

IL MODELLO DEL BRIDGED-CRACK PER I CALCESTRUZZI AD ALTE PRESTAZIONI

Alberto CARPINTERI, Giuseppe FERRO, Giulio VENTURA

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica, Politecnico di Torino, Torino
Carpinteri@polito.it, Ferro@polito.it, Gventura@polito.it

Sommario

Viene presentato un modello *bridged-crack* per determinare la risposta strutturale di elementi fessurati in calcestruzzo armato fibro-rinforzato soggetti a flessione. La contemporanea presenza di due differenti armature, le principali longitudinali e le fibre (armatura secondaria) che agiscono ricucendo la fessura a due differenti livelli, porta alla definizione di due numeri di fragilità, da cui dipende la risposta strutturale. Tali numeri adimensionali sono funzioni della tenacità della matrice fragile, del tipo e della quantità di rinforzo e della dimensione strutturale caratteristica. In particolar modo la dipendenza dei numeri di fragilità dalla dimensione strutturale è rappresentata da una legge di potenza con esponente pari a 0.5, tipico della Meccanica della Frattura Elastica Lineare.

Abstract

A bridged-crack model is proposed which reproduces the constitutive flexural response of reinforced concrete members with fibers. Two different reinforcements, the longitudinal bars (primary reinforcement) and the fibers (secondary reinforcement) distributed in the brittle cementitious matrix are considered. The bridging actions exerted by the reinforcements onto the crack faces are assumed as rigid-perfectly-plastic for the primary ones and as cohesive softening forces for the fibers.

From the dimensional analysis, it comes out that the constitutive flexural response depends on three dimensionless parameters. The first one, $\tilde{E}\tilde{w}_c$, controls the extension of the process zone. The other two parameters, called brittleness numbers $N_P^{(1)}$ and $N_P^{(2)}$, are related to the reinforcement phases. The role of the size scale is fundamental for the global structural behaviour, which can range from ductile to brittle simply with the variation of the two brittleness numbers, which are function for each reinforcement phase of matrix toughness, reinforcement yielding or slippage limit, reinforcement volume fraction and global structural size.

1. Introduzione

Negli ultimi anni si sta assistendo ad un crescente interesse per i materiali compositi a matrice cementizia, legata in particolar modo all'utilizzo di calcestruzzi ad alta ed altissima resistenza di nuova concezione. Questi calcestruzzi, ottenuti mediante una drastica riduzione dei vuoti correlata ad una diminuzione della granulometria degli inerti, se da un lato risultano molto promettenti per la realizzazione di grandi opere strutturali, mostrano altresì un comportamento spiccatamente fragile. Il ruolo delle fibre, o armatura secondaria, è quello di controllare la fessura mediante l'azione di *bridging*, o di cucitura che agisce su micro- e macro-fessure della matrice cementizia.

In genere i compositi cementizi fibro-rinforzati manifestano incrementi non tanto di resistenza, quanto piuttosto di *tenacità alla frattura* (intesa anche come lavoro di deformazione per giungere alla rottura), di *duttilità strutturale* (resistenza alla fatica, assorbimento di energia d'urto, maggiore capacità di mantenimento dei carichi anche dopo la formazione di fessure) e di *durabilità del manufatto* (contenimento della fessurazione da ritiro in fase plastica).

Questi materiali mostrano interessanti prospettive di sviluppo anche grazie ai progressi registrati nella Meccanica della Frattura, l'applicazione dei cui concetti alle strutture in calcestruzzo ed in calcestruzzo armato rappresenta infatti l'unica via per interpretarne il comportamento a rottura, che mostra differenti modi di collasso al variare della scala dimensionale.

Il modello teorico a cui ci si riferisce determina le incognite del problema considerando esclusivamente la sezione fessurata e utilizzando concetti quali la cedevolezza locale ed il fattore di intensificazione delle tensioni. Esso costituisce un'estensione dei modelli proposti da Carpinteri [1] e da Bosco e Carpinteri [2] per una distribuzione discontinua di fibre e da Carpinteri e Massabò [3] per una distribuzione continua. Il modello simula l'azione di due differenti livelli di armatura sulla sezione fessurata di un elemento strutturale soggetto a flessione. Le armature longitudinali (principali) vengono simulate mediante l'azione di m forze concentrate applicate direttamente sulle facce della fessura. Le fibre (armatura secondaria) sono invece modellate mediante l'azione di una tensione distribuita sulla parte di fessura la cui apertura risulti minore di quella critica w_c , oltre la quale l'azione delle fibre si annulla.

