

Determinazione delle funzioni di forma dell'elemento finito fessurato della trave di Timoshenko

E. Viola*, L. Federici*

**D.I.S.T.A.R.T. Università di Bologna, Viale Risorgimento 2 – 40135 Bologna*

Sommario

La comparsa di una fessura in un elemento strutturale introduce una cedibilità locale che modifica la risposta della struttura. In questa memoria, la presenza del crack viene simulata attraverso una cerniera elastica di opportuna rigidità torsionale.

Per l'elemento finito fessurato di trave di Timoshenko, vengono derivate le funzioni di interpolazione dei campi di spostamento e di rotazione.

L'impiego delle funzioni di interpolazione consente, nel caso più generale, la determinazione dei carichi nodali equivalenti, delle matrici delle masse consistenti, nonché della matrice di rigidità geometrica dell'elemento fessurato.

Le suddette matrici di massa consistenti, rotazionale e traslazionale, e la matrice di rigidità dell'elemento fessurato si riducono a quelle del corrispondente elemento integro di trave di Timoshenko, quando si annulla l'effetto del crack.

Abstract

The presence of a crack in a structural member introduces a local flexibility that affects its dynamic behavior. In this paper the effect of the crack on the deformation of a beam is considered similar to that of an elastic hinge.

The exact shape functions of the cracked beam element are derived from the differential equations of the Timoshenko beam theory.

Four different shape functions were adopted for two segments separated by the crack. The exact shape functions are needed for the derivation of the exact equivalent nodal loads in static analysis, for the derivation of the consistent mass matrix in vibration analysis and for the derivation of the geometric stiffness matrix in the stability analysis.

The stiffness matrix and the consistent translational and rotatory inertia mass matrices of the cracked beam element will reduce to the corresponding matrices of Timoshenko uncracked beam finite element when the crack effect is eliminated.

1. Introduzione

La presenza di un crack in un elemento strutturale influenza il comportamento dinamico del sistema cui appartiene. In una modellazione della struttura ad elementi finiti, si richiedono le matrici di rigidità e di

massa degli elementi integri e fessurati.

Nel presente lavoro, per tenere conto dell'influenza del crack sulle forze elastiche e sulle forze d'inerzia che si sviluppano durante il moto della struttura, vengono definite le funzioni di interpolazione dei campi di spostamento e di rotazione dell'elemento finito fessurato, al fine di calcolarne le matrici di rigidezza e di massa.

Il crack viene simulato da una cerniera elastica di opportuna rigidezza torsionale W , dipendente dalla geometria della fessura e dalla sezione trasversale della trave [1,2]:

$$W = Eh^3 \beta / 6f(\zeta) \quad (1.1)$$

dove E è il modulo di Young del materiale, $f(\zeta)$ è una funzione adimensionale del rapporto $\zeta = a/h$ (profondità relativa del crack) e $\beta = b/h$, essendo b ed h le dimensioni della sezione rettangolare della trave ed a la profondità del difetto.

L'elemento finito fessurato di trave che si considera in seguito è quello di Timoshenko descritto nella fig.1. Tale elemento consiste di due nodi i e j , ciascuno dei quali ha come gradi di libertà lo spostamento trasversale v e la rotazione della sezione θ . Le sezioni si conservano piane durante la flessione, ma non rimangono ortogonali all'asse della trave.

L'elemento è formato da due tratti di trave uniti da una molla rotazionale di rigidezza W . Lo spostamento e la rotazione della sezione sono descritti, per ogni tratto di trave, da una coppia di funzioni che soddisfano alle equazioni omogenee di equilibrio di Timoshenko [3-6]:

$$\frac{d}{dx} \left[GA \left(\frac{dv}{dx} + \theta \right) \right] = 0, \quad \frac{d}{dx} \left(EJ \frac{d\theta}{dx} \right) - GA \left(\frac{dv}{dx} + \theta \right) = 0 \quad (1.2)$$

ove G denota il modulo di elasticità tangenziale, J il momento d'inerzia della sezione della trave e $A = A/\chi$, essendo A l'area della sezione trasversale della trave e χ il fattore di taglio.

