

# EVOLUZIONE DEL QUADRO FESSURATIVO IN ELEMENTI TESI DI CALCESTRUZZO ARMATO IN REGIME DI TRAZIONE SEMPLICE

**Alessandro Pasquale Fantilli, Paolo Vallini**

*Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica, Politecnico di Torino  
Corso Duca degli Abruzzi, 24 -10129 Torino  
Fantilli@polito.it - Vallini@athena.polito.it*

## **Sommario**

Il fenomeno di aderenza tra le barre d'armatura ed il conglomerato teso, unitamente al meccanismo di frattura del calcestruzzo, condizionano la deformabilità delle strutture in c.a., la quale, in un primo approccio al problema, può essere valutata negli elementi semplicemente tesi. In modo particolare, lo studio è rivolto ad un concio compreso tra due fessure, ambito nel quale è possibile valutare l'evoluzione dello stato di sforzo anche in conseguenza di una eventuale richiusura delle fessure e dell'inversione degli scorrimenti tra acciaio e calcestruzzo. Inoltre, l'analisi del concio si dimostra utile strumento per lo studio degli elementi tesi in calcestruzzo armato nella fase di esercizio, situazione che si accompagna ad un complesso ed aleatorio quadro fessurativo. In ogni caso, la deformabilità, espressa dal legame tra lo sforzo normale  $N$  e la deformazione media  $\epsilon_{sm}$  della barra d'armatura, risulta compresa entro un dominio definito con il modello proposto. La stima dello stato di tensione nel singolo concio e nell'intero elemento, si mostra in buon accordo con i risultati sperimentali.

## **Abstract**

*A numerical model is proposed to study the cracking phenomenon of R/C tension members by means of nonlinear fracture mechanics of concrete and bond behaviour between steel and concrete. In particular, the stress distribution is evaluated in a block between two subsequent cracks, taking into account the partial unloading due to the creation of new cracks. A good agreement between the computed reinforcement stresses and the experimental ones is obtained. Through the block analysis, it is also possible to define, for a given value of the normal force  $N$ , both the higher and the lower values of mean steel strain  $\epsilon_{sm}$  within the whole element.*

## 1. Introduzione

La presenza di fessure nelle strutture in c.a. non è generalmente indice di pericolo di collasso, anche se la fessurazione può limitare pesantemente la funzionalità dell'opera. Fessure molto ampie, infatti, oltre a determinare un incremento della deformabilità, permettono all'acqua e alle sostanze aggressive di penetrare e corrodere le armature, compromettendo l'integrità del manufatto le sue prestazioni nel tempo. Per questo motivo, la prevenzione ed il controllo del quadro fessurativo sono considerate, fin dalla seconda metà del secolo scorso, esigenze di primaria importanza per la durabilità delle strutture in conglomerato armato. Allo stesso periodo risalgono le prime indagini sperimentali, rivolte alla valutazione degli effetti prodotti dal quadro fessurativo sulla deformabilità delle travi [1]. Nel caso degli elementi inflessi, tuttavia, la definizione analitica della distanza e dell'ampiezza delle fessure apparve, fin dall'inizio, particolarmente ardua, in quanto risultarono difficilmente valutabili gli effetti prodotti dal cosiddetto "tension stiffening". Per superare tali difficoltà, i primi modelli teorici vennero fondati sull'ipotesi di deformazione uniforme del calcestruzzo teso nell'intorno delle barre d'armatura. Con tale approccio la parte in trazione dell'elemento inflesso venne ridotta ad un semplice tirante [2]. Con lo studio sperimentale e teorico di questi elementi, è stato possibile analizzare in modo semplificato complessi fenomeni, quali ad esempio i meccanismi di frattura e di aderenza [3]. Pertanto, lo studio dei tiranti, ampiamente documentato in letteratura [2-7], deve essere considerato come l'inevitabile tappa dell'articolato e complesso percorso verso la conoscenza della deformabilità delle strutture in c.a. In tale ambito, tanto le indagini sperimentali [1], quanto gli studi teorici [4], hanno riguardato molto da vicino l'evoluzione del quadro fessurativo.