Dalla analisi dimensionale, si evince come la risposta strutturale espressa dalla relazione $M - \phi$ risulti dipendere da tre parametri adimensionali. Il parametro $\tilde{E}\tilde{w}_c$, ovvero il prodotto tra il modulo di Young adimensionalizzato della matrice e l'apertura critica normalizzata della fessura, è funzione del tipo di fibre utilizzate, in particolar modo della loro lunghezza. Gli altri due parametri, denominati *numeri di fragilità*, sono legati ai due tipi di rinforzo. Il primo, $N_P^{(1)}$, dipende dalla tenacità alla frattura della matrice cementizia, dalla percentuale della armatura principale, dalla tensione di snervamento e dalla dimensione globale dell'elemento strutturale, ovvero è funzione tanto delle caratteristiche meccaniche che geometriche. Il secondo, $N_P^{(2)}$, del tutto analogo al precedente, dipende dalla percentuale in volume di fibre e dalla relativa tensione di snervamento. La risposta strutturale risulta pertanto dipendere, una volta fissati tutti i parametri meccanici, dalla dimensione dell'elemento strutturale.

I risultati teorici confermano una transizione dal collasso fragile a quello duttile variando i numeri di fragilità N_P . Inoltre, la dipendenza del numero di fragilità dalla dimensione strutturale è rappresentata da una legge di potenza con esponente pari a 0.5, tipico della Meccanica della Frattura Elastica Lineare.

2. Ipotesi di base ed analisi dimensionale

Il modello teorico oggetto del presente lavoro interpreta e riproduce il comportamento flessionale monotono di un elemento in calcestruzzo armato fibro-rinforzato. Vengono presi in esame sia la matrice fragile con le armature principali sia le fibre annegate all'interno della matrice (armature secondarie). In fig. 1.a è riportato lo schema di un elemento di trave in calcestruzzo armato fibro-rinforzato fessurato, ove h è l'altezza della sezione trasversale, b il suo spessore ed a la lunghezza della fessura. Con $\xi = a/h$ viene definita la lunghezza normalizzata della fessura e con $\zeta = x/h$ la coordinata normalizzata, avendo indicato con x la generica coordinata rispetto all'intradosso della sezione trasversale.