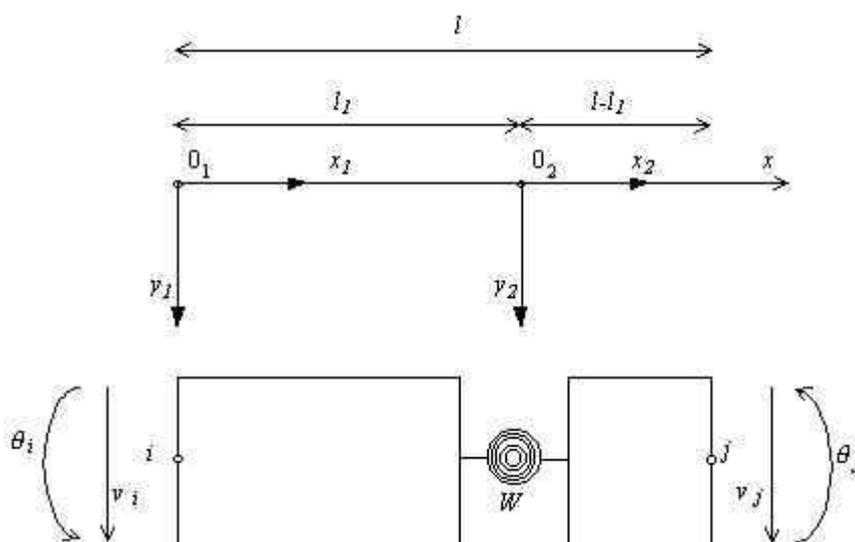


Fig.1 Modello di elemento finito fessurato di trave

Nel caso statico, lo spostamento v e la rotazione θ sono descritti da:

$$v(x) = \begin{cases} v_1(x_1) & 0 \leq x_1 \leq l_1 \\ v_2(x_2) & 0 \leq x_2 \leq l - l_1 \end{cases}, \quad \theta(x) = \begin{cases} \theta_1(x_1) & 0 \leq x_1 \leq l_1 \\ \theta_2(x_2) & 0 \leq x_2 \leq l - l_1 \end{cases} \quad (1.3)$$

che, per il primo tratto di elemento, risultano essere:

$$\begin{cases} v_1(x_1) = a_1 + b_1 x_1 + c_1 x_1^2 + d_1 x_1^3 \\ \theta_1(x_1) = b_1 + 2c_1 x_1 + 3d_1 x_1^2 + \frac{6EJ}{G\Lambda} d_1 \end{cases} \quad 0 \leq x_1 \leq l_1 \quad (1.4)$$

ed analogamente per il secondo tratto:

$$\begin{cases} v_2(x_2) = a_2 + b_2 x_2 + c_2 x_2^2 + d_2 x_2^3 \\ \theta_2(x_2) = b_2 + 2c_2 x_2 + 3d_2 x_2^2 + \frac{6EJ}{G\Lambda} d_2 \end{cases} \quad 0 \leq x_2 \leq l - l_1 \quad (1.5)$$

Utilizzando (1.4), (1.5) e le condizioni al contorno, agli estremi i e j dell'elemento ed in corrispondenza della cerniera elastica, si possono esprimere le coordinate generalizzate:

$$a_k, b_k, c_k, d_k \quad k=1,2 \quad (1.6)$$

in funzione delle variabili nodali v_i, v_j, θ_i e θ_j alle due estremità dell'elemento. Risultata:

$$a_1 = v_i \quad (1.7)$$

$$b_1 = \theta_i - \frac{\Gamma \left[Z \left(l_1 \theta_i + l \theta_j - l_1 \theta_j + v_i - v_j \right) + \frac{l}{2} (\theta_i + \theta_j) + v_i - v_j \right]}{l \left(1 + \Gamma(1+Z) + 4Z - 12Z \frac{l_1}{l} + 12Z \frac{l_1^2}{l^2} \right)} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} c_1 = & \left(\left[-6Z \left(\frac{l_1}{l} \right) \left(\frac{l_1}{l} \theta_i + \theta_j - \frac{l_1}{l} \theta_j + \frac{v_i}{l} - \frac{v_j}{l} \right) - \theta_i \left(\frac{\Gamma}{2} + 2 \right) + \theta_j \left(\frac{\Gamma}{2} - 1 \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{3}{l} (v_i - v_j) / \left[1 + \Gamma(1+Z) + 4Z - 12Z \frac{l_1}{l} + 12Z \frac{l_1^2}{l^2} \right] \right] \right) \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$d_1 = d_2 = \frac{2Z \left(\frac{l_1}{l} \theta_i + \theta_j - \frac{l_1}{l} \theta_j + \frac{v_i}{l} - \frac{v_j}{l} \right) + \theta_i + \theta_j + 2 \frac{v_i}{l} - 2 \frac{v_j}{l}}{l^2 \left[1 + \Gamma(1+Z) + 4Z - 12Z \frac{l_1}{l} + 12Z \frac{l_1^2}{l^2} \right]} \quad (1.10)$$

$$a_2 = l_1 \theta_i + v_i + \frac{-\Gamma l_1 \left(\frac{l_1 \theta_i}{2} + \frac{l \theta_j}{2} + v_i - v_j \right) - \frac{4l_1^3}{l^2} \left(\frac{l_1 \theta_i}{2} + \frac{l \theta_j}{2} + v_i - v_j \right)}{l \left[1 + \Gamma(1+Z) + 4Z - 12Z \frac{l_1}{l} + 12Z \frac{l_1^2}{l^2} \right]} +$$

$$\frac{\left[1+\Gamma(1+Z)+2\left(\frac{x_1}{l}\right)^3-3\left(\frac{x_1}{l}\right)^2-\Gamma\left(\frac{x_1}{l}\right)+Z\left(4-12\frac{l_1}{l}+12\frac{l_1^2}{l^2}-\Gamma\frac{x_1}{l}-6\frac{l_1x_1^2}{l^3}+2\frac{x_1^3}{l^3}\right)\right]}{\left[1+\Gamma(1+Z)+4Z-12Z\frac{l_1}{l}+12Z\frac{l_1^2}{l^2}\right]} \quad (1.11)$$

$$b_2 = \alpha_i - \{(4l^2\alpha_i + \Gamma l^2\alpha_i - 6ll_1\alpha_i + 2l^2\alpha_j - \Gamma l^2\alpha_j - 6ll_1\alpha_j + 6lv_i - 12l_1v_i - 6lv_j + 12l_1v_j)/l^3[1+\Gamma(1+Z)+4Z-12Z\frac{l_1}{l}+12Z\frac{l_1^2}{l^2}]\} \cdot (l_1+lZ) - \{[(l\alpha_i+l\alpha_j + 2v_i - 2v_j + 2l_1\alpha_iZ + 2l\alpha_jZ - 2l_1\alpha_jZ + 2v_iZ - 2v_jZ) \cdot (\Gamma l^2 + 6l_1^2)]/ [2l^3[1+\Gamma(1+Z)+4Z-12Z\frac{l_1}{l}+12Z\frac{l_1^2}{l^2}]]\} \quad (1.12)$$

$$c_2 = -\frac{1}{l} \left[2\alpha_i + \Gamma\frac{\alpha_i}{2} - \frac{3l_1\alpha_i}{l} + \alpha_j - \Gamma\frac{\alpha_j}{2} - \frac{3l_1\alpha_j}{l} + \frac{3v_i}{l} - \frac{6l_1v_i}{l^2} - \frac{3v_j}{l} + \frac{6l_1v_j}{l^2} \right] \frac{1}{\left[1+\Gamma(1+Z)+4Z-12Z\frac{l_1}{l}+12Z\frac{l_1^2}{l^2}\right]} \quad (1.13)$$

avendo posto:

$$\Gamma = \frac{12EJ}{GN^2}, \quad Z = \frac{EJ}{lW} \quad (1.14)$$

2. Derivazione delle funzioni di forma

Lo spostamento v_k lungo l'asse della trave di fig.1, può esprimersi nella forma:

$$v_k(x_k) = \begin{bmatrix} N_{v1k} & N_{v2k} & N_{v3k} & N_{v4k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ \alpha_i \\ v_j \\ \alpha_j \end{bmatrix} = \mathbf{N}_{v,k}^T \mathbf{q} \quad (2.1)$$

dove \mathbf{q} è il vettore degli spostamenti nodali e $\mathbf{N}_{v,k}^T$ è la matrice delle funzioni di forma degli spostamenti, per $k=1,2$.

Per $0 \leq x_1 \leq l_1$ le funzioni di forma o di interpolazione ammettono la rappresentazione:

$$N_{v1} = \frac{\left[1+\Gamma(1+Z)+2\left(\frac{x_1}{l}\right)^3-3\left(\frac{x_1}{l}\right)^2-\Gamma\left(\frac{x_1}{l}\right)+Z\left(4-12\frac{l_1}{l}+12\frac{l_1^2}{l^2}-\Gamma\frac{x_1}{l}-6\frac{l_1x_1^2}{l^3}+2\frac{x_1^3}{l^3}\right)\right]}{\left[1+\Gamma(1+Z)+4Z-12Z\frac{l_1}{l}+12Z\frac{l_1^2}{l^2}\right]} \quad (2.2)$$

$$N_{v21} = l \left[\left(\frac{x_1}{l} \right)^3 - \left(2 + \frac{\Gamma}{2} \right) \left(\frac{x_1}{l} \right)^2 + \left(1 + \frac{\Gamma}{2} \right) \left(\frac{x_1}{l} \right) + Z \left((4 + \Gamma) \frac{x_1}{l} - (12 + \Gamma) \frac{l_1 x_1}{l^2} + \left(12 l_1 - 6 \frac{l_1 x_1}{l} + 2 \frac{x_1^2}{l} \right) \frac{l_1 x_1}{l^3} \right] \right] / \left[1 + \Gamma(1 + Z) + 4Z - 12Z \frac{l_1}{l} + 12Z \frac{l_1^2}{l^2} \right] \quad (2.3)$$

$$N_{v31} = \frac{\left[-2 \left(\frac{x_1}{l} \right)^3 + 3 \left(\frac{x_1}{l} \right)^2 + \Gamma \left(\frac{x_1}{l} \right) + Z \frac{x_1}{l} \left(\Gamma + 6 \frac{l_1 x_1}{l^2} - 2 \frac{x_1^2}{l^2} \right) \right]}{\left[1 + \Gamma(1 + Z) + 4Z - 12Z \frac{l_1}{l} + 12Z \frac{l_1^2}{l^2} \right]} \quad (2.4)$$

$$N_{v41} = \frac{l \left[\left(\frac{x_1}{l} \right)^3 - \left(1 - \frac{\Gamma}{2} \right) \left(\frac{x_1}{l} \right)^2 - \frac{\Gamma}{2} \left(\frac{x_1}{l} \right) + Z \frac{x_1}{l} \left(\Gamma \left(\frac{l_1}{l} - 1 \right) - 6 \frac{l_1 x_1}{l^2} + 6 \frac{l_1^2 x_1}{l^3} + 2 \frac{x_1^2}{l^2} \left(1 - \frac{l_1}{l} \right) \right) \right]}{\left[1 + \Gamma(1 + Z) + 4Z - 12Z \frac{l_1}{l} + 12Z \frac{l_1^2}{l^2} \right]} \quad (2.5)$$

Espressioni analoghe delle funzioni di forma N_{v12} , N_{v22} , N_{v32} e N_{v42} si ricavano per il tratto $0 \leq x_2 \leq l - l_1$. Le funzioni di interpolazione dello spostamento sono rappresentate graficamente in fig.2 per il caso particolare di $Z=0.5$ e $l_1=0.3l$, per tre differenti valori di Γ .

