

Il metodo degli elementi di contorno nello studio del comportamento elasto-softening dei materiali fragili

Alberto Carpinteri, Francesco Ciola e Nicola Pugno

Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Politecnico di Torino

Corso Duca degli Abruzzi 24 - 10129 Torino

Sommario

Nel presente lavoro viene analizzato il comportamento meccanico dei materiali fragili utilizzando un codice di calcolo agli elementi di contorno, appositamente sviluppato.

L'analisi di tale problematica viene svolta contemplando lo stato fessurativo interno al materiale, dal quale non si può prescindere al fine di cogliere la realtà sperimentale, e che si colloca su tre differenti livelli dimensionali: microscala, mesoscala e macroscala.

Lo schema strutturale adottato è costituito da una lastra di dimensione finita, contenente una distribuzione disordinata di macro e mesofessure. L'analisi tensionale permette di determinare i fattori di intensificazione degli sforzi agli apici di ogni fessura, tenendo conto dell'interazione reciproca, dell'interazione fessura-contorno e dell'attrito interno tra le facce delle fessure. Il codice di calcolo permette di seguire l'evoluzione del quadro fessurativo durante l'intero processo di carico, caratterizzato ad ogni passo dalla propagazione della macro o mesofessura più sollecitata.

Inoltre, per tenere conto della microfessurazione diffusa, che causa un degrado progressivo e uniforme in tutto il materiale, si impone una legge di decadimento del modulo elastico in funzione dell'energia di deformazione accumulata durante il processo di carico.

Sulla base di questo modello sono state simulate alcune prove a compressione di provini di differenti dimensione e snellezza. In buon accordo con i dati sperimentali, si è trovata la caratteristica risposta strutturale elasto-softening dei materiali fragili. Inoltre, dall'analisi sia sperimentale sia numerica degli schemi fessurativi, è stato possibile evidenziare la transizione da un comportamento duttile ad uno fragile e da un collasso per *crushing* ad uno per *splitting* all'aumentare della snellezza del provino.

Abstract

In the present paper the mechanical compressive behaviour of quasi-brittle materials is analyzed by means of an ad hoc boundary element algorithm. The analysis is carried out by taking into account the initial crack distribution, which cannot be neglected if the experimental reality (developing over three scale levels, micro-, meso- and macro-scale) is to be modelled.

The algorithm permits to follow the evolution of the crack geometry during the loading process, which is characterized, at each step, by the propagation of the most critical meso- or macro-crack. Moreover, in order to take into account the micro-crack effect causing the progressive decay of the material, a decreasing variation of the elastic modulus is assumed, depending on the strain energy density absorbed during the loading process.

Different geometries, with different slenderness and size-scale, are considered by the proposed model, with and without friction between specimen and loading platens. The numerical simulations represent the experimental results consistently.

1. Introduzione

Il metodo di calcolo proposto rappresenta una evoluzione di quello sviluppato numericamente da Yang [1], che, relativamente ad una lastra infinita fessurata, permette di determinare i fattori di intensificazione degli sforzi alle estremità delle fessure, tenendo conto dell'interazione reciproca. In

questo lavoro la trattazione viene estesa al caso di lastra di dimensione finita con fessure aventi attrito interno tra le facce e interagenti anche con il contorno. L'ipotesi di base consiste nel considerare il materiale elastico lineare, potendo quindi applicare il Principio di Sovrapposizione degli Effetti, come rappresentato in Figura 1.

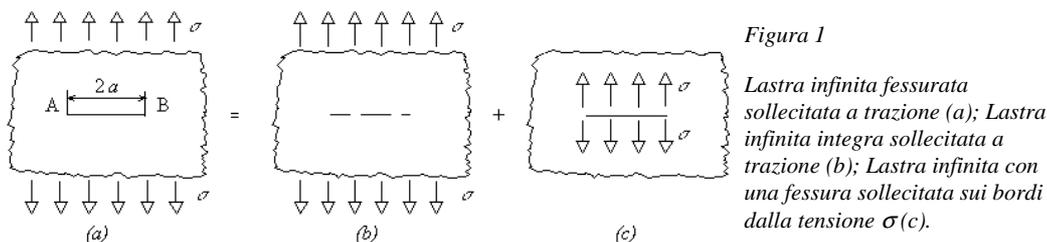


Figura 1
 Lastra infinita fessurata sollecitata a trazione (a); Lastra infinita integra sollecitata a trazione (b); Lastra infinita con una fessura sollecitata sui bordi dalla tensione σ (c).