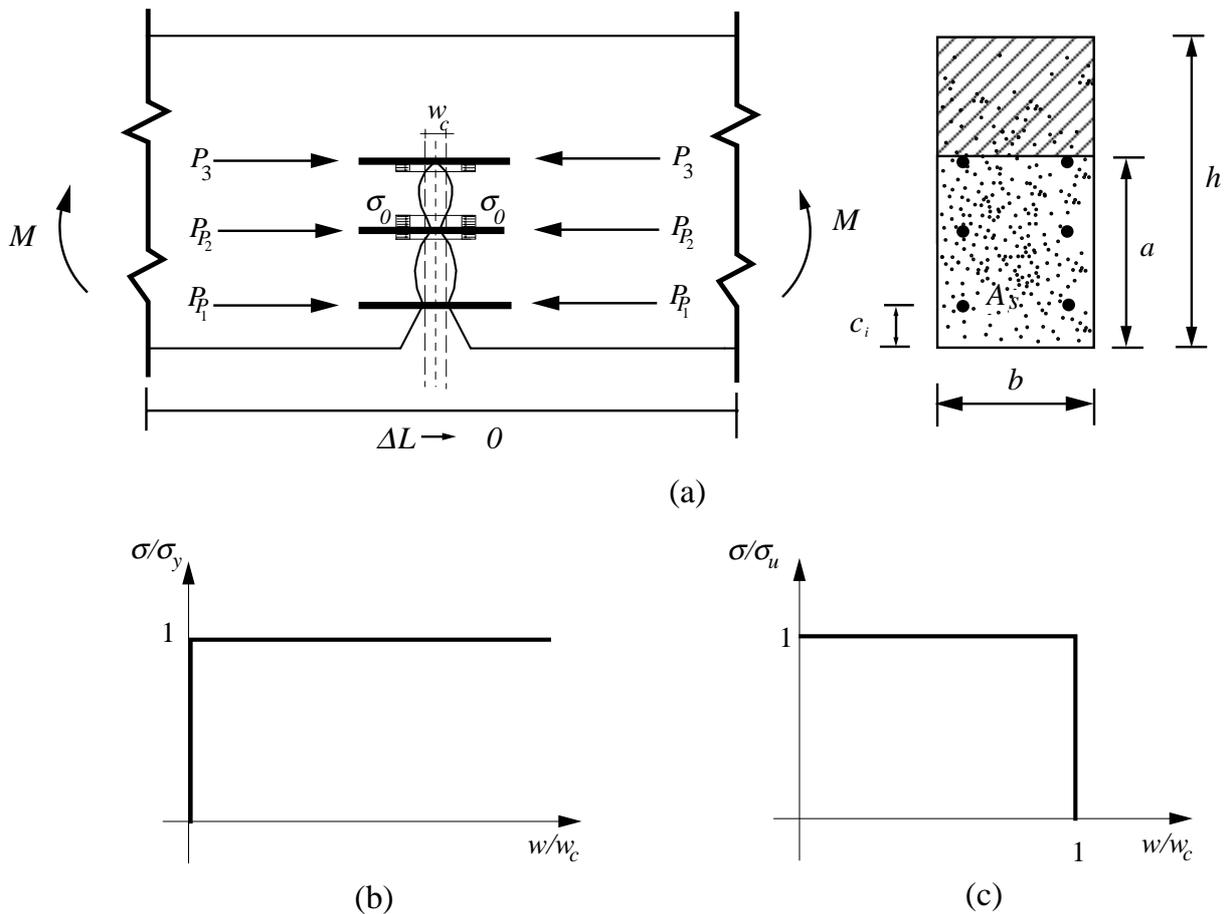


Fig. 1. (a) Schema di un elemento di trave fessurato; (b) legge rigido-plastica delle armature principali; (c) legge plastica-perfettamente fragile delle armature secondarie.

La distribuzione di forze discrete P_i e continue $\sigma(w)$ applicate direttamente sulle facce della

fessura rappresentano il meccanismo di *bridging*, o di cucitura, rispettivamente delle armature longitudinali (armatura principale) e delle fibre (armature secondarie), e agiscono a due differenti scale. Con c_i si indica la coordinata della i esima armatura longitudinale rispetto all'intradosso della sezione trasversale ed il suo valore adimensionale è uguale a $\zeta_i = c_i/h$. La funzione $\sigma(w)$ è un dato del modello e definisce una relazione tra le tensioni di bridging, rappresentative dell'azione esercitata dalle fibre sulla fessura, e $w(x)$ che rappresenta l'apertura relativa tra le facce della fessura alla generica quota x . Le azioni di bridging dell'armatura secondaria agiscono localmente laddove l'apertura della fessura risulti minore del valore critico w_c , oltre il quale tale azione si annulla (fig. 1.c).

Per la matrice cementizia si ipotizza una relazione costitutiva tensione-deformazione elastica lineare ed una condizione di propagazione della fessura in accordo alla Meccanica della Frattura Elastica Lineare. La fessura inizia a propagarsi quando il fattore di intensificazione delle tensioni globale K_I uguaglia la tenacità alla frattura della matrice cementizia K_{IC} . Per definire tali parametri sono state prese in esame le soluzioni per una striscia infinita intagliata lateralmente [4, 5].

La relazione di bridging che lega la forza di reazione P_i della i esima armatura primaria con la relativa apertura w_i della fessura al livello dell'armatura è stata assunta rigido-plastica per descrivere sia il meccanismo di plasticizzazione delle armature sia lo scorrimento relativo tra armatura e matrice (fig. 1.b).

La massima trazione di bridging è definita per le armature principali mediante la forza ultima $P_{P_i} = A_i\sigma_y$ e dalle tensioni $\sigma_0 = \gamma\sigma_u$ per le fibre, avendo indicato con A_i l'area della singola armatura, con γ il rapporto volumetrico delle fibre, con σ_y e σ_u il minimo tra la tensione di snervamento ed il limite di scorrimento rispettivamente delle armature e delle fibre.