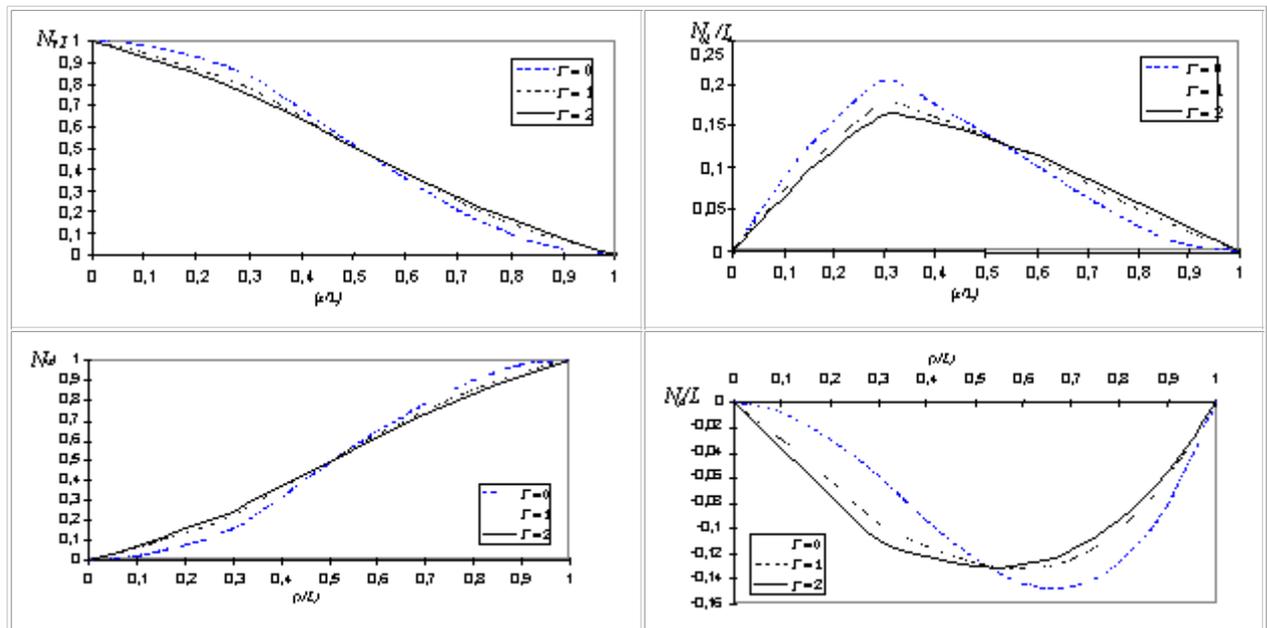


Fig. 2 Funzioni di interpolazione dello spostamento trasversale della trave fessurata

