

# SUL CALCOLO DEI FATTORI DI INTENSIFICAZIONE DEGLI SFORZI MEDIANTE IL METODO DELLE CELLE

Elena Ferretti<sup>1</sup>, Erasmo Viola<sup>2</sup>, Antonio Di Leo<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Dipartimento di Ingegneria dell'Innovazione, Università degli Studi di Lecce,  
Via per Monteroni, 73100 Lecce*

<sup>2</sup>*DISTART, Università degli Studi di Bologna, V.<sup>le</sup> Risorgimento 2, 40131 Bologna*

## **Abstract**

*In this work, a new approach for identifying the stress intensity factors (SIFs) is proposed, using the method of energetic compliance. The new approach uses the “Cells Method” (Tonti) which gives the continuum media equations in discrete form directly. Problems relating to the appropriate geometric model for determining the opening SIF ( $K_I$ ) are discussed in detail. Experimental results are used to calibrate the numerical model. Numerical results are presented that show the change in  $K_I$  with the crack depth/ligament ratio, and these are compared with those of Brown (1966) and Tada (1973).*

## **1. Introduzione**

Nel presente lavoro, si propone l'applicazione del Metodo delle Celle (Tonti) per l'identificazione dei fattori di intensificazione degli sforzi (SIF) nell'ambito del procedimento energetico delle flessibilità. Il vantaggio connesso all'utilizzo del Metodo delle Celle è quello di capovolgere la trattazione classica, che parte dalla formulazione differenziale per ritrovare una formulazione discreta, e fornire le equazioni del continuo direttamente in forma discreta.

Come caso particolare, si ricerca il SIF di Modo I ( $K_I$ ), ovvero, si ricerca il SIF del crack di un concio di trave soggetto a momento flettente, trascurando le forze di massa. Tale concio si intende libero nello spazio. Il “Metodo delle Celle”, come qualsiasi altra tecnica numerica, non è in grado di stimare lo stato di sollecitazione di un tale corpo, in quanto può operare solo su corpi cinematicamente definiti. Per risolvere numericamente il problema dell'equilibrio, si è sfruttata l'equivalenza statica tra il concio descritto e quello appartenente ad una trave four-point bending (Figura 1) così definito:

- la sezione di mezzeria coincide con la sezione di mezzeria della trave;
- il crack si considera localizzato nella sezione di mezzeria;
- le facce distano dalla mezzeria di una quantità non inferiore alla distanza di estinzione dello stato tensionale aggiuntivo conseguente alla presenza del crack.

Infatti, sulle facce del concio di mezzeria di una trave four-point bending non intagliata, l'unica caratteristica della sollecitazione interna non nulla è il momento flettente. Inoltre,

poiché le dimensioni del secondo concio vengono fissate in modo da collocare le sue facce oltre la zona di estinzione dello stato tensionale aggiuntivo conseguente al crack, anche nel caso di trave con intaglio in mezzera l'unica caratteristica della sollecitazione interna diversa da zero sulle facce è il momento flettente. Ne segue che questo secondo concio è effettivamente staticamente equivalente al concio di trave soggetto a momento flettente puro e libero nello spazio. Ne segue, inoltre, che il concio staticamente equivalente non può avere dimensioni del tutto arbitrarie: ovvero, fissata l'altezza  $h$  della trave e la profondità  $p$  dell'intaglio, la lunghezza  $l_{s.eq.}$  del concio staticamente equivalente dovrà essere compresa tra un valore massimo, pari alla distanza di applicazione dei carichi (nota), ed un valore minimo, pari al doppio della distanza di estinzione (da identificare):  $l_{max} \leq l_{s.eq.} \leq l_{min}$ .

## 2. Identificazione della lunghezza minima del concio staticamente equivalente

L'identificazione si è avvalsa del metodo numerico denominato "Metodo delle Celle" (Tonti), al fine di testare il metodo stesso in un'applicazione di Meccanica dei Solidi. Tale metodo si avvale di due discretizzazioni spaziali duali, la triangolazione di Delaunay e i poligoni di Voronoi (Figura 1). La dualità fra le due mesh è sia di tipo geometrico, sia di tipo statico-cinematico. Ovvero, è di tipo geometrico in quanto i vertici dei poligoni di Voronoi (complesso duale) sono i circocentri dei triangoli di Delaunay (complesso primale) ed è di tipo statico-cinematico in quanto ai nodi di Delaunay vengono associate le variabili di configurazione e ai nodi di Voronoi vengono associate le variabili di sorgente [4].