Nel modello vengono presi in esame sia la propagazione fragile della frattura sia lo snervamento o lo scorrimento delle armature. I potenziali collassi sono controllati da due parametri con differenti dimensioni fisiche: la tensione di snervamento σ_y o σ_u , $[F][L]^{-2}$, e la tenacità alla frattura K_{IC} , $[F][L]^{-1.5}$. Questi differenti dimensioni rendono il comportamento strutturale dipendente dalla dimensione della trave.

L'analisi dimensionale consente di definire i parametri adimensionali che controllano sinteticamente il tipo di risposta ed il collasso finale della sezione trasversale [6]. In accordo con il modello proposto, la relazione funzionale $M - \phi$ può essere scritta nella forma generale:

$$\mathcal{F}(M, \phi, K_{IC}, E, \rho\sigma_y, h, n, \gamma\sigma_u, w_c; r_i) = 0 \quad (1)$$

nella quale sono state considerate tutte le variabili coinvolte nel problema fisico. E è il modulo di Young della matrice, r_i sono i rapporti adimensionali che descrivono la geometria dell'elemento, ovvero lo spessore normalizzato, b/h , la lunghezza iniziale normalizzata della fessura, a_0/h , la coordinata normalizzata della i esima armatura, c_i/h , la percentuale volumetrica della singola armatura, $\rho_i = A_i/bh$, e la percentuale volumetrica delle fibre, $\gamma = A_f/bh$.

Se si fissano i rapporti geometrici e l'esponente n della legge coesiva e si assume che le armature principali abbiano la medesima area ($\rho_i = \rho/m$, m = numero totale di arma-

ture), la scelta delle quantità dimensionalmente indipendenti K_{IC} e h come fondamentali, conduce all'equazione adimensionale:

$$f\left(\frac{M}{K_{IC}h^{2.5}}, \phi, \frac{Eh^{0.5}}{K_{IC}}, \frac{\rho\sigma_y h^{0.5}}{K_{IC}}, \frac{\gamma\sigma_u h^{0.5}}{K_{IC}}, \frac{w_c}{h}\right) = 0 \quad (2)$$

ovvero

$$f(\tilde{M}, \phi, \tilde{E}, N_P^{(1)}, N_P^{(2)}, \tilde{w}) = 0 \quad (3)$$

ove \tilde{M} , rappresenta la forma adimensionale del momento applicato, mentre $N_P^{(1)}$ ed $N_P^{(2)}$ rappresentano le resistenze ultime delle armature principali e delle fibre in forma adimensionale.

Poichè le trazioni di bridging delle fibre si annullano per aperture della fessura maggiori del valore critico w_c , il prodotto tra il modulo di Young adimensionalizzato \tilde{E} e l'apertura critica della fessura \tilde{w}_c , $\tilde{E}\tilde{w}_c = \frac{Ew_c}{K_{IC}h^{0.5}}$ influenza l'estensione delle zone di processo.

L'equazione (3) diventa pertanto:

$$f(\tilde{M}, \phi, N_P^{(1)}, N_P^{(2)}, \tilde{E}\tilde{w}_c) = 0 \quad (4)$$

con

$$N_P^{(1)} = \frac{\rho\sigma_y h^{0.5}}{K_{IC}}; \quad N_P^{(2)} = \frac{\gamma\sigma_u h^{0.5}}{K_{IC}} \quad (5)$$

che rappresentano i numeri di fragilità per il modello proposto. L'equazione (4) mostra come i comportamenti a flessione risultino fisicamente simili solo se i numeri adimensionali N_P sono uguali e pertanto si hanno risposte differenti quando soltanto la dimensione della trave varia. La risposta strutturale del modello è pertanto governata dalla combinazione dei tre numeri $N_P^{(1)}$, $N_P^{(2)}$ e $\tilde{E}\tilde{w}_c$.

3. Il modello teorico

Il modello è formulato per l'analisi macrostrutturale dei calcestruzzi fibro-rinforzati armati anche con barre, costituiti da una matrice fragile cementizia, da armature longitudinali duttili e da fibre distribuite con continuità all'interno della matrice. Viene simulato teoricamente un processo di carico, controllato dall'avanzamento della fessura, per ottenere il comportamento a flessione di una sezione. La formulazione analitica è stata sviluppata per il caso di m -armature da Bosco e Carpinteri [2], per il caso di fibre distribuite con continuità da Carpinteri e Massabò [3]. Ciò richiede la risoluzione di un problema integrale non lineare che comprende la verifica delle equazioni cinematiche di compatibilità e statiche di equilibrio.