In una prima fase, quando l'elemento teso è soggetto ad uno sforzo normale relativamente piccolo, iniziano a svilupparsi contemporaneamente, ed indipendentemente le une dalle altre, le prime fessure. Queste fessure, cosiddette "primarie" [4], casualmente dislocate nelle zone in cui è stata superata la resistenza a trazione del conglomerato, suddividono l'intero tirante in tratti distinti. Al crescere del carico, altre fessure ("secondarie"), possono svilupparsi all'interno dei preesistenti conci. Queste lesioni appaiono in tempi diversi ed il loro sviluppo è condizionato dal quadro fessurativo primario; l'ulteriore incremento della sollecitazione, sino al collasso, non comporta generalmente la formazione di altre fessure [4]. Per un determinato livello del carico, dunque, la deformabilità dell'intero tirante risulta condizionata da quella dei conci che via via si formano, cosicché la definizione dello stato di tensione e di deformazione all'interno dei tratti così definiti, risulta di primaria importanza nella valutazione della risposta strutturale. Per questo motivo, in diverse indagini sperimentali, si sono misurate le deformazioni del calcestruzzo sulla superficie esterna di tiranti [5,6] ed in corrispondenza della zona tesa di travi inflesse [8]. Con qualche sorpresa, la sperimentazione ha evidenziato locali deformazioni di compressione, tanto da indurre Hognestad ad affermare: "*To reach a fundamental scientific understanding of the cracking phenomenon, the writer believes that the nature of these compressive strains on the concrete surface must be clarified*" [8].

Sulla base di queste osservazioni, si avanza la proposta di un modello che, tenendo conto dell'interazione tra le fessure primarie e secondarie, risulti in grado di definire il campo di incertezza della deformabilità dell'intero elemento [9].

## 2. Formulazione matematica del problema

La definizione del comportamento strutturale del tirante raffigurato in Fig. 1a, richiede il rispetto di alcune condizioni di carattere statico e geometrico. In particolare, in ciascuna sezione trasversale deve essere soddisfatta l'equazione di equilibrio:

$$\sigma_c \cdot A_c + \sigma_s \cdot A_s = N \quad (1)$$

ove  $\sigma_c$  e  $\sigma_s$  sono le tensioni nel calcestruzzo e nell'acciaio ed  $A_c$  e  $A_s$  le rispettive aree (Fig. 2b). Analoghe considerazioni devono riguardare anche l'interfaccia tra i due materiali. Infatti, per un elemento di barra d'acciaio avente lunghezza infinitesima  $dz$ , deve risultare:

$$\frac{d\sigma_s}{dz} = \frac{p_s}{A_s} \cdot \tau(s(z)) = f_1(s(z)) \quad (2)$$

ove  $p_s$  è il perimetro delle barre d'acciaio e  $\tau(s(z))$  è lo sforzo di aderenza.

Le condizioni di congruenza devono essere applicate sia nella singola sezione, dove si impone che le deformazioni di acciaio  $\varepsilon_s$  e calcestruzzo  $\varepsilon_c$  rimangano piane (Fig. 1c), sia nelle zone di interfaccia tra i due materiali. In tali zone lo scorrimento  $s(z)$  (o slip) è definito come la differenza di spostamento di due punti affacciati sulla superficie di contatto tra acciaio e calcestruzzo. Dalla derivazione di  $s(z)$  si ricava la seguente condizione di congruenza all'interfaccia:

$$\frac{ds}{dz} = \varepsilon_s(z) - \varepsilon_c(z) = f_2(z) \quad (3)$$

Per completare la formulazione del problema, alle precedenti equazioni (1-3) devono associarsi le leggi costitutive dei materiali e la relazione  $\tau$ - $s$  che intercorre tra sforzi di aderenza e scorrimenti. Per l'acciaio e per il calcestruzzo si ipotizza un comportamento lineare elastico, definito rispettivamente dai moduli  $E_s$  (Fig. 2a) ed  $E_c$  (Fig. 2b). Nel calcestruzzo, in particolare, quando lo stato di tensione supera la resistenza a trazione  $f_{ct}$  si forma una fessura, sulle cui facce, ipotizzate piane e parallele, lo stato di sforzo è calcolato con il legame di Fig. 2c, anche in presenza di una richiusura della lesione [10].

Il fenomeno di aderenza-scorrimento è modellato con il legame  $\tau$ - $s$  rappresentato in Fig. 2d; tale relazione è comprensiva dei fenomeni che si possono manifestare per effetto della fessurazione parziale (fessure che non appaiono in superficie [2,4]), delle fessure di splitting, dell'eventuale cambio di segno degli scorrimenti e dello scollamento del calcestruzzo nell'intorno di una fessura [11].

