricca in funzione del tempo nel modello RT è data quindi dalla

$$f_A(a, \mathbf{t}) = P[A(\mathbf{t}) = a, \mathbf{t}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi Q a \mathbf{t}}} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{\log \left[\frac{a}{E[A(\mathbf{t})]} \right]}{\sqrt{Q \mathbf{t}}} \right]^2} \quad (5)$$

nella quale la deviazione standard del processo di crescita della frattura è espressa dal prodotto

$$\mathbf{s} = \sqrt{Q \mathbf{t}} \quad (6)$$

dove τ è una variabile temporale adimensionale definita dalla

$$\mathbf{t} := \log \left\{ \frac{E[A(\mathbf{g}, \mathbf{t})]}{E[A(\mathbf{g}, 0)]} \right\} \quad (7)$$

Nel modello RT, quindi, il parametro Q sintetizza la dipendenza della deviazione standard dal tempo: esso è ottenuto linearizzando l' autovettore corrispondente all' autovalore dominante della matrice di covarianza del processo stocastico

$$Z(\mathbf{g}, \mathbf{t}) = \log \left\{ \frac{A(\mathbf{g}, \mathbf{t})}{E[A(\mathbf{g}, \mathbf{t})]} \right\} - E \left\{ \log \left\{ \frac{A(\mathbf{g}, \mathbf{t})}{E[A(\mathbf{g}, \mathbf{t})]} \right\} \right\} \quad (8)$$

univocamente associato a quello rappresentativo della lunghezza della cricca.

Dalla relazione (5) è immediato osservare che la probabilità di rottura di un generico campione di materiale è esprimibile mediante la relazione seguente

$$F_{T^*}(\mathbf{t}) = P[A(\mathbf{t}) > a' | A(0) = a_0] = 1 - \int_{a_0}^{a'} f_A(\mathbf{a}, \mathbf{t}) d\mathbf{a} \quad (9)$$

2.3 Il modello VFT (Virtual Fatigue Tests).

Il modello proposto è basato su una generazione di curve virtuali di accrescimento della cricca, ottenuta formulando delle particolari ipotesi riguardo la distribuzione statistica della velocità di avanzamento della frattura nei materiali.

Il più significativo vantaggio presentato da questo approccio consiste nella possibilità di ridurre drasticamente il numero di prove sperimentali richieste per poter determinare le proprietà statistiche del processo di propagazione della frattura in materiali isotropi.

Considerando test di fatica realizzati con un carico periodico, si definisce “tasso di crescita della cricca” il rapporto $\Delta A(\gamma, N_1, N_2) / A(\gamma, N_1)$, dove $\Delta A = A(\gamma, N_2) - A(\gamma, N_1)$ è l’incremento di lunghezza della cricca realizzatosi dall’istante N_1 all’istante N_2 . L’analisi dei valori del tasso di crescita della cricca ottenuti sperimentalmente ha suggerito due osservazioni fondamentali: in primo luogo i valori minimi e massimi del $\Delta A(\gamma, N_1, N_2) / A(\gamma, N_1)$, a parità di condizioni di prova e configurazione geometrica, sono molto prossimi per diversi campioni del medesimo materiale. In secondo luogo, il tasso di crescita della cricca risulta essere costante a tratti: infatti ad ogni sua variazione segue una fase di assestamento, in cui il $\Delta A(\gamma, N_1, N_2) / A(\gamma, N_1)$ si mantiene praticamente costante e la cui durata è aleatoria: gli intervalli di tempo in cui il tasso di crescita della cricca è costante saranno d’ora in avanti indicati con la dicitura “periodi di assestamento”. Sperimentalmente si è osservato anche che i valori minimo e massimo dei periodi di assestamento sono praticamente uguali per i vari campioni di materiale testati.