Il generatore di mesh utilizzato è di tipo adattivo: ciò permette di raffinare le due mesh nelle zone in cui lo stato tensionale presenta forti gradienti (Figura 1), ovvero interessate da discontinuità geometriche. Per l'implementazione del metodo numerico e le visualizzazioni grafiche riportate di seguito si è utilizzato il linguaggio di programmazione "Matlab 5.3" [3].

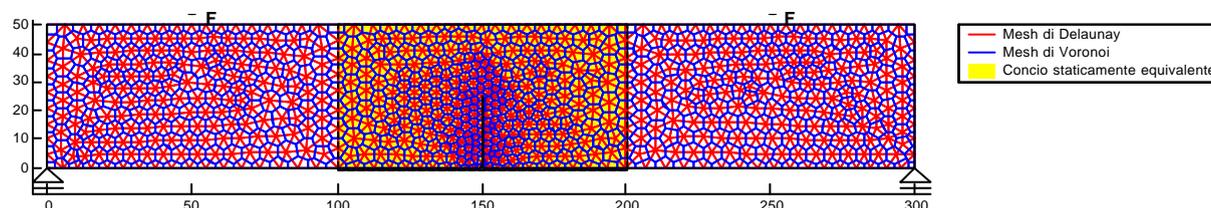


Figura 1

Discretizzazione spaziale della trave e del concio staticamente equivalente ( $p/h = 0.5$ ).

Come già osservato,  $l_{min}$  resta identificata una volta nota la distanza di estinzione della perturbazione allo stato tensionale dovuta al crack. Tale distanza è stata stimata come segue:

- si è approntato un programma di simulazione numerica per la soluzione del problema dell'equilibrio in una trave intagliata con carico generico;
- si sono approntati programmi grafici per la mappatura dello stato tensionale;
- la profondità del crack,  $p$ , è stata fatta variare tra il valore nullo ed il valore  $0.9h$ ;
- dall'analisi delle mappature relative allo stato tensionale lungo l'asse della trave (asse  $x$ ), si è valutata la configurazione dell'asse neutro per ogni valore di  $p$ ;
- la distanza di estinzione è stata valutata come la distanza dal crack per la quale l'asse neutro in condizioni di massima estensione del crack (Figura 3) ricade sulla posizione occupata dallo stesso asse neutro in assenza di crack (Figura 2).

La distanza di estinzione così stimata risulta pari all'altezza  $h$  della trave. Le sezioni corrispondenti a tale distanza di estinzione sono indicate in figura con linea tratteggiata.

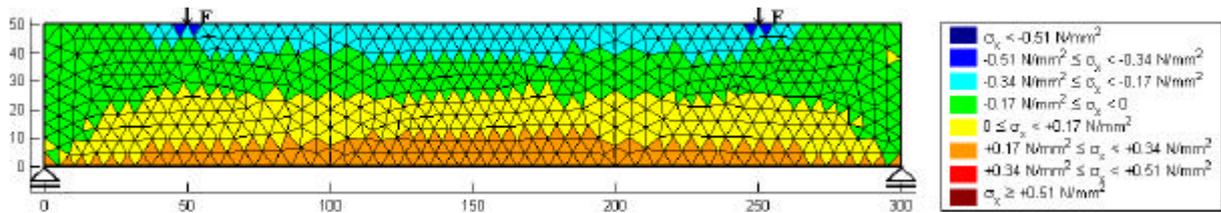


Figura 2

Mappatura dello stato tensionale lungo l'asse della trave ( $\sigma_x$ ) in assenza di crack.

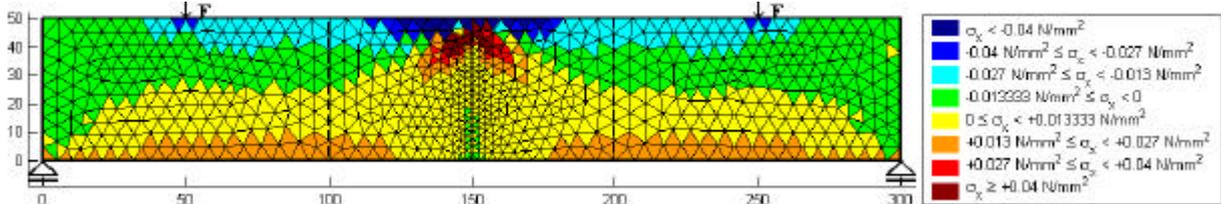


Figura 3

Mappatura dello stato tensionale lungo l'asse della trave ( $\sigma_x$ ) per  $p/h = 0.9$ .