Da un punto di vista matematico, la soluzione del problema è fondata sull'integrazione numerica delle equazioni differenziali 2-3 con metodi di tipo esplicito, essendo le funzioni  $f_1$  ed  $f_2$  incognite. Ad ogni passo dell'integrazione è preferibile, tuttavia, migliorare la qualità dei risultati ottenuti con il metodo esplicito (previsore), per mezzo di una nuova integrazione di tipo implicito (correttore) [12].

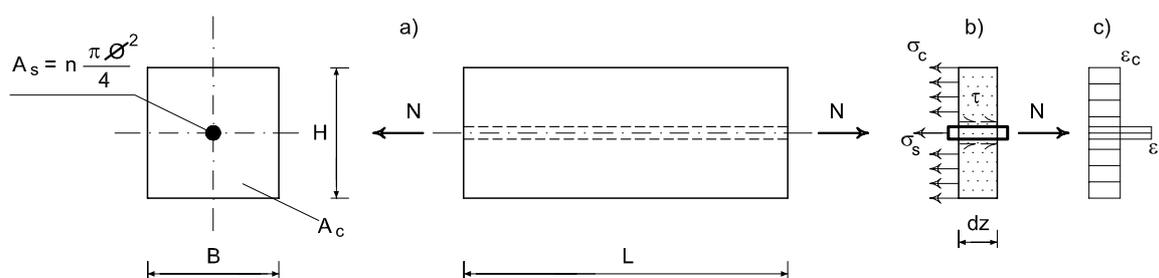


Figura 1  
L'elemento in c.a. semplicemente teso.

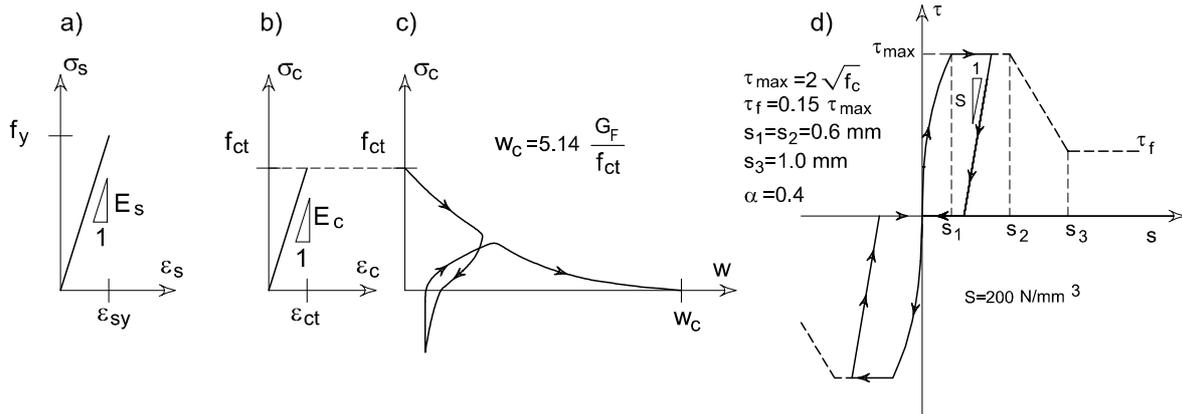


Figura 2  
I legami costitutivi adottati.

### 3. Descrizione del modello proposto

Risolvendo il problema precedentemente formulato, per un dato valore della sollecitazione esterna  $N$  e per determinate condizioni al contorno del tratto indagato, si ricava lo stato di tensione e di deformazione nei due materiali, da cui si deduce la deformabilità media  $\epsilon_{sm}$  della barra d'armatura:

$$\epsilon_{sm} = \frac{\Delta L}{L} = \int_L \epsilon_s dz \quad (4)$$

dove  $\Delta L$  rappresenta l'allungamento dell'armatura di lunghezza iniziale  $L$  (Fig. 1a). Le condizioni al contorno dell'elemento indagato, indispensabili per l'integrazione delle equazioni 2-3, cambiano con l'evoluzione del quadro fessurativo. In tiranti con debole percentuale di armatura  $\rho$  (inferiore al valore minimo  $\rho_{min}$ ), la deformazione media della barra d'acciaio  $\epsilon_{sm}$  e lo sforzo normale  $N$  sono calcolati in funzione dell'ampiezza dell'unica fessura presente [3]. La curva  $N$ - $\epsilon_{sm}$  che si ricava è raffigurata in Fig. 3d, ove è evidenziato un comportamento tipicamente fragile: una volta raggiunto il picco di sollecitazione  $N_{cr}$ , con il crescere di  $w$ , si manifesta un brusco decremento dello sforzo normale (ramo di softening), cui segue una ripresa della risposta strutturale fino allo snervamento delle armature. Negli elementi debolmente armati ( $\rho < \rho_{min}$ ), la condizione  $\sigma_s = f_y$  si realizza per uno sforzo normale  $N = N_y < N_{cr}$  (rottura fragile). In questo caso, per la valutazione dello stato di tensione e deformazione è sufficiente riferire l'analisi al concio avente, in una sezione di estremità, una fessura di ampiezza  $w$  nota (Fig. 3a). Infatti, a partire da tale sezione lo scorrimento  $s(z)$  tra i materiali si riduce progressivamente con la distanza dalla fessura, dove è presente il valore massimo pari a  $w/2$ . Nello stesso tratto lo sforzo di trazione viene progressivamente trasferito, per effetto delle tensioni di aderenza  $\tau$ , dall'acciaio al calcestruzzo. Alla distanza  $l_{tr}$  (lunghezza di trasmissione) sono ripristinate le condizioni di perfetta aderenza o di Stadio I:  $s(z) = 0$  ed  $\epsilon_s = \epsilon_c$ ; questa situazione si mantiene in tutte le sezioni ove la distanza  $z$  dalla fessura è maggiore di  $l_{tr}$ . Dal punto di vista computazionale, per un dato valore di  $w$ , il problema si risolve determinando quel valore dello sforzo normale  $N$  che, per mezzo dell'integrazione del sistema di equazioni (1-3), permette di realizzare la condizione di Stadio I nella sezione a scorrimento nullo. Questo risultato si raggiunge per approssimazioni successive nell'ambito di un processo iterativo. È bene notare che, in presenza di una sola fessura, il diagramma  $N$ - $\epsilon_{sm}$  può presentare un differente aspetto a seconda dell'ampiezza del campo di integrazione  $L$  nell'equazione (4). Per valori elevati di  $L$  si può addirittura riscontrare un

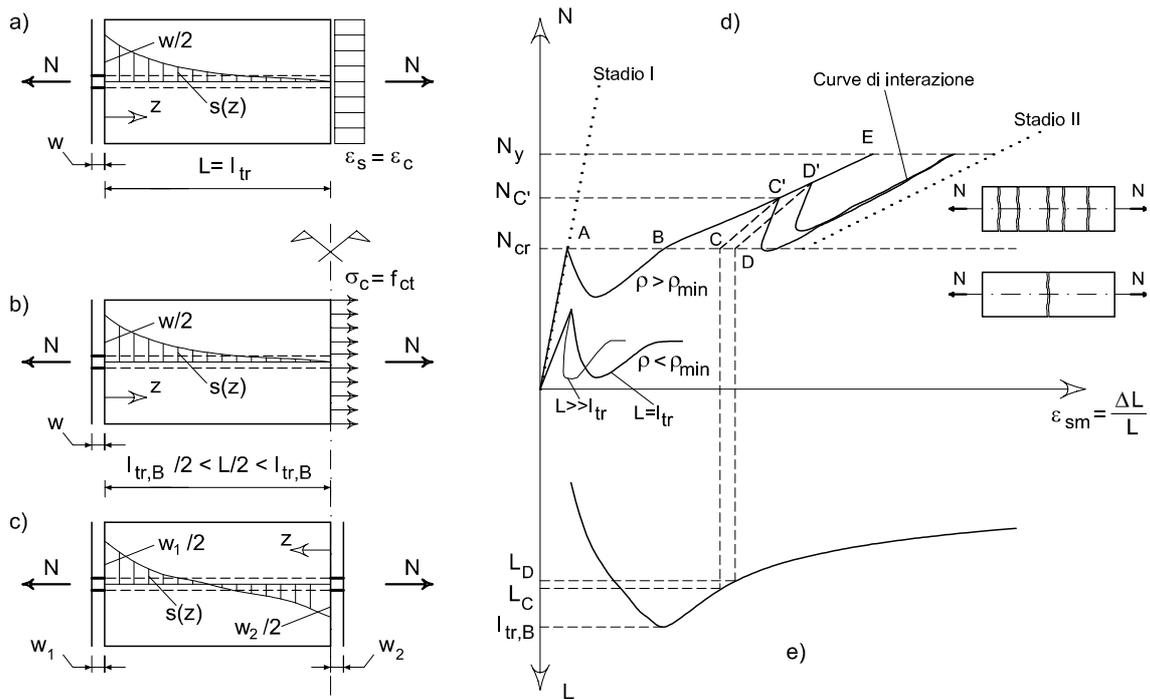


Figura 3  
I conci del modello proposto e le curve  $N-\epsilon_{sm}$  e  $L-\epsilon_{sm}$ .

fenomeno di “snap-back”, pur restando inalterati i valori massimi e minimi della risposta (Fig. 3d). Ciò è dovuto al comportamento lineare elastico della parte di tirante oltre la zona di lunghezza  $l_{tr}$ , ove si sviluppa il fenomeno di aderenza. Al fine di raggiungere un risultato univoco, il campo di integrazione definito da  $L$  è assunto pari alla lunghezza di trasmissione, la cui estensione risulta crescente con l’apertura della fessura.