Si supponga allora di introdurre il processo stocastico ergodico $\Theta[\gamma, N, \Delta N(\gamma)]$, definito dalla

$$\Theta[\mathbf{g}, N, \Delta N(\mathbf{g})] := \frac{\Delta A[\mathbf{g}, N, \Delta N(\mathbf{g})]}{A(\mathbf{g}, N)} \quad (10)$$

dove $\Delta N(\gamma)$ è un processo stocastico ergodico la cui natura sarà discussa in seguito. Conseguentemente alle osservazioni sperimentali riportate, si assume che il processo stocastico $\Theta[\gamma, N, \Delta N(\gamma)]$ abbia le seguenti proprietà:

$$\Theta[\mathbf{g}, N, \Delta N(\mathbf{g})] = \begin{cases} = \frac{\Delta A(\mathbf{g}, N_1, 0)}{A(\mathbf{g}, N_1)}, N_1 \leq N < N_1 + \Delta N \\ = 0, N < N_1, N > N_1 + \Delta N \end{cases} \quad (11)$$

dove N_1 rappresenta un istante generico. Si ipotizza inoltre che $\Delta A(\gamma, N, 0) / A(\gamma, N)$ abbia distribuzione lognormale: di conseguenza, in base alla (11), anche $\Theta[\gamma, N, 0]$ risulterà un processo stocastico a distribuzione lognormale, ovvero la cui densità di probabilità sarà data dalla:

$$f_{\Theta}(\mathbf{q}, N) = \frac{1}{z\mathbf{q}\sqrt{2p}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log \mathbf{q} - l}{z}\right)^2} \quad (12)$$

dove λ e ζ sono rispettivamente media e varianza del processo stocastico ergodico normale $\log\{\Theta[\gamma, N, \Delta N(\gamma)]\}$. Se $\chi(\gamma)$ è una variabile random gaussiana a media nulla e varianza unitaria, la $\Theta[\gamma, N, 0]$ è ad essa legata dalla relazione

$$\Theta(\mathbf{g}, N, 0) = e^{l + z c(\mathbf{g})} \quad (13)$$

Come ultima ipotesi si assume che la durata $\Delta N(\gamma)$ dei “periodi di assestamento” sia un processo stocastico ergodico con distribuzione uniforme fra i valori minimo e massimo registrati sperimentalmente. Indicando con $\xi(\gamma)$ una variabile random uniformemente distribuita nell’intervallo $[0, 1]$, la durata random $\Delta N(\gamma)$ del periodo di assestamento potrà essere espressa come:

$$\Delta N(\mathbf{g}) = \mathbf{t}_1 + (\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_1)\mathbf{x}(\mathbf{g}) \quad (14)$$

dove τ_1 e τ_2 sono rispettivamente il valore minimo e quello massimo della durata dei periodi di assestamento, dedotti dai dati sperimentali.

L’obiettivo del modello VFT è, come già sottolineato in precedenza, quello di ridurre drasticamente il numero di test sperimentali di fatica necessari a determinare le proprietà statistiche del processo di accrescimento della cricca: in questa logica la supposta ergodicità dei processi stocastici di cui si è fatta menzione comporta che la stima dei parametri introdotti nel modello possa essere fatta analizzando una singola prova e non l’intero insieme di test. Pertanto i quattro parametri introdotti λ , ζ , τ_1 e τ_2 potranno essere ottenuti dalle:

$$\begin{cases} \mathbf{I} = E[Z^{(k)}(\mathbf{g})] \\ \mathbf{z} = E\{[Z^{(k)}(\mathbf{g}) - \mathbf{I}]^2\} \\ \mathbf{t}_1 = \min(\mathbf{t}^{(k)}) \\ \mathbf{t}_2 = \max(\mathbf{t}^{(k)}) \end{cases} \quad (15)$$

dove k indica il k – esimo test sperimentale.

Una volta dedotti i valori dei parametri presenti nel modello dai dati sperimentali mediante le relazioni (15), si può procedere alla generazione di curve simulate di fatica, che rappresentano l’andamento della lunghezza della frattura $A(\gamma, N)$ in funzione del numero di cicli di sollecitazione N. Infatti le relazioni (13) e (14) permettono di esprimere i processi stocastici $\Delta N(\gamma)$ e $\Theta[\gamma, N, \Delta N(\gamma)]$ tramite semplici trasformazioni di una variabile random uniforme nell’intervallo $[0, 1]$ e di una variabile aleatoria gaussiana con media nulla e varianza unitaria.