In Fig. 1(b) si ha semplicemente una lastra infinita senza fessure sottoposta ad uno stato tensionale di trazione. Data l'equivalenza dello schema (a) con gli schemi (b) e (c), il fattore di intensificazione degli sforzi in A e B per lo schema (a) è lo stesso che per lo schema (c). Questa osservazione risulta essere fondamentale per la determinazione dei fattori di intensificazione degli sforzi nel caso di una lastra con numerose fessure.

Riferendosi ancora allo schema (c), si può effettuare l'analisi del campo tensionale nella lastra fessurata. La soluzione è stata fornita da Sneddon in [2], anche per il caso di fessura sollecitata a taglio.

2. Fondamenti teorici

Le considerazioni evidenziate nel precedente paragrafo costituiscono la base per procedere nella determinazione dei fattori di intensificazione degli sforzi per una lastra infinita contenente numerose fessure diversamente posizionate ed orientate.

Considerando inizialmente una lastra con due sole fessure e applicando il Principio di Sovrapposizione degli Effetti (Fig. 2), tramite le relazioni trovate da Sneddon si perviene ad un sistema di quattro equazioni algebriche lineari che legano il vettore $\{P\}$, che ha per elementi le tensioni normali e tangenziali agenti in corrispondenza delle fessure fittizie dello schema (a) sollecitato dalla tensione applicata all'infinito, con il vettore incognito $\{S\}$, che contiene le tensioni normali e tangenziali agenti in corrispondenza delle fessure per gli schemi (b) e (c) tenendo in conto la mutua interazione; in forma compatta si ha $[R]\{S\} = \{P\}$.

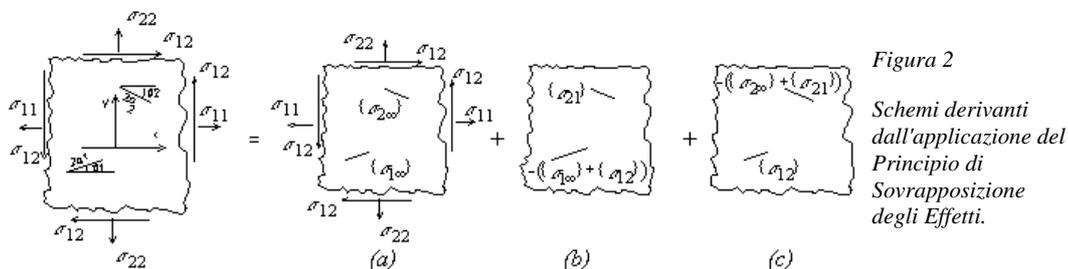


Figura 2
 Schemi derivanti dall'applicazione del Principio di Sovrapposizione degli Effetti.

Nel caso di lastra con M fessure arbitrariamente distribuite si ottiene un sistema lineare di 2M equazioni in 2M incognite la cui soluzione fornisce la tensione tangenziale e la tensione normale fittizie agenti sulle facce di ogni fessura, una volta note le quali si perviene ai valori dei fattori di intensificazione degli sforzi K_I e K_{II} alle due estremità di ogni fessura.

L'introduzione della dimensione finita della lastra comporta il problema aggiuntivo di tenere conto dell'interazione tra le fessure ed il contorno. La soluzione adottata nel programma di calcolo deriva dall'applicazione del metodo dei *Boundary Elements* [3-6].