Se la percentuale di armatura è maggiore di quella minima ( $\rho > \rho_{min}$ ), le iniziali cadute della risposta sono meno evidenti e lo sforzo normale  $N$ , dopo il softening, si incrementa fino a raggiungere nuovamente  $N_{cr}$  (punto B in Fig. 3d). Oltre questo limite il tirante può sviluppare ulteriori fessure prima dello snervamento delle barre, manifestando quindi una rottura duttile ( $N_y > N_{cr}$ ). La situazione di  $N_{cr} = N_y$  è particolarmente importante poiché rappresenta la condizione critica, in corrispondenza della quale si definisce la minima percentuale di armatura  $\rho_{min}$  nelle membrature tese [3].

Il comportamento strutturale che si riscontra in un elemento di c.a. semplicemente teso, durante la formazione ed il successivo sviluppo di una singola fessura, è sostanzialmente indipendentemente dalla percentuale di armatura [13]. Pertanto, l’algoritmo di calcolo rivolto alla determinazione degli stati di tensione e deformazione del concio di Fig. 3a è utile anche quando  $\rho > \rho_{min}$ . In tal caso, ipotizzando la resistenza a trazione  $f_{ct}$  costante, oltre il punto B di Fig. 3d nascono le altre fessure primarie. Il loro sviluppo contemporaneo, e perciò senza reciproche interazioni, divide il tirante in una serie di conci, cosiddetti conci primari, al cui interno è legittimo attendersi una simmetria degli stati di tensione e di deformazione. Se  $l_{tr,B}$  rappresenta la lunghezza del concio di Fig. 3a a livello  $N = N_{cr}$ , i conci primari hanno lunghezza  $L$  variabile tra  $l_{tr,B}$  e  $2l_{tr,B}$ . Analogamente, la deformabilità di detti conci può essere commisurata a quella del tratto di Fig. 3a, risultando maggiore, quando  $L < l_{tr,B}$ , o al massimo uguale, quando  $L = 2l_{tr,B}$ . I punti C e D in Fig. 3d, rappresentano appunto la deformabilità di due possibili elementi di lunghezze  $L_C$  e  $L_D$  (dove  $L_C > L_D$  in Fig. 3e).

Per valori di  $N > N_{cr}$ , aumenta sia la deformazione  $\epsilon_{sm}$  di ogni possibile concio, sia la massima tensione del calcestruzzo; per i tratti di maggiore lunghezza la possibilità di sviluppare una

nuova fessura si concretizza per un valore dello sforzo normale (punto  $C'$  della curva  $BE$ ) minore di quello necessario per la fessurazione di un concio più corto (punto  $D'$  della curva  $BE$ ). Il generico punto  $C'$  rappresenta anche la minima deformabilità  $\epsilon_{sm}$  dell'intero elemento per quel livello di sforzo. Per  $N = N_{C'}$ , infatti, risulta  $\epsilon_{sm} > \epsilon_{sm,C}$  (Fig. 3d) per i conci primari che hanno una lunghezza  $L < L_C$  (concio di lunghezza  $L_D$ ), ma anche per quelli che, avendo una lunghezza  $L > L_C$ , hanno già sviluppato la fessura secondaria. Per questo motivo, la situazione di massima rigidità in corrispondenza dello sforzo normale  $N$  (punti della curva  $BE$ ), si determina definendo la lunghezza del concio in fessurazione incipiente. In tale situazione, corrispondente al massimo impegno possibile del calcestruzzo teso, e di conseguenza al massimo contributo del "tension stiffening", lo stato di tensione e deformazione è calcolato con riferimento al generico concio di Fig. 3b: assegnata l'ampiezza  $w$  della fessura, si determina il valore di  $N$  che, attraverso l'integrazione delle (1-3), permette di soddisfare la condizione di incipiente fessurazione ( $\sigma_c = f_{ct}$ ) nella sezione con scorrimento nullo.