3. Test e risultati sperimentali di fatica sulla lega Ti-15V-3Al-3Cr-3Sn.

La validazione dei modelli di accrescimento della frattura esaminati in precedenza è stata condotta mediante 24 prove sperimentali condotte sulla lega Ti-15V-3Al-3Cr-3Sn, ricotta a 800°C per 10 minuti e raffreddata in aria. I provini impiegati sono stati del tipo CT (UNI-7969), con dimensioni caratteristiche $W=40\text{mm}$, $B=20\text{mm}$. La lunghezza dell’intaglio praticato nei provini è stata di 6.5 mm, ovvero $a / W = 0.1625$. La lunghezza della frattura corrispondente alla condizione di propagazione instabile è stata sperimentalmente valutata in 16 mm.

I campioni di materiale sono stati sottoposti a test di fatica con carico sinusoidale compreso fra i 250 KN ed i 500 KN ($R=0.5$), con frequenza di 10 Hz ed alla temperatura di laboratorio di 24°C. Una delle ipotesi alla base dello sviluppo del modello SET è che la variabile random z_0 sia stazionaria o almeno debolmente tale. L’analisi dei dati sperimentali ha però evidenziato che tale assunzione non è verificata per la lega del Titanio presa in considerazione nel presente lavoro: la deviazione standard espressa dalla relazione (2) va infatti soggetta a variazioni molto marcate in relazione al numero di cicli di carico applicati, pari al 50% del suo valore medio, dimostrando peraltro una dinamica fortemente aleatoria. La validazione del

modello SET è stata comunque condotta impiegando nella (2) il valore medio della σ_z , ottenuto dai dati sperimentali: come risultato si è avuto un errore del 100% sia per quanto concerne la stima del tempo medio di vita del campione, sia per quanto riguarda la deviazione standard del medesimo. D'altra parte errori sensibili nelle previsioni del modello SET sono stati osservati anche per test di fatica su provini intagliati in lega leggera di Alluminio [8]: tali discrepanze sono state attribuite proprio alla non stazionarietà del processo di crescita della cricca, che nei casi menzionati, tuttavia, appariva essere meno evidente rispetto a quanto osservato per la lega del Titanio qui in esame. Risulta comunque di estremo interesse notare che, come evidenziato dalle fig. 1 e 2, la curva di distribuzione di Gumbel, tracciata utilizzando i dati sperimentali per il calcolo dei coefficienti (4), dà comunque una soddisfacente approssimazione della probabilità reale di raggiungimento di una assegnata dimensione della cricca.

La curva di probabilità risultante dall'impiego del modello RT è in ottimo accordo con quella rappresentante il fitting dei dati sperimentali ottenuto con la legge di Gumbel: tenuto conto del fatto che l'approccio RT è basato sull'impiego di una considerevole mole di informazioni statistiche concernenti l'accrescimento della frattura (la matrice di covarianza associata all'intero insieme di prove sperimentali), il risultato non sorprende.

Le distribuzioni riportate in fig. 1 e 2 ed ottenute mediante il modello VFT, rappresentano una media dei risultati relativi ad un insieme di simulazioni del processo di accrescimento della frattura: ogni simulazione è stata condotta stimando i parametri (15) mediante una realizzazione sperimentale scelta ad arbitrio fra i 24 test eseguiti, avendo assunto che ciascuno di questi ultimi avesse la medesima probabilità di realizzarsi. Le previsioni del modello VFT appaiono mediamente meno accurate di quelle ottenute sia con l'applicazione della legge di Gumbel, sia sfruttando l'approccio RT: si può tuttavia osservare che l'accordo con la distribuzione reale è molto soddisfacente per probabilità di rottura inferiori al 70% nel caso di $a'=9\text{mm}$. Nel caso di $a'=11\text{mm}$ il modello VFT conduce ad una lieve sovrastima dei tempi di raggiungimento della dimensione assegnata, che peraltro si riduce per alti valori della probabilità.

L'aspetto cruciale che è necessario focalizzare nell'analisi dei risultati è che il modello VFT fornisce comunque delle stime accettabili della durata del processo di accrescimento della frattura a partire da un insieme di dati sperimentali estremamente ridotto rispetto a quello richiesto sia dal modello SET, sia da quello RT: quindi distribuzioni sufficientemente approssimate dei tempi di vita dei provini potrebbero essere ottenute con il modello VFT anche a partire da un solo test sperimentale.