Si consideri per semplicità una lastra rettangolare sollecitata sul contorno da tensioni normali σ_n^* e tensioni tangenziali τ_t^* variabili lungo il contorno

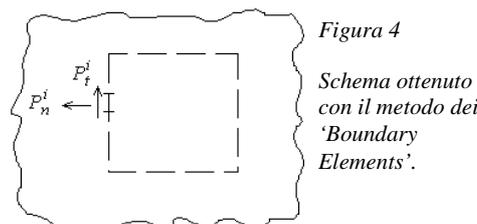
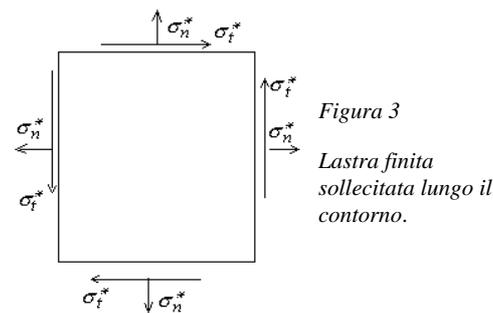
stesso (Fig. 3). La soluzione del problema, mediante il metodo dei *Boundary Elements*, viene ottenuta considerando all'interno di una lastra infinita una linea coincidente con il contorno della struttura in esame; la stessa viene poi divisa in N tratti rettilinei, su ognuno dei quali si considerano applicate le tensioni normali e tangenziali F_n^i e F_t^i (Fig. 4). E' fondamentale osservare che le tensioni applicate F_n^i e F_t^i non sono le tensioni agenti sul contorno della struttura. A causa delle tensioni F_n^i e F_t^i , si generano sul contorno delle tensioni che possono essere espresse, tramite coefficienti noti, nel seguente modo per l'elemento j-esimo:

$$\sigma_{n,t}^j = \sum_{i=1}^N A_{nn,nn}^j F_n^i + \sum_{i=1}^N A_{nt,nt}^j F_t^i \quad (1)$$

Uguagliando ora per ogni tratto rettilineo le tensioni σ_n e σ_t alle tensioni σ_n^* e σ_t^* , si ottiene un sistema lineare di 2N equazioni in 2N incognite la cui soluzione fornisce i valori delle tensioni applicate F_n^i e F_t^i ; note queste ultime, si può risalire al campo tensionale all'interno della lastra.

La formulazione sopra esposta e quella presentata nel precedente paragrafo possono essere fuse insieme per arrivare a determinare i fattori di intensificazione degli sforzi in una lastra multifessurata di dimensione finita; se si hanno M fessure, si perviene alla fine ad un sistema di (2N+2M) equazioni in (2N+2M) incognite, risolto il quale si determinano i fattori di intensificazione degli sforzi K_I e K_{II} alle due estremità di ogni fessura.

Nel codice di calcolo si considera una lastra finita elastica lineare contenente una distribuzione disordinata di meso e macro-fessure. A partire da questa geometria ed in accordo con la formulazione precedente, vengono ricavati i fattori di intensificazione degli sforzi agli apici di ogni fessura. In seguito, facendo riferimento al criterio della massima tensione circonferenziale [7], viene calcolato un fattore di intensificazione degli sforzi equivalente. Comparando il valore massimo che questo assume in corrispondenza dell'apice della fessura più sollecitata col valore critico K_{IC} , è possibile calcolare il valore del carico esterno in corrispondenza del quale la suddetta fessura si propaga. Il codice di calcolo a questo punto modifica la geometria facendo propagare la fessura in corrispondenza dell'apice critico. Il procedimento viene iterato sino ad arrivare al collasso del provino (separazione in due o più parti).



Al fine di determinare la risposta strutturale, è necessario calcolare non solo l'andamento della tensione critica, ma anche quello della cedevolezza, per ricavare il relativo valore dello spostamento.

Se si considera una lastra fessurata di materiale elastico lineare, la cedevolezza totale è data da due contributi: il contributo elastico diffuso, dipendente dalle dimensioni e dal modulo elastico, indicato con C' , ed il contributo dovuto alla presenza delle fessure, la cosiddetta cedevolezza incrementale localizzata C'' . Mentre il primo rimane costante a seguito della propagazione, il secondo ne è profondamente influenzato.

L'ipotesi però di mantenere costante il modulo elastico del materiale durante l'intero processo di carico non rispecchia l'evoluzione fisica del fenomeno. Durante tale processo infatti, nel materiale, ove peraltro sono già presenti macro e mesofessure il cui effetto è rappresentato in C'' , si formano numerose microfessure in prima approssimazione distribuite in modo uniforme, il cui effetto macroscopico si traduce in un degrado progressivo della matrice e, in altri termini, in una diminuzione del modulo elastico del materiale, con conseguente aumento di C' .