Come si può osservare dal confronto tra la Figura 3 ( $p/h = 0.9$ ) e la Figura 4 ( $p/h = 0.5$ ), la distanza di estinzione sostanzialmente non dipende da  $p$ . In entrambi i casi, infatti, l'asse neutro ricade sulla posizione occupata per crack nullo ad una distanza dal crack pari ad  $h$ .

Se ne può concludere che la lunghezza minima del concio staticamente equivalente corrisponde al doppio dell'altezza del concio stesso:

$$l_{\min} = 2h. \quad (1)$$

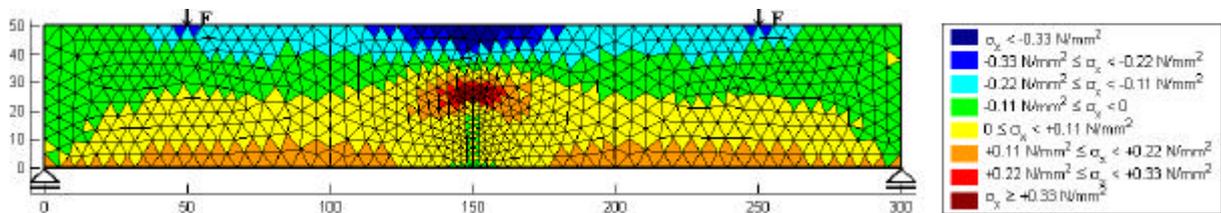


Figura 4

Mappatura dello stato tensionale lungo l'asse della trave ( $\sigma_x$ ) per  $p/h = 0.5$ .

A conferma del risultato ottenuto, per ogni triangolo di Delaunay si sono ricercate le direzioni principali di tensione (Figura 5 per  $p = 0.9h$ ). Anche in questo caso, si identifica un valore di distanza di estinzione pari ad  $h$ : infatti, a partire da questo valore di distanza dal crack e per tutti i valori di profondità dell'intaglio, le due direzioni principali possono considerarsi distese lungo l'asse della trave e l'asse ad esso ortogonale (Figura 5 per  $p = 0.9h$ ).

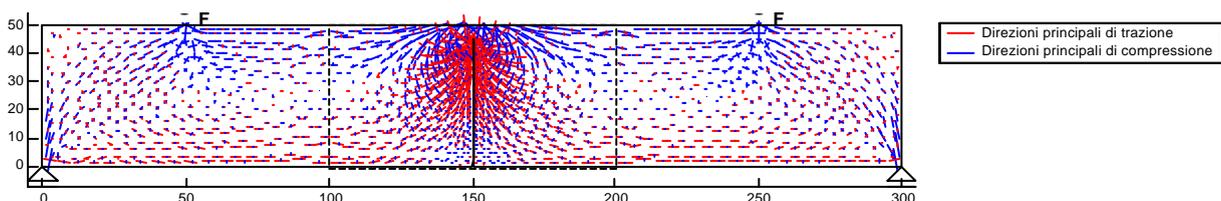


Figura 5

Direzioni principali di tensione per  $p/h = 0.9$ .

Infine, anche l'analisi della mappatura dello stato deformativo conferma la correttezza del valore  $l_{\min}$  identificato. Infatti, l'alternanza fra valori positivi e valori negativi di scorrimento angolare, tutti molto piccoli in modulo, che si osserva a partire dalle sezioni distanti  $l \cong h$  dal crack (Figura 6), indica che tali sezioni sono prossime alla distanza di estinzione.