La deformabilità del concio primario, avente nella sezione di mezzeria (sezione di simmetria) la nuova fessura, deve essere valutata considerando l'interazione che esiste tra la fessura secondaria (di ampiezza  $w_2$ ) e le fessure di bordo (di ampiezza  $w_1$ ). È tuttavia opportuno notare come, a parità di sforzo normale  $N$ , si possono presentare diverse combinazioni per le ampiezze  $w_1$  e  $w_2$ . Per semplificare il problema, il calcolo della deformazione  $\epsilon_{sm}$  è condotto con riferimento alla parte di concio primario rappresentata in Fig. 3c. In tale tratto, fissata l'ampiezza  $w_2$ , risultano univocamente definiti i valori di  $w_1$ , di  $N$  e dello stato di tensione. Con un calcolo iterativo, analogo a quelli descritti in precedenza, si determinano nel piano  $N$ - $\epsilon_{sm}$ , a partire dai punti  $C'$  e  $D'$  della curva di massima rigidità, i punti delle curve di "interazione" fessurativa (Fig. 3d). L'evoluzione del quadro fessurativo in un elemento in c.a. teso genera, in definitiva, tre conci (Fig. 3a, Fig. 3b e Fig. 3c), all'interno dei quali lo stato di tensione e di deformazione si calcola con l'algoritmo rappresentato dal diagramma di flusso di Fig. 4.

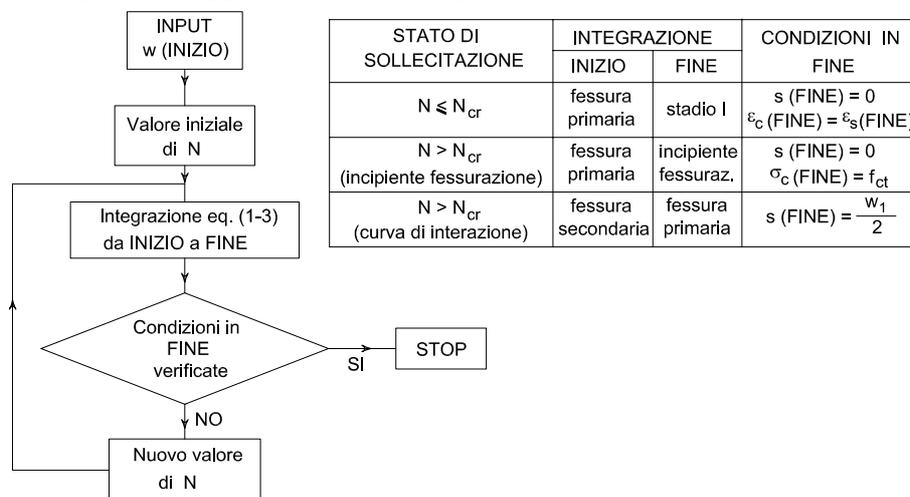


Figura4  
Il diagramma di flusso del modello proposto.

#### 4. Confronto con le risultanze sperimentali

Con riferimento al tirante riportato in Fig. 5a, dalla sperimentazione si sono ricavate le deformazioni  $\epsilon_s$  lungo la barra d'armatura per valori discreti della sollecitazione  $N$ . La misura delle deformazioni è stata eseguita attraverso un considerevole numero di estensimetri situati all'interno della barra [7]. Poiché il livello di sollecitazione si è sempre mantenuto al di sotto del limite di snervamento, dallo stato di deformazione  $\epsilon_s$  si è determinato lo stato di tensione  $\sigma_s$ ,

attraverso il legame elastico di Fig. 2a. Successivamente, mediante l'equazione (1) ed il legame costitutivo di Fig. 2b, si sono ricavate le tensioni  $\sigma_c$  e le deformazioni  $\epsilon_c$  del calcestruzzo.