Questo particolare aspetto costituisce il punto fondamentale per poter cogliere appieno il comportamento reale del materiale. Rimane però ancora da definire la legge che regola la variazione di E .

In questo lavoro, come peraltro è già stato fatto in altri studi [8-9], si ipotizza che il degrado della matrice sia dipendente dall'energia accumulata nella stessa: in sintesi, quanto maggiore è l'energia accumulata, tanto minore è il modulo elastico.

Se si ipotizza per la matrice una semplice legge elasto-softening come quella diagrammata in Figura 5, l'energia per unità di volume accumulata durante il processo di carico, indicata con W , è rappresentata dall'area tratteggiata. In questo caso il comportamento del materiale si presenta con le seguenti caratteristiche: finché l'energia accumulata W risulta inferiore al valore W_i (area del triangolo OAB di Fig. 5), la risposta è elastica lineare; raggiunto e superato tale valore, inizia il processo di degrado del materiale, con conseguente softening (in questo tratto il modulo elastico del materiale verrà indicato con E^* , mentre si è indicato con E il modulo elastico iniziale). Durante questa fase e coerentemente con il modello bilineare assunto, il legame tra E^* e W è rappresentato da una curva di decadimento il cui andamento qualitativo è riportato in Fig. 6.

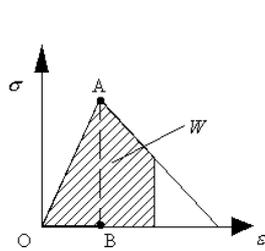


Figura 5
Comportamento
elasto-softening
della matrice.

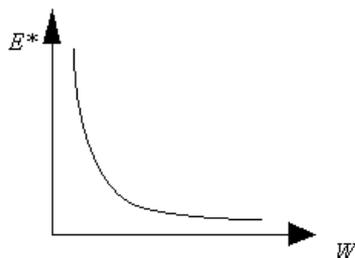


Figura 6
Curva di
decadimento
del modulo
elastico.

3. Risultati sperimentali e numerici

Il programma di calcolo, i cui fondamenti sono stati sopra esposti, è stato utilizzato per simulare il comportamento meccanico a compressione di provini prismatici in calcestruzzo. I dati sperimentali sono stati forniti dall'ENEL-CRIS che, nell'ambito del Round Robin Test promosso dalla RILEM [10,11], ha portato a termine una estesa campagna di prove relative a provini cilindrici e prismatici, con variazione dimensionale e di forma. Relativamente ai provini prismatici, sono state analizzate tre differenti geometrie a base quadrata (di lato 50,100 e 150 millimetri) aventi tre differenti snellezze (0.5, 1, 2), effettuando le prove con o senza attrito tra il provino ed i piattelli della macchina di prova (quest'ultima condizione è stata ottenuta sperimentalmente mediante interposizione di strati in teflon e numericamente imponendo nulle le tensioni tangenziali al contorno). Sulla base delle prove sperimentali sono stati determinati i valori di quei parametri, quali modulo elastico, energia di frattura etc., che vengono introdotti nel programma di calcolo per le simulazioni; per quanto concerne invece il quadro fessurativo, facendo riferimento a quanto esposto in precedenza, per ogni singolo schema strutturale sono state estratte in modo random tre differenti geometrie iniziali, costituite ciascuna da dieci macro o meso-fessure, in modo da considerare tre diverse simulazioni numeriche per ogni prova sperimentale. Nelle Figure 7 e 8 vengono riportati, a titolo d'esempio, i risultati di una simulazione.