Inoltre, dalle Figure 5 e 6 si può osservare come, benché si instauri una distribuzione di tensioni che, con buona approssimazione, può essere ritenuta alla De Saint Venant in tutta la zona  $l_{\min} \leq l_{s.eq.} \leq l_{\max}$ , l'ipotesi di sezioni piane ha valore in una zona molto più ristretta. Per la geometria considerata, la zona di validità di tale ipotesi corrisponde ad un intorno delle sezioni distanti  $l_{\min}$  dal crack. Dalla Figura 6 appare anche evidente come quest'ultima limitazione sia da imputare all'effetto punzonamento del carico. Ne deriva che l'implementazione del "Metodo delle Celle" consente di stimare l'effetto punzonamento dei carichi e di associarvi una distanza di estinzione. Dalla mappatura dello scorrimento angolare per intaglio nullo (Figura 7) è immediato ricavare che tale distanza di estinzione è simile a quella associata al crack, ovvero, assume valore prossimo all'altezza  $h$  della trave.

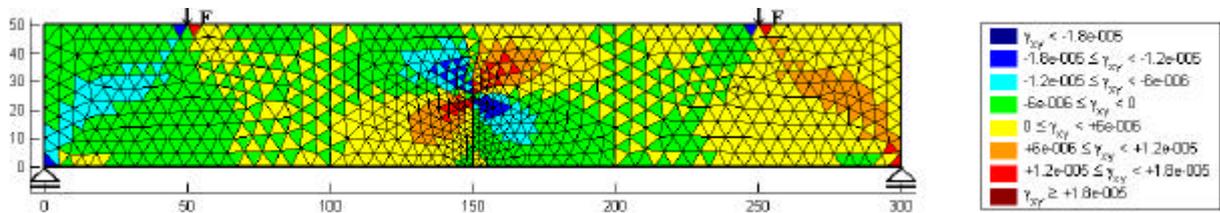


Figura 6

Mappatura degli scorrimenti angolari nel piano medio della trave ( $g_{xy}$ ) per  $p/h = 0.5$ .

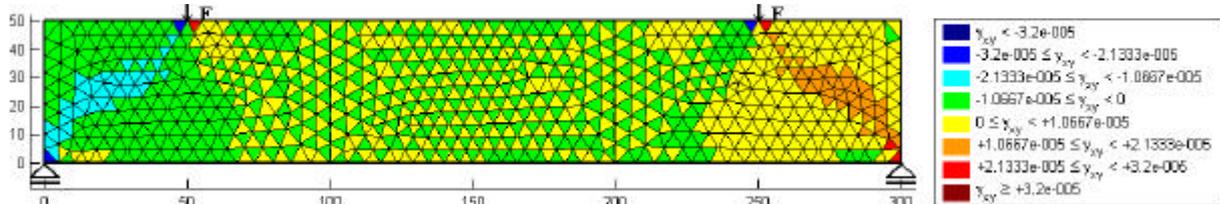


Figura 7

Mappatura degli scorrimenti angolari nel piano medio della trave ( $g_{xy}$ ) per  $p = 0$ .

Si può concludere che la lunghezza  $l_{s.eq.}$  del concio staticamente equivalente deve soddisfare le limitazioni  $l_{\max} \leq l_{s.eq.} \leq 2h = l_{\min}$ , e che la lunghezza  $l_{d.eq.}$  di un concio che sia anche cinematicamente equivalente deve soddisfare le limitazioni  $l_{\max} - 2h \leq l_{d.eq.} \leq 2h = l_{\min}$ .

La deformata del concio con  $l_{s.eq.} = l_{d.eq.} = l_{\min}$  e  $p/h = 0.5$ , ottenuta numericamente, è riportata in Figura 8 (campo di spostamento amplificato di 100 volte). L'ipotesi di sezioni piane per le facce del concio staticamente equivalente in Figura 8 è pienamente rispettato.

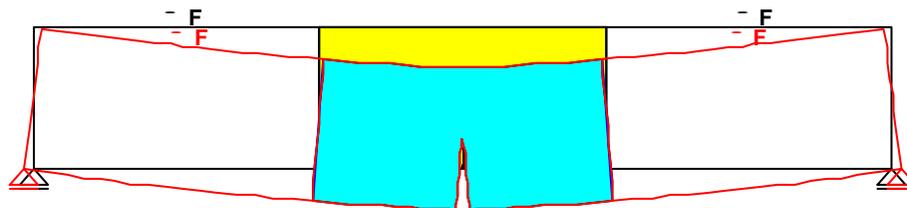


Figura 8

Deformata del concio staticamente e cinematicamente equivalente.