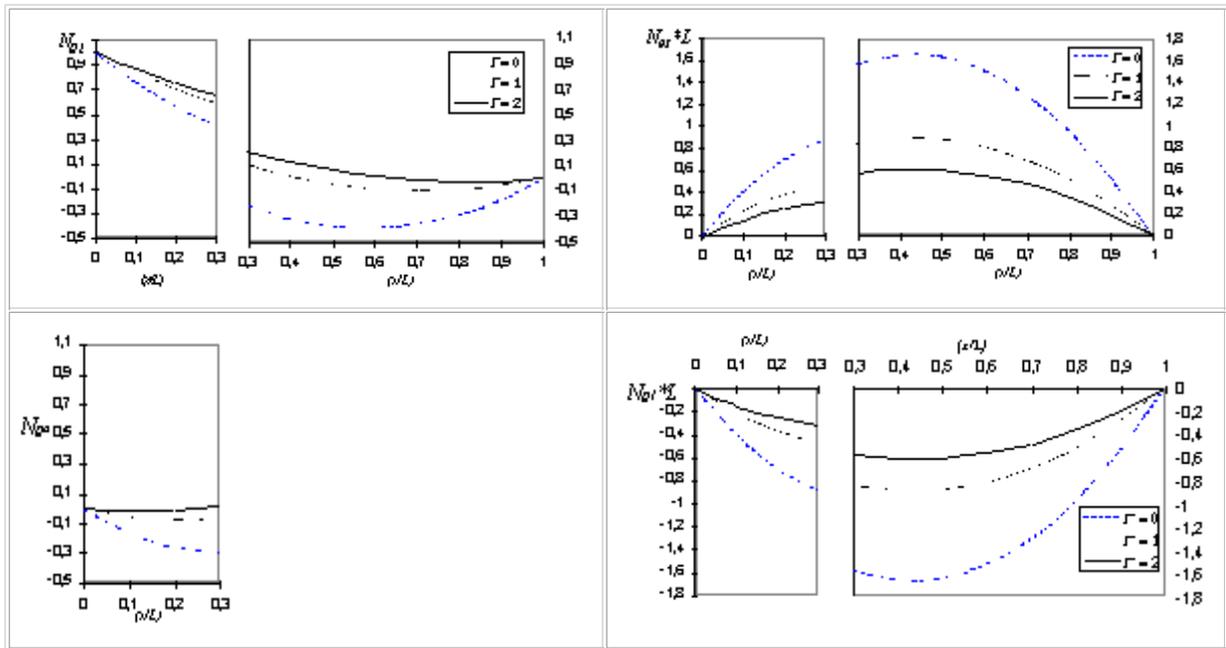


Fig.3 Funzioni di interpolazione della rotazione della trave fessurata

La fig.3 illustra le funzioni di interpolazione $N_{\theta 1}$, $N_{\theta 2}$, $N_{\theta 3}$ e $N_{\theta 4}$ della rotazione della trave fessurata per $Z=0.5$, $l_f=0.3l$ e per tre diversi valori di Γ . Dette funzioni si ricavano con un procedimento analogo a quello impiegato per la determinazione delle (2.2)-(2.5).

Una peculiarità riscontrata nelle curve di fig.3 è la presenza di un salto, in corrispondenza della sezione danneggiata.

3. Derivazione delle matrici delle masse

Per determinare le espressioni delle matrici delle masse traslazionale e rotazionale di un elemento di trave contenente un difetto, si può partire dall'espressione dell'energia cinetica \mathcal{T} , prendendo in considerazione anche l'inerzia rotazionale.

Siano 1 e 2 i nodi dell'elemento finito di trave sollecitato come in fig.4, ciascuno dei quali ha come gradi di libertà lo spostamento trasversale v e la rotazione della sezione θ . Le sezioni si conservano piane durante la flessione, ma non rimangono ortogonali all'asse della trave.

L'energia cinetica dell'elemento finito, tenendo in conto l'inerzia rotazionale, si può scrivere come somma di quattro integrali:

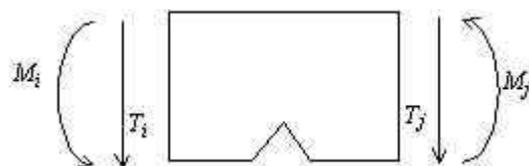


Fig.4 Forze esterne applicate agli estremi dell'elemento fessurato di trave

$$\begin{aligned} \mathcal{T} = & \frac{1}{2} \int_0^{l_1} \omega A \left[\frac{\partial v_1(x_1, t)}{\partial t} \right]^2 dx_1 + \frac{1}{2} \int_0^{l_1} \omega J \left[\frac{\partial \theta_1^i(x_1, t)}{\partial t} \right]^2 dx_1 + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{l_2} \omega A \left[\frac{\partial v_2(x_2, t)}{\partial t} \right]^2 dx_2 + \frac{1}{2} \int_0^{l_2} \omega J \left[\frac{\partial \theta_2^i(x_2, t)}{\partial t} \right]^2 dx_2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Se si impiegano le funzioni di forma per interpolare i campi di spostamento $v_1(x_1, t)$ e $v_2(x_2, t)$ e di rotazione $\theta_1^i(x_1, t)$ e $\theta_2^i(x_2, t)$, si può scrivere:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{m}_t \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{m}_\rho \dot{\mathbf{q