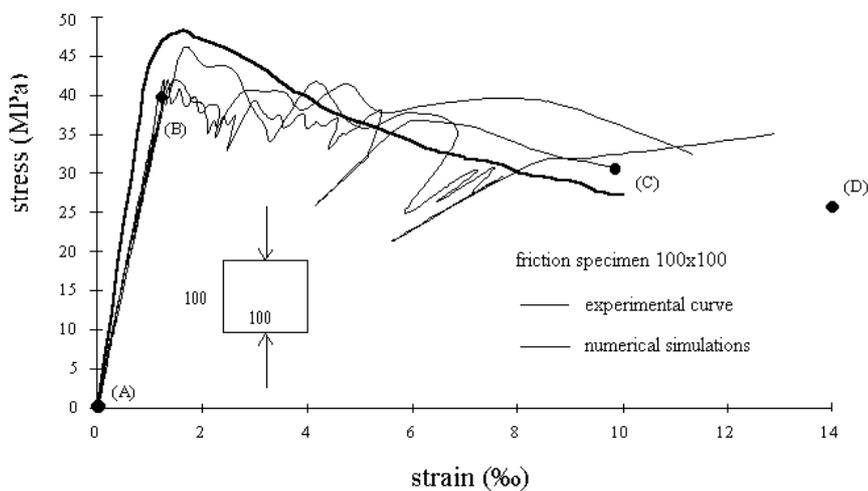


Figura 7
Confronto tra risposte
sperimentali e numeriche.

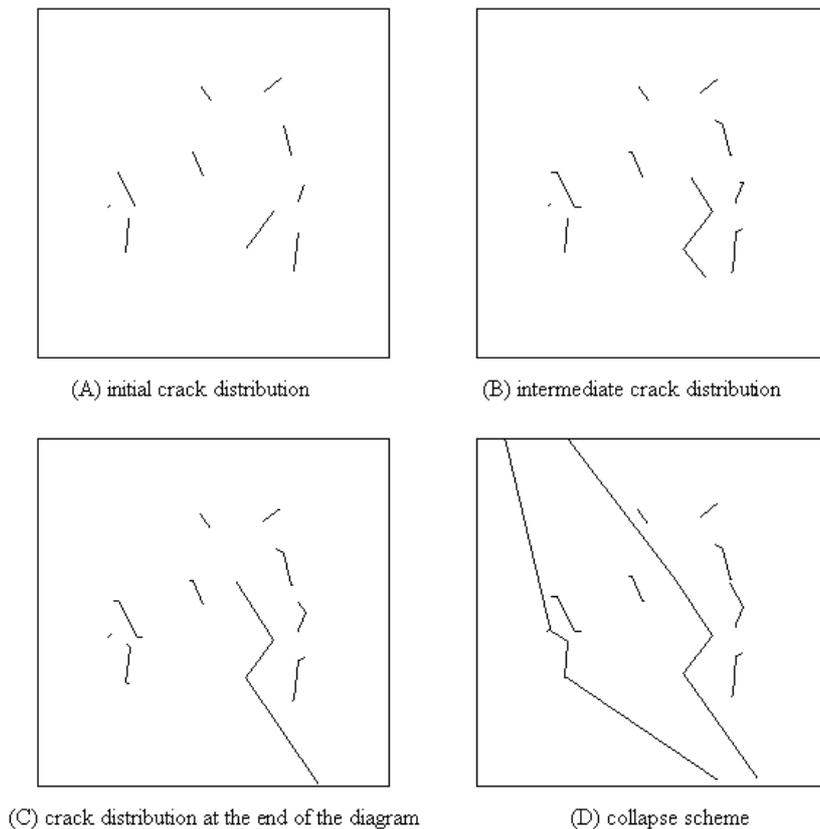


Figura 8

Evoluzione dello schema fessurativo.

4. Conclusioni

Dall'analisi dei risultati presentati nel precedente paragrafo emerge una soddisfacente rispondenza delle simulazioni numeriche con i dati sperimentali.

E' importante sottolineare la centralità del fenomeno fessurativo sulla risposta strutturale. Anche se il collasso strutturale nella fase terminale è governato fondamentalmente dalle meso e macro-fessure, gioca un ruolo altrettanto importante il tenere in conto il degrado diffuso dovuto alla microfessurazione, che porta a cogliere il ramo di softening, tipico della risposta dei materiali fragili, altrimenti non ottenibile [12].

Analizzando più in generale le curve di risposta del materiale emergono alcuni aspetti molto interessanti, messi in luce anche in altri lavori [13-15].

Innanzitutto è importante evidenziare l'influenza dell'attrito. Per tutte e tre le geometrie emerge in maniera molto netta il seguente aspetto: nelle simulazioni con attrito si ha una forte variazione della tensione massima al variare della snellezza, cosa che si presenta invece molto attenuata o addirittura assente nelle simulazioni con teflon. Questo fenomeno si giustifica col fatto che le tensioni tangenziali di attrito che agiscono sulla superficie di interfaccia, fanno sì che in prossimità della stessa si generi una zona di *confinamento* con forma all'incirca conica, all'interno della quale si sviluppa uno stato tensionale di compressione quasi idrostatica, la cui estensione rispetto alle dimensioni del provino è tanto maggiore quanto più il provino è tozzo.