### 3. Verifica del modello analitico su dati sperimentali

Il programma di simulazione numerica per la soluzione del problema dell'equilibrio nella trave intagliata (in condizioni generiche di carico) è stato testato sui risultati sperimentali riportati in [2]. Tali risultati sono relativi ad una trave three-point bending di dimensioni standard (altezza  $h = 150$  mm, distanza fra gli appoggi  $l = 450$  mm, spessore  $b = 150$  mm). Per un solido in queste condizioni di carico e con queste caratteristiche geometriche la determinazione di  $G_{IC}$  (crack extension force) a partire dalla variazione della flessibilità con la profondità del crack,  $p$ , è funzione del riferimento rispetto a cui si misura la freccia. Infatti, perché la stima della flessibilità sia obiettiva, i punti di riscontro, posti in corrispondenza della sezione di mezzeria e delle sezioni vincolate, devono trovarsi oltre la distanza di estinzione delle forze concentrate su quelle stesse sezioni (carico e reazioni vincolari) [2].

Inoltre, l'errore sulla stima della flessibilità per un non accurato posizionamento dei punti di riscontro decresce al crescere di  $p$ . Infatti, al crescere di  $p$  lo schema statico della trave, da isostatico, tende a diventare labile. Ovvero, a parità di spostamento imposto, il momento flettente sulle facce del concio decresce al crescere di  $p$ , fino ad annullarsi per  $p \rightarrow h$ . Parallelamente, la rotazione delle facce del concio cresce al crescere di  $p$  fino a raggiungere, per  $p = h$ , il valore relativo alla rotazione rigida dei due tronchi in cui la trave è stata isolata dal crack passante. I valori numerici di momento flettente e rotazione delle facce del concio ottenuti per spostamento imposto e rapporto  $p/h$  variabile sono riportati in Figura 9.

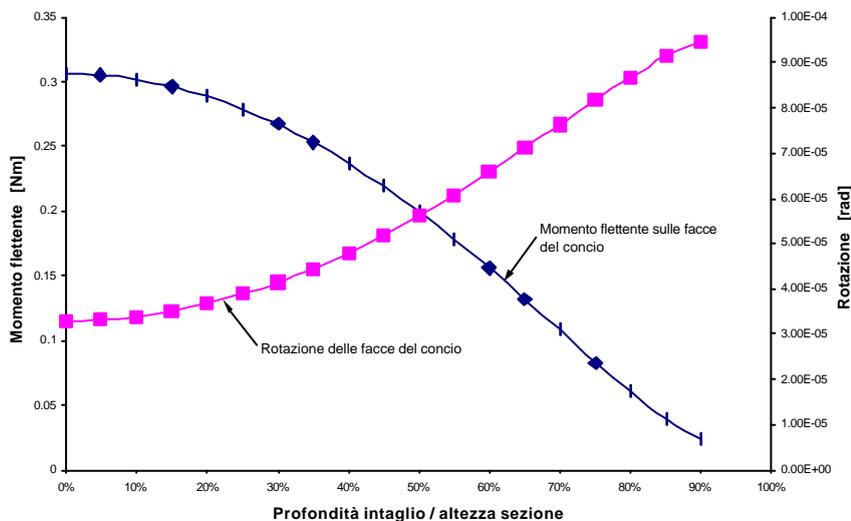


Figura 9

*Influenza di  $p/h$  sui valori di momento flettente e rotazione, a parità di spostamento imposto.*

Poiché al crescere di  $p$  la trave si scarica progressivamente, anche le reazioni vincolari e l'effetto punzonamento ad esse connesso si annullano. Ne segue che lo scarto tra i valori di flessibilità forniti da due distinte coppie di punti di riscontro si annulla al crescere di  $p$ .

Per verificare la sensibilità del modello numerico alla realtà fisica, la flessibilità è stata stimata per due diverse coppie di punti di riscontro. Per entrambe le coppie, uno dei punti di riscontro si trova a metà distanza tra l'apice dell'intaglio ed il lembo superiore della trave (Figura 10b). Il secondo punto di riscontro della prima coppia è uno dei due punti a contatto con gli appoggi (Figura 10b). Per questa scelta del secondo punto di riscontro, si ha il massimo dell'influenza dell'effetto punzonamento sulla stima della flessibilità, che assume il suo massimo valore. La flessibilità stimata tramite la prima coppia di riscontro verrà indicata

col simbolo  $C_1$ . Il secondo punto di riscontro della seconda coppia è posto su una delle due sezioni terminali della trave, ad una distanza dall'appoggio pari a 20 mm (Figura 10b). La flessibilità stimata tramite la seconda coppia di riscontro verrà indicata col simbolo  $C_2$ .