Le massime tensioni nel conglomerato nella fase di fessurazione incipiente, si sono rivelate sensibilmente differenti da  $f_{ct}$ ; in altre parole, la resistenza a trazione del conglomerato non è risultata costante all'interno dell'elemento, pertanto il quadro fessurativo si è presentato piuttosto diverso da quello teoricamente ipotizzato. Ad esempio, la fessura secondaria 4 (Fig. 5a), pur essendo collocata all'interno del concio primario tra le fessure 2 e 3, non risulta situata nella mezzeria del concio stesso. Infatti, essa si forma al valore del carico di 30100 N, con una tensione massima nel calcestruzzo ( $\sigma_c = 2.53 \text{ N/mm}^2$ ) maggiore del limite di resistenza ( $f_{ct} = 2.18 \text{ N/mm}^2$ ). Se  $f_{ct}$  è assunta pari al massimo valore di  $\sigma_c$  registrato prima della formazione della fessura 4 ( $f_{ct} = 2.53 \text{ N/mm}^2$ ), con il modello proposto si ricava, per  $N = 30100 \text{ N}$ , una semi-lunghezza del concio primario di 245 mm, pari alla distanza tra la fessura 3 (primaria) e la fessura 4 (secondaria) misurata nella sperimentazione [7]. È dunque particolarmente interessante operare in questo concio il confronto tra le risultanze numeriche e le misure sperimentali dello stato di tensione nell'acciaio e nel calcestruzzo. In Fig. 5b tale confronto è condotto con riferimento alla situazione di incipiente formazione della fessura 4, fase nella quale la deformazione media  $\epsilon_{sm}$  è definita da un punto della curva *BE* (Fig. 3d).

Per lo stesso sforzo normale ( $N = 30100 \text{ N}$ ), in Fig 5c sono riportati gli stati tensionali relativi allo sviluppo della fessura 4 ed alla sua interazione con la fessura 3, mentre in Fig 5d il

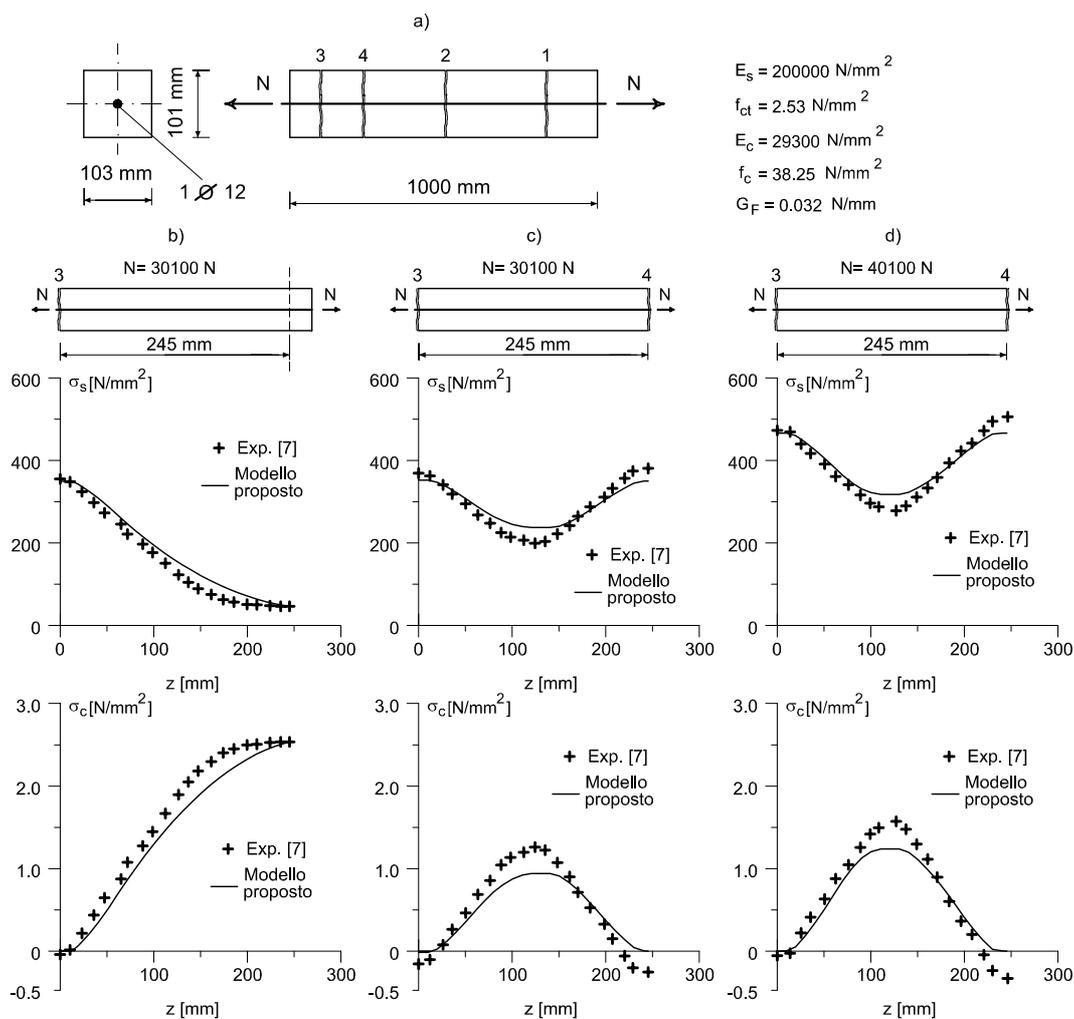


Figura 5

Il confronto con le misure sperimentali di  $\sigma_s$  e  $\sigma_c$  per l'elemento 100T12 di [7].