Oltre a ciò, emerge un altro fenomeno di rilievo: l'aumento della snellezza è accompagnato da una contemporanea diminuzione della duttilità. Questo comportamento appare in maniera più o meno evidente in tutte le simulazioni e ricalca, seppure in maniera meno marcata, quanto accade nel caso di sollecitazione di trazione, ove il fenomeno, imputabile ad un effetto di localizzazione della deformazione, può addirittura portare a rami di softening a pendenza positiva (*snap-back*). Nel caso della compressione il fenomeno, evidenziato peraltro in altri lavori, non può trovare giustificazioni simili, imputabili cioè ad una localizzazione della deformazione. E' il passaggio da un meccanismo di collasso di tipo *crushing* ad uno di tipo *splitting* che in realtà determina la transizione duttile-fragile.

Inoltre, poiché la simulazione numerica è controllata dalla propagazione della fessura più sollecitata, è stato possibile cogliere numerosi rami di *snap-back*; le curve di risposta sperimentali (riportate a tratto più spesso), non consentendo di cogliere questi fenomeni, vengono approssimate dalle risposte numeriche (tratto sottile) non direttamente, ma immaginando di eliminare tramite involuppo i tratti di *snap-back*.

Da ultimo è opportuno fare alcune considerazioni sugli schemi strutturali di collasso. Al diminuire della snellezza si nota, anche se in maniera non netta per le motivazioni sopra esposte, una transizione da una tipologia di collasso per *splitting* ad una di collasso per *crushing*, coerentemente con la realtà sperimentale.

Inoltre, relativamente al collasso per *crushing*, è importante ricordare che graficamente (Fig. 8) non viene evidenziato il contributo delle microfessure, particolarmente importante per provini tozzi, come dimostra il rapido degrado del modulo elastico per tali geometrie.

Nei grafici delle Figure 9(a)-(b) si riporta l'andamento del rapporto tra il modulo elastico degradato ed il suo valore iniziale in funzione del rapporto

tra la deformazione ed il suo valore ultimo (ϵ_u rappresenta il valore della deformazione in corrispondenza del quale il modulo elastico si annulla).

Per entrambe le condizioni di prova (con attrito e senza attrito) emerge in maniera chiara come, al diminuire della snellezza, il degrado del modulo elastico risulti essere più rapido. Tale fenomeno è imputabile alla più elevata densità di microfessure che porta al collasso per *crushing* con i provini tozzi. Inoltre, dall'analisi di questi grafici, viene evidenziato come il degrado del modulo elastico si manifesti più marcatamente nelle simulazioni con attrito. Tale fenomeno sembra essere imputabile alla presenza delle zone di confinamento, le quali infatti si oppongono alla propagazione di meso- e macro-fessure.