4. Conclusioni.

Nel presente articolo è stato proposto un semplice approccio probabilistico per la descrizione della propagazione della cricca sotto l'azione di carichi deterministici, denominato VFT. A titolo di confronto sono stati presi in esame anche due modelli presenti in letteratura, ovvero quello SET e quello RT. Sono state eseguite prove di fatica su provini CT realizzati in lega Ti-15V-3Al-3Cr-3Sn ed i risultati sperimentali sono stati confrontati con le previsioni numeriche ottenute impiegando i tre modelli in esame, evidenziando che:

1. il modello SET è inadatto alla descrizione del processo di accrescimento della frattura nel materiale considerato, poiché tale fenomeno ha natura non stazionaria;
2. il modello RT si è rivelato un soddisfacente strumento di analisi, le cui previsioni sono in accordo soddisfacente con quanto sperimentalmente osservato: tale approccio

richiede, tuttavia, di disporre di un consistente numero di prove sperimentali, su cui è necessario poi eseguire una dettagliata analisi statistica;

3. il modello VFT risulta essere sensibilmente meno accurato del modello RT, ma permette di individuare le caratteristiche statistiche salienti del processo di propagazione della cricca a partire da un ristretto numero di prove sperimentali.

5. Bibliografia

- [1] D.A. Virkler, B. M. Hillberry, P. K. Goel “On the Statistical Nature of Fatigue Crack Propagation”, *Journal of Engineering Materials and Technology*, ASME 101, 148 – 153 (1979).
- [2] H. Ghonem, S. Dore “Experimental Study of the Constant Probability Crack Growth Curves under Constant Amplitude Loading”, *Engineering Fracture Mechanics*, 27 (1), 272 – 291 (1989).
- [3] B.F. Spencer, J. Tang, “A Markov Process Model for Fatigue Crack Growth”, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE 114 (12), 2134 – 2157 (1989).
- [4] B.F. Spencer, J. Tang, M.E. Artley “A Stochastic Approach to Modelling Fatigue Crack Growth”, *AIAA Journal*, 27 (11), 1628 – 1635 (1989).
- [5] J. Tang, B.F. Spencer “Reliability Solutions for the Stochastic Fatigue Crack Growth Model”, *Engineering Fracture Mechanics*, 34 (1), 153 – 167 (1989).
- [6] F. Kozin, J. L. Bogdanoff “Probabilistic Models of Fatigue Crack Growth: Results and Speculations”, *Nuclear Engineering and Design*, 115, 143 – 177 (1989).
- [7] E. J. Gumbel “Statistics of Extremes”, Columbia University Press, New York, 1958.
- [8] A. Ray, S. Tangirala “A Nonlinear Stochastic Model for Fatigue Crack Growth”, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 12 No. 1 January 1997, Elsevier.

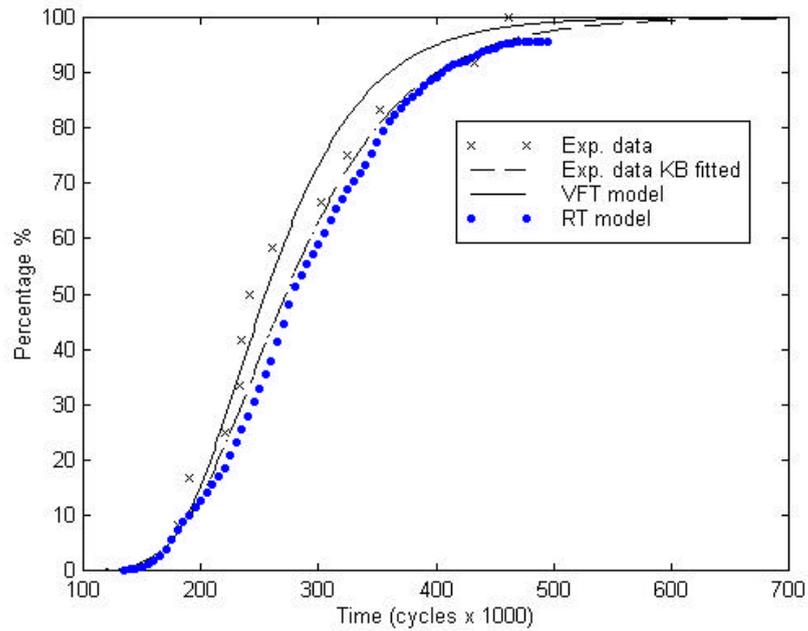


Fig. 1
 Confronto fra dati sperimentali e risultati numerici per $a' = 9\text{mm}$.
 Probabilità di rottura del provino in ordinata.