Si consideri una trave inflessa fessurata (fig. 1.a). Si assuma un campo tensionale singolare in corrispondenza dell'apice della fessura e sia K_I il fattore di intensificazione delle tensioni. Mediante il principio di sovrapposizione degli effetti, K_I si può ottenere come somma dei fattori di intensificazione delle tensioni K_{IM} (dovuto al momento flettente

M), K_{Ij} (dovuti alle azioni P_j delle armature) e $K_{I\sigma}$ (dovuti alle azioni di richiusura delle fibre).

Il fattore di intensificazione delle tensioni K_{IM} dovuto al momento flettente esterno M può essere espresso come [1-3]:

$$K_{IM} = \frac{M}{bh^{1.5}} Y_M(\xi) \quad (6)$$

ove $Y_M(\xi)$ è funzione della profondità relativa della fessura ξ [4, 5]. Il fattore $K_{I\sigma}$ è ottenuto per integrazione, lungo la parte cucita della fessura, del prodotto tra il fattore di intensificazione dovuto alle forze opposte di apertura $P_j = 1$, applicate alla generica coordinata ζ_j , e le forze di bridging $\sigma(w)$:

$$K_{I\sigma} = \int_0^\xi \frac{K_{Ij}}{P_j} \sigma(w(\zeta_j)) bh d\zeta_j = \frac{1}{h^{0.5}b} \int_0^\xi \sigma(w(\zeta_j)) Y_P(\xi, \zeta) bh d\zeta_j \quad (7)$$

ove l'integrazione si estende a tutta la fessura mentre la funzione $\sigma(w)$ assume valori diversi da zero solo nei tratti con $w < w_c$. Per la i esima armatura longitudinale si ha invece:

$$K_{Ii} = \frac{P_i}{bh^{0.5}} Y_P(\xi, \zeta_i) \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (8)$$

ove anche $Y_P(\xi, \zeta_i)$ è funzione della profondità relativa della fessura ξ [4, 5].

La fessura si propaga quando K_I eguaglia la tenacità alla frattura della matrice, K_{IC} :

$$K_I = K_{IM} - \sum_{j=1}^m K_{Ij} - K_{I\sigma} = K_{IC}, \quad (9)$$

ovvero:

$$K_{IC} = \frac{M}{h^{1.5}b} Y_M(\xi) - \sigma_y h^{0.5} \sum_{i=1}^m \rho_i \frac{P_i}{P_{Pi}} Y_P(\xi, \zeta_i) - \frac{1}{h^{0.5}b} \int_0^\xi \sigma(w(\zeta)) Y_P(\xi, \zeta) bh d\zeta. \quad (10)$$

Dalle equazioni (6-10) si ottiene il momento adimensionale di propagazione della fessura:

$$\frac{M_F}{K_{IC} h^{1.5} b} = \frac{1}{Y_M(\xi)} \left\{ \frac{N_P^{(1)}}{\rho} \sum_{i=1}^m \rho_i \frac{P_i}{P_{Pi}} Y_P(\xi, \zeta) + N_P^{(2)} \int_0^\xi \frac{\sigma(w(\zeta))}{\rho \sigma_u} Y_P(\xi, \zeta) bh d\zeta + 1 \right\} \quad (11)$$

La rotazione localizzata ϕ della sezione fessurata può essere calcolata mediante il Teorema di Castigliano:

$$\phi = \frac{\partial U_F}{\partial M}, \quad (12)$$

ove U_F è l'energia di deformazione del corpo dovuta all'introduzione della fessura, con i carichi considerati costanti. La relazione che lega U_F , la forza di propagazione generalizzata, \mathcal{G} , il fattore di intensificazione delle tensioni, K_I , ed il modulo di Young, E , è:

$$U_F = \int_0^\xi \mathcal{G} bh dy = \int_0^\xi \frac{K_I^2}{E} bh dy \quad (13)$$

Notando che, per bassi rapporti volumetrici di rinforzo, E può rappresentare sia la matrice che il materiale composito, sostituendo la (13) nella (12) si ha:

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{\partial}{\partial M} \int_0^\xi \frac{(K_{IM} - \sum_{j=1}^m K_{Ij} - K_{I\sigma})^2}{E} bh dy = \quad (14) \\ &= \frac{\partial}{\partial M} \int_0^\xi \frac{bh}{E} \left(K_{IM}^2 + \sum_{j=1}^m K_{Ij}^2 + K_{I\sigma}^2 - 2K_{IM} \sum_{j=1}^m K_{Ij} - 2 \sum_{j=1}^m K_{Ij} K_{I\sigma} - 2K_{IM} K_{I\sigma} \right) dy \end{aligned}$$

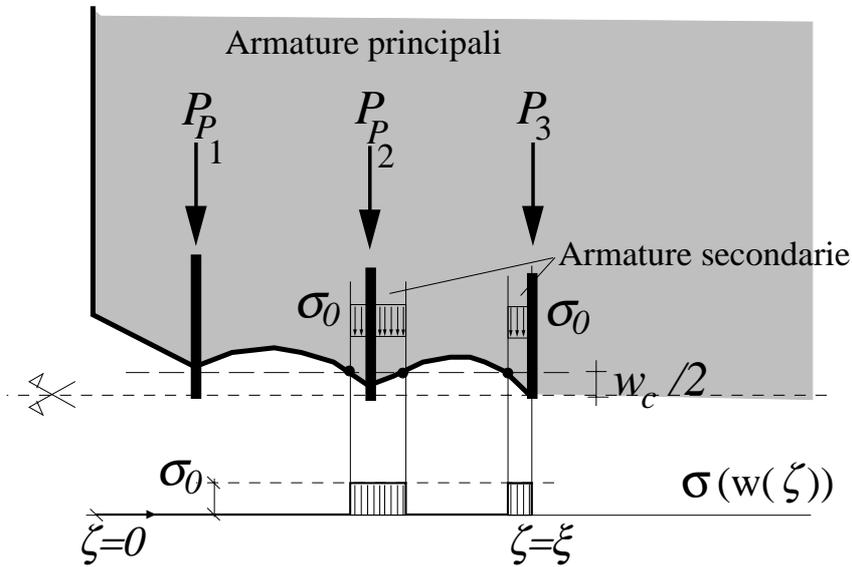


Fig. 2. Azione di cucitura delle armature principali e secondarie sulla fessura.

Se la fessura viene assunta in fase di propagazione, le (5), (6) e (14) forniscono le relazioni costitutive che permettono di legare la rotazione localizzata al momento adimensionale di propagazione:

$$\phi = \frac{2K_{IC}}{Eh^{0.5}} \left\{ \frac{M_F}{K_{IC}h^{1.5}b} \int_0^\xi Y_M^2(y) dy \right. \quad (15)$$

$$\left. - \frac{N_P^{(1)}}{\rho} \sum_{i=1}^m \left[\frac{P_i}{P_{Pi}} \rho_i \int_{\zeta_i}^\xi Y_M(y) Y_P(y, \zeta_i) dy \right] - N_P^{(2)} \int_0^\xi \left(\int_\zeta^\xi \frac{\sigma(w(y))}{\sigma_u} Y_M(y) Y_P(y, \zeta) dy \right) d\zeta \right\}$$

Per una generica relazione $\sigma(w)$, le azioni di chiusura delle fibre sulla fessura sono indeterminate e dipendono dalla funzione incognita di apertura della fessura $w(x)$. Il profilo

della fessura può essere definito in funzione delle proprietà meccaniche e geometriche della sezione trasversale e dei carichi applicati, mediante il Teorema di Castigliano:

$$w(\zeta_k) = \lim_{F \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial F(\zeta_k)} \left\{ \int_0^\xi \frac{K_I^2}{E} bh \, dy \right\} \quad (16)$$

dove $w(\zeta_k)$ è l'apertura della fessura alla generica coordinata ζ_k , F sono le due forze fittizie applicate in ζ_k e K_I è il fattore globale di intensificazione delle tensioni:

$$K_I = K_{IM} - \sum_{j=1}^m K_{Ij} - K_{I\sigma} + K_{IF}, \quad (17)$$

avendo indicato con K_{IF} il fattore di intensificazione delle tensioni dovuto alle forze F . Sostituendo le espressioni dei fattori di intensificazione delle tensioni, l'apertura normalizzata della fessura assume la seguente forma:

$$\begin{aligned} \tilde{w}(\zeta_k) = \frac{w(\zeta_k)}{h} = \frac{2K_{IC}}{Eh^{0.5}} & \left\{ \frac{M_F}{K_{IC}h^{1.5}b} \int_{\zeta_k}^\xi Y_M(y)Y_P(y, \zeta_k) \, dy \right. \\ & - \frac{N_P^{(1)}}{\rho} \sum_{i=1}^m \left[\frac{P_i}{P_{Pi}} \rho_i \int_{\max[\zeta_i, \zeta_k]}^\xi Y_P(\zeta_i, y)Y_P(y, \zeta_k) \, dy \right] \\ & \left. - N_P^{(2)} \int_{\zeta_k}^\xi \left(\int_0^y \frac{\sigma(w(\zeta))}{\sigma_u} Y_P(y, \zeta) \, d\zeta \right) Y_P(y, \zeta_k) \, dy \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

ove l'ultimo addendo rappresenta lo spostamento all'ascissa ζ_k dovuto a una distribuzione a tratti nulla di tensioni $\sigma(w)$, compresa tra 0 e ξ . Le equazioni (11) e (18) definiscono un problema non-lineare staticamente indeterminato. Le reazioni P_i e $\sigma(w)$ sono calcolate usando la procedura numerica iterativa illustrata nel paragrafo seguente, la quale è basata sulla verifica delle equazioni di compatibilità cinematica e di equilibrio statico.

4. Algoritmo di calcolo

La risposta costitutiva a flessione della sezione composita è valutata secondo il seguente schema. Inizialmente viene definita, al variare della profondità della fessura, la configurazione equilibrata e congruente assunta dalla sezione quando la fessura è in uno stato di incipiente propagazione e considerando l'azione delle sole armature principali. Il problema staticamente indeterminato è risolto applicando una serie di equazioni di congruenza, relative all'apertura della fessura al livello delle varie armature, che consentono di determinare le m incognite iperstatiche di primo tentativo P_1, \dots, P_m [2, 3]. Successivamente viene introdotta l'azione delle armature secondarie che, collaborando alla ricucitura della fessura ad una scala ridotta, decrementano gli spostamenti rispetto alla soluzione calcolata in presenza delle sole armature primarie. La soluzione è ottenuta risolvendo iterativamente un problema non lineare.

L'algoritmo di calcolo, utilizzato nella implementazione numerica del modello, calcola gli spostamenti w e le trazioni P delle armature con ampiezze prefissate delle zone di bridging e successivamente ricalcola le ampiezze di tali zone per trovare una nuova

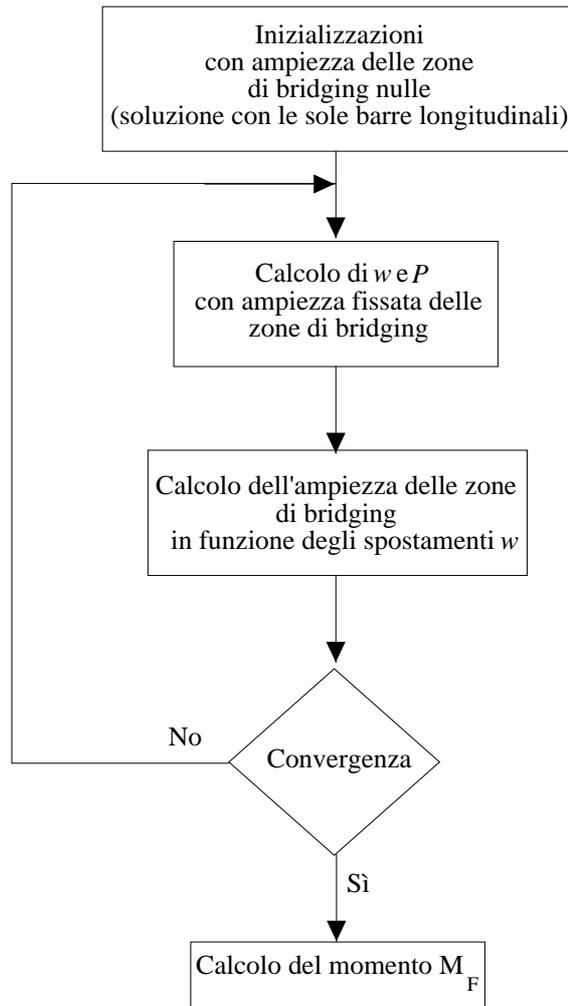


Fig. 3. Diagramma di flusso dell'algoritmo proposto.

soluzione in termini di spostamenti e trazioni delle armature. Si ha cioè uno schema del tipo illustrato in fig. 3.