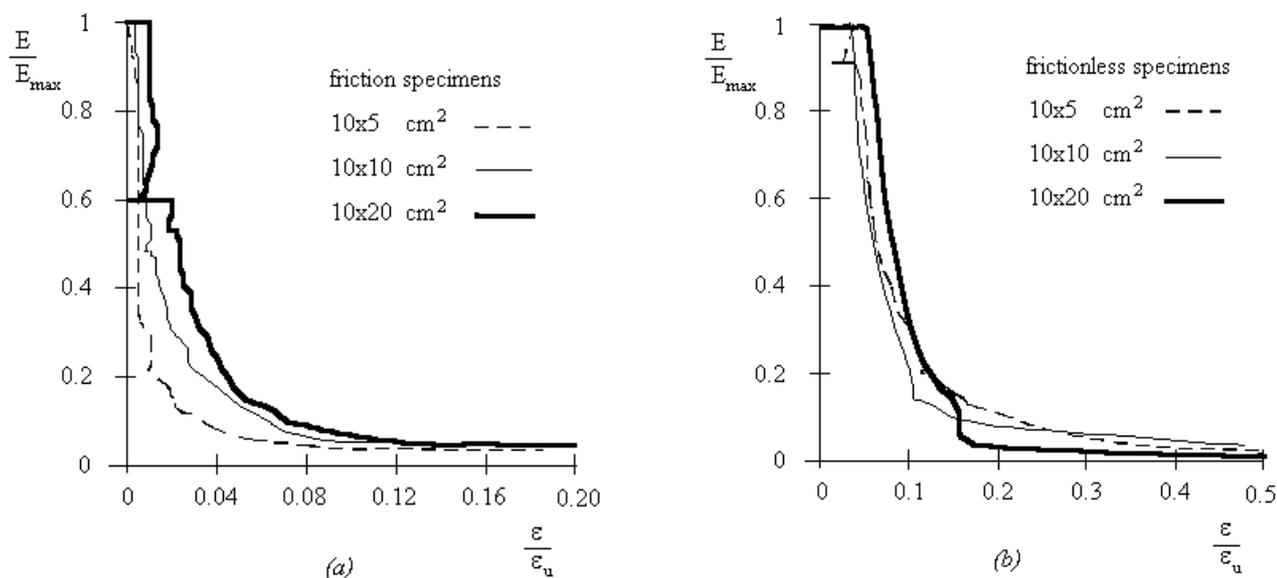


Figura 9

Diagrammi adimensionali del modulo elastico degradato in funzione della deformazione ed al variare della snellezza, per provini con base di lato 10 cm.

Provini con attrito (a); Provini senza attrito (b).

Ringraziamenti

Si ringrazia il Consiglio Nazionale delle Ricerche (CNR) e il Ministero dell'Università e della Ricerca Scientifica (MURST), per aver finanziato il presente lavoro.

Bibliografia

1. G.P. Yang & X.L. Liu, Microcracks interaction in concrete, *Int. Symp. on Concrete Engineering*, Nanjing, China, 1991.
2. N.I. Sneddon & M. Lowengrub, *Crack Problems in The Classical Theory of Elasticity*, John Wiley & Sons, Inc., 1969.
3. S.L. Crouch & A.M. Starfield, *Boundary Element Methods in Solid Mechanics*, George Allen and Unwin, London, 1983.
4. A. Carpinteri & G.P. Yang, Fractal dimension evolution of microcrack net in disordered materials, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 25, 73 (1996).
5. A. Carpinteri & G.P. Yang, Damage process in finite sized brittle specimen with interacting microcracks, *Fracture & Fatigue of Engineering Materials & Structures*, 20, 1105 (1997).

6. A. Carpinteri & G.P. Yang, Size effects in brittle specimen with microcrack interaction, *Computers & Structures*, 63, 429 (1997).
7. F. Erdogan & G.H. Sih, On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear, *Journal of Basic Engineering*, 85, 519 (1963).
8. A. Carpinteri, *Mechanical Damage and Crack Growth in Concrete*, Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1986.
9. A. Carpinteri & G.C. Sih, Damage accumulation and crack growth in bilinear materials with softening: application of strain energy density theory, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 1, 145 (1984).
10. G. Ferrara & M.E. Gobbi, Strain softening of concrete under compression, *Report to RILEM Committee 148 SSC*, ENEL-CRIS Laboratory, 1995.
11. Strain softening of concrete in uniaxial compression, Report of the Round Robin Test carried out by RILEM TC 148 SSC, *Materials & Structures*, 30, 195 (1997).
12. I. Monetto, Evoluzione della frattura nelle lastre multifessurate, *Ph. D. Thesis*, Politecnico di Torino, Italy, 1997.
13. J.G.M. Van Mier, Strain softening of concrete under multiaxial compression, *Ph. D. Thesis*, Eindhoven University of Technology, The Netherlands, 1984.
14. A. Carpinteri, F. Ciola, N. Pugno, G. Ferrara, M.E. Gobbi, Applications of the Boundary Elements Method to the compressive strain-softening behaviour of concrete, *Proceedings FRAMCOS-III*, Gifu, Japan, 1998.
15. A. Carpinteri, F. Ciola, N. Pugno, Numerical methods for the strain-softening response of concrete in uniaxial compression, *Proceedings LOCALISED DAMAGE 98*, Bologna, Italy, 1998.

Atti del convegno

[[Precedente](#)] [[Successiva](#)]

Versione HTML realizzata da