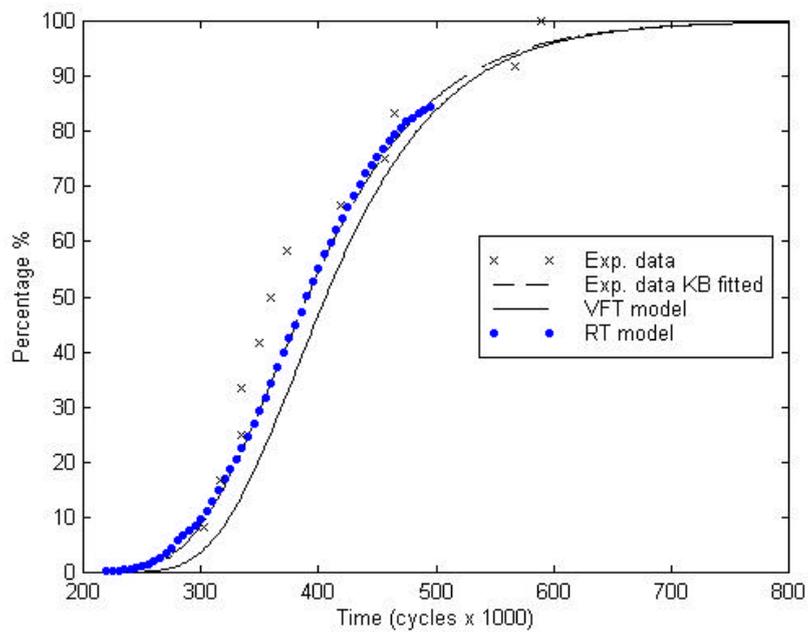


Fig. 2
 Confronto fra dati sperimentali e risultati numerici per $a' = 11\text{mm}$.
 Probabilità di rottura del provino in ordinata.

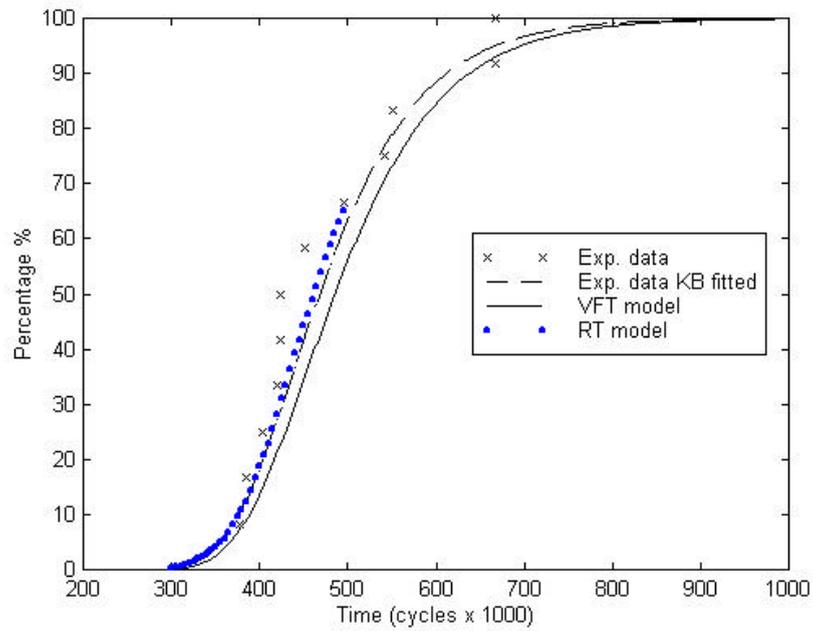


Fig. 3

Confronto fra dati sperimentali e risultati numerici per $a' = 13\text{mm}$.
 Probabilità di rottura del provino in ordinata.