Come si vede dalla Figura 10a, il “Metodo delle Celle” è sensibile tanto alla variazione di flessibilità conseguente alla scelta di diverse coppie di punti di riscontro, quanto all'annullarsi dell'effetto punzonamento al crescere della profondità dell'intaglio.

Alle curve di flessibilità in Figura 10a sono stati sovrapposti i risultati sperimentali relativi alla seconda coppia di punti di riscontro [2]. L'accordo fra questi risultati e quelli forniti dal modello numerico per la stessa coppia di punti di riscontro (curva  $C_2$ ) è più che buono.

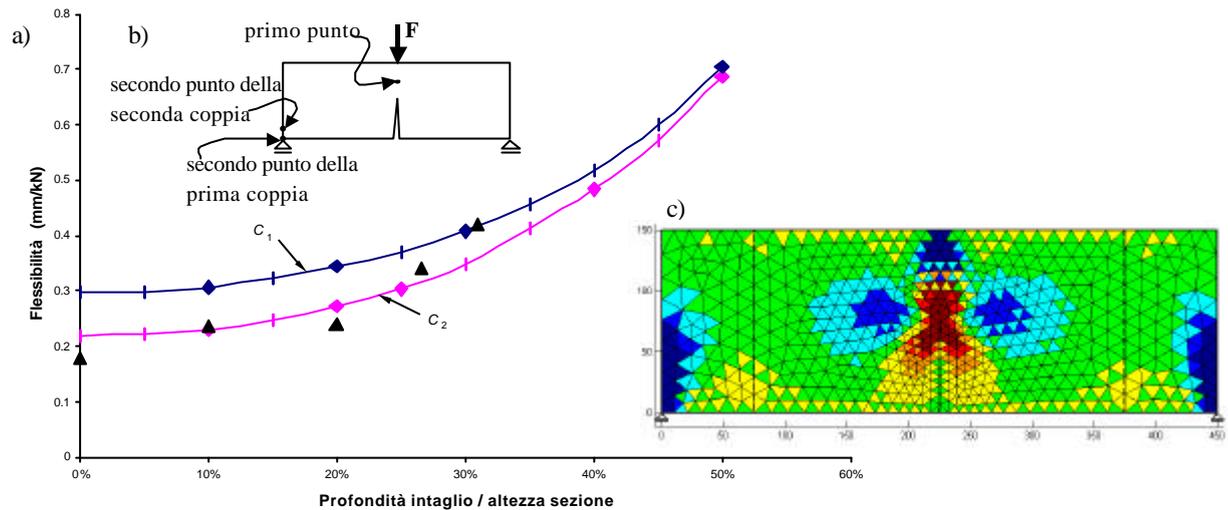


Figura 10

a) Sensibilità del modello numerico all'effetto punzonamento; b) Schema statico e posizione dei punti di riscontro; c) Mappatura delle  $S_y$  per  $p/h = 0.5$ .

In Figura 10c si è riportata la mappatura dello stato tensionale in direzione ortogonale all'asse della trave ( $S_y$ ) per  $p/h = 0.5$ . Come si può osservare da questa mappatura, anche il secondo punto della seconda coppia è ampiamente contenuto all'interno della zona interessata dal punzonamento degli appoggi. Ciò nonostante, la diminuzione di flessibilità per intaglio nullo, rispetto al valore relativo alla prima coppia di punti di riscontro, è del 27% circa.

Inoltre, la mappatura delle  $S_y$  consente di valutare la distanza dall'appoggio alla quale occorrerebbe posizionare il secondo punto di riscontro per evitare l'effetto punzonamento: tale distanza risulta pari a circa  $2/3h$ , con  $h$  altezza della sezione.

#### 4. Identificazione dello Stress Intensity Factor di modo I ( $K_I$ )

Testato il programma numerico sui dati sperimentali, si può riprendere in considerazione il concio staticamente equivalente per valutare lo stress intensity factor di modo I ( $K_I$ ).