confronto riguarda i valori di  $\sigma_s$  ed  $\sigma_c$ , per uno sforzo normale più elevato (40100 N).

Si può dunque osservare che esiste un buon accordo tra gli stati di tensione calcolati con il modello proposto e quelli ricavati sul campo [7]. A conferma di questo risultato, tanto le misure sperimentali quanto i risultati dell'elaborazione numerica, presentano sforzi di compressione nel calcestruzzo in prossimità delle fessure, ove sia presente una richiusura della lesione.

## 5. Osservazioni Conclusive

Il fenomeno fessurativo nelle strutture in c.a. semplicemente tese, può essere indagato con riferimento ad un unico concio, nel quale, con il progredire della fessurazione, cambiano di volta in volta le condizioni al contorno. In tal modo è possibile ricavare, anche in presenza di un carico monotono, uno scarico della tensione nel calcestruzzo (fino ad avere tensioni di compressione). Tali scarichi, osservabili anche sperimentalmente [7], sono imputabili unicamente alla formazione di nuove fessure ed alla contemporanea richiusura di quelle esistenti, in accordo con il modello coesivo di Fig. 2c [10].

L'insieme delle curve di interazione fessurativa e del ramo di massima rigidità  $BE$  di Fig. 3d, individua nel piano  $N-\epsilon_{sm}$ , il campo delle possibili deformabilità. La definizione di tale campo, già delineata in [9], è raggiunta attraverso un modello che in questo sede è arricchito dai contributi della meccanica della frattura.

## Bibliografia

- [1] Clark A. P., "Cracking in reinforced concrete flexural members", Journal of American Concrete Institute, Vol. **27**, 851-862, **1956**.
- [2] Broms B.B., "Crack width and crack spacing in reinforced concrete members", ACI Journal, Vol. **62**, 1237-1256, **1965**.
- [3] Fantilli A. P., Ferretti D., Iori I., Vallini P., "Behaviour of R/C elements in bending and tension: the problem of minimum reinforcement ratio", Minimum Reinforcement in Concrete Members (ed. A. Carpinteri), Elsevier, 99-125, **1999**.
- [4] Bianchini A. C., Kesler C. E., Lott J. L., "Cracking of reinforced concrete under external load", ACI SP-20, 73-85, **1968**.
- [5] Mirza S. M., Houde J., "Study of bond stress-slip relationship in reinforced concrete", ACI Journal, Vol. **76**, 19-45, **1979**.
- [6] Watstein D., Mathey R. G., "Width of cracks in concrete at the surface of reinforcing steel evaluated by means of tensile bond specimens", Journal of American Concrete Institute, Vol. **31**, 47-56, **1959**.
- [7] Scott R. H., Gill P. A. T., "Short-term distributions of strain and bond stress along tension reinforcement", The Structural Engineer, Vol. **65B(2)**, 39-43, **1987**.
- [8] Hognestad E., "High strength bars as concrete reinforcement. Part 2. Control of flexural cracking", Journal of PCA Research and Development Laboratories, 46-63, **1962**.
- [9] Fantilli A. P., Ferretti D., Iori I., Vallini P., "Flexural Deformability of Reinforced Concrete Beams", Journal of Structural Engineering-ASCE, **124(9)**, 1041-1049, **1998**.
- [10] Hordijk D. A., "Local approach to fatigue of concrete", Doctoral Thesis, TU-Delft, **1991**.
- [11] Comité Euro-International du Béton (CEB), "CEB-FIP Model Code 1990", CEB Bulletin d'Information 213-214, **1993**.
- [12] Monegato G., "Fondamenti di calcolo numerico", Levrotto & Bella, **1990**.
- [13] Giuriani E., Rosati G., "Ricerca sperimentale su elementi in c.a. soggetti ad una singola fessura. Studio dei rami instabili del legame momento-rotazione", Studi e Ricerche, Vol. **6**, 151-201, **1984**.