Nello schema iterativo non compare il momento M_F in quanto esso è esprimibile in funzione dell'apertura della fessura in corrispondenza delle armature e dell'ampiezza delle zone di bridging. Lo schema itera alternativamente su due insiemi di variabili:

- trazioni-aperture della fessura al livello delle armature;
- ascisse che descrivono l'estensione delle zone di bridging;

sino a raggiungere la convergenza. Solo allora si valuta il momento di propagazione M_F .

5. Conclusioni

Il modello proposto rappresenta una estensione del bridged-crack model al caso di contemporanea presenza di armature metalliche e di fibre di rinforzo nella matrice cementizia. Il modello riproduce la risposta strutturale di elementi inflessi in calcestruzzo ad alte

prestazioni e/o fibro-rinforzato. In particolare, poichè i parametri sono di immediato significato fisico e di semplice determinazione sperimentale, esso si presta allo studio delle proprietà meccaniche, quali la resistenza e la duttilità, e dei regimi di propagazione della fessura, in funzione della composizione del calcestruzzo, della tipologia e della densità delle fibre di rinforzo, della disposizione e delle caratteristiche delle armature principali.

Risulta altresì fondamentale la dipendenza del comportamento dell'elemento strutturale dalla scala dimensionale, che dovrà pertanto entrare come parametro fondamentale nella progettazione del materiale composito. Solo utilizzando gli stessi numeri di fragilità è possibile ottenere risposte strutturali fisicamente simili.

Ringraziamenti

La presente ricerca è stata realizzata con il supporto del Ministero dell'Università e della Ricerca Scientifica e Tecnologica (MURST), del Consiglio Nazionale delle Ricerche (CNR) e della Comunità Europea, Contratto EC-TMR N° ERBFMRXCT960062.

Bibliografia

- [1] Carpinteri, A., " *Stability of fracturing process in RC beams*", J. Struct. Eng. (ASCE), **110**, 544-558, **1984**.
- [2] Bosco, C., Carpinteri, A., " *Discontinuous constitutive response of brittle matrix fibrous composites*", J. Mech. Phys. Solids, **43**, 261-274, **1995**.
- [3] Carpinteri, A., Massabò, R., " *Continuous vs discontinuous bridged-crack model for fiber-reinforced materials in flexure*", Int. J. Solids Structures, **34**, 2321-2338, **1997**.
- [4] Okamura, H., Watanabe, K. and Takano, T., " *Deformation and strength of cracked member under bending moment and axial force*", Eng. Fract. Mech., **7**, 531-539, **1975**.
- [5] Tada, H., Paris, P.C., Irwin, G., " *The Stress Analysis of Cracks Handbook*", Paris Productions Incorporated (and Del Research Corporation), St. Louis, Missouri, **1985**.
- [6] Buckingham, E., " *Model experiments and the form of empirical equations*", Transactions ASME, **37**, 263-296, **1915**.
- [7] Bosco, C., Carpinteri, A., " *Softening and snap-through behavior of reinforced elements*", J. Eng. Mechanics (ASCE), **118**, 1564-1577, **1992**.
- [8] Carpinteri, A., Massabò, R., " *Reversal in failure scaling transition of fibrous components*", J. Eng. Mechanics (ASCE), **123**, 107-114, **1997**.
- [9] Carpinteri, A., Massabò, R., " *Bridged versus cohesive crack in the flexural behavior of brittle-matrix composites*", Int. J. of Fract., **81**, 125-145, **1996**.
- [10] A. Carpinteri, G. Ferro, C. Bosco, M. Elkathieb, " *Scale effects and transitional phenomena of reinforced concrete beams*", in Minimum Reinforcement in Concrete Members, Ed. Alberto Carpinteri, Elsevier Science, 1-30, Oxford **1999**.