La presenza di un crack in un elemento strutturale riduce la rigidità globale dell'elemento stesso [1]. Nel concio di trave staticamente e cinematicamente equivalente, sia  $C$  la flessibilità concentrata (compliance), essendo  $J$  l'angolo di rotazione relativa delle sue sezioni terminali:

$$C = J/M \quad (2)$$

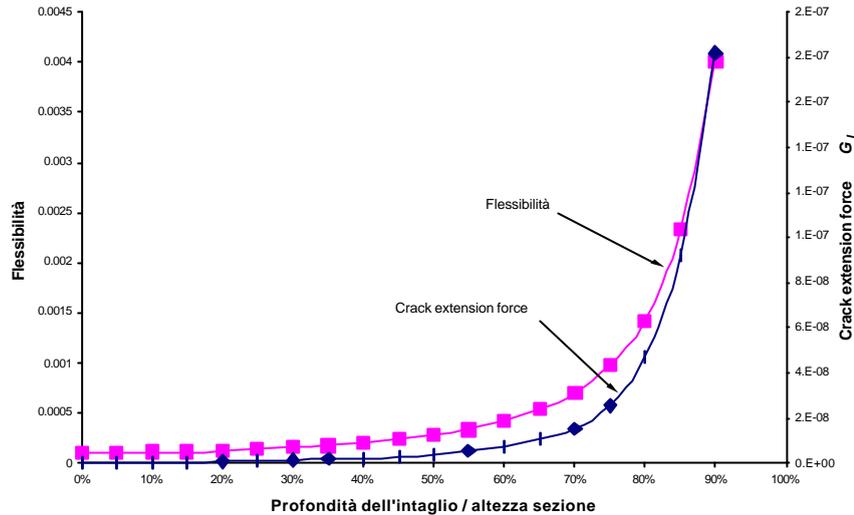


Figura 11  
Risultati numerici per  $C$  e  $G$ , in funzione di  $p/h$ .

In Figura 11 si è riportata la stima numerica dell'andamento di  $C$  in funzione del rapporto  $p/h$ . Poiché la rotazione  $\mathbf{J}$  si incrementa non appena il crack si estende, ad ogni estensione del crack il momento flettente  $M$  compie lavoro positivo. Uguagliando il lavoro esterno, compiuto dal momento flettente  $M$ , all'energia necessaria per creare la nuova superficie di frattura si ha:

$$Md\mathbf{J} = Gtdp, \quad (3)$$

essendo  $G$  la forza generalizzata di estensione del crack (crack extension force), o forza di Irwin,  $t$  lo spessore del concio e  $p$  la profondità del crack.

Si noti che la precedente espressione del lavoro esterno è valida solo oltre la zona di estinzione. Infatti sulle sezioni distanti dal crack di una quantità  $d$ , con  $0 \leq d \leq l_{\min}$ , la vicinanza del crack si riflette in una variazione di geometria della sezione resistente (Figure 3 e 5). Ciò comporta migrazione dell'asse neutro (Figure 3 e 5) con deviazione delle direzioni principali di tensione (Figura 5) e nascita di una distribuzione di tensioni tangenziali  $\mathbf{t}_{xy}$ . Per equilibrio con l'azione esterna di tipo tagliante, che è nulla, la distribuzione di tensioni tangenziali deve essere equilibrata. Poiché le  $\mathbf{t}_{xy}$  e le  $\mathbf{g}_{xy}$  sono legate da un fattore di proporzionalità, anche l'integrale delle  $\mathbf{g}_{xy}$  deve risultare nullo. Ciò è confermato dalla mappatura delle  $\mathbf{g}_{xy}$  per  $p/h = 0.5$  (Figura 6), nella quale, in tutto il tratto  $0 \leq d \leq l_{\min}$ , si riconosce una distribuzione emisimmetrica di  $\mathbf{g}_{xy}$  rispetto all'asse della trave. La mappatura delle  $\mathbf{t}_{xy}$  nel tratto  $0 \leq d \leq l_{\min}$ , risultando del tutto identica a quella delle  $\mathbf{g}_{xy}$ , è anch'essa di tipo emisimmetrico. Per valori diversi di  $p/h$ , le  $\mathbf{t}_{xy}$  e le  $\mathbf{g}_{xy}$  non sono più emisimmetriche ma il loro integrale esteso alla sezione risulta comunque nullo. Quindi, la soluzione numerica corrisponde effettivamente ad una distribuzione equilibrata di tensioni tangenziali.

Ne segue che, per  $0 \leq d \leq l_{\min}$ , la (3) si modifica come segue:

$$Md\mathbf{J} + \int_0^b \int_0^h \mathbf{t}_{xy} \mathbf{g}_{xy} dydzdx = Gtdp. \quad (4)$$

Tornando al concio staticamente equivalente, da (2) e (3) si ricava  $G$  in funzione di  $C$  e di  $p$ :

$$G = \frac{M^2}{t} \frac{dC}{dp}. \quad (5)$$

Noto  $G$  dalla (5) (Figura 11) e sfruttando la relazione tra  $G$  e  $K_I$  ( $G = K_I^2/E$ ), è immediato ottenere la stima analitica del fattore di intensificazione degli sforzi  $K_I$ , al variare del rapporto  $p/h$  (Figura 12). L'andamento stimato del fattore di intensificazione degli sforzi è qualitativamente confrontabile alla legge empirica proposta da Brown (1966) e, ancor più, a quella, sempre empirica, proposta da Tada (1973).

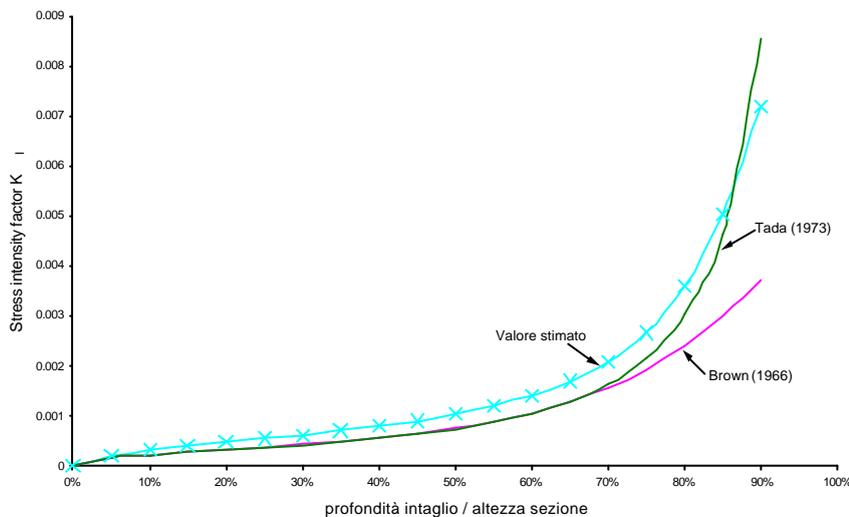


Figura 12  
Confronto fra i valori numerici di  $K_I$  ed i valori riportati in Brown (1966) e Tada (1973).

## Ringraziamenti

Questo lavoro è stato svolto con il contributo finanziario del Murst. Gli Autori ringraziano il Prof. Enzo Tonti per i preziosi suggerimenti.

## Bibliografia

- [1] Carpinteri A., Di Tommaso A., Viola E., “Vita a Fatica di Strutture Iperstatiche Metalliche Contendenti Difetti”, Atti dalla Accademia delle Scienze dell’Istituto di Bologna – Anno 268°, Serie XIII, Tomo VII, 275-294, Bologna, 22 Gennaio **1980**.
- [2] Di Leo A., “Osservazioni sulla Valutazione dei Parametri Statici ed Energetici di Tenacità alla Frattura dei Calcestruzzi Mediante Prove di Flessione con Caricamento Centrale su Provini Prismatici Intagliati”, IX Convegno Nazionale AIAS, 155-166, Trieste, 23-26 Settembre **1981**.
- [3] Ferretti E., Viola E., Di Leo A., “Modellazione del Comportamento Macroscopico in Compressione del Calcestruzzo a partire da Nuove Assunzioni Constitutive”, XXVIII Convegno Nazionale AIAS, 767-776, Vicenza, 8-11 Settembre **1999**.
- [4] Tonti E., “Finite Formulation of the Electromagnetism Field”, submitted to Journal of Computation Physics (January **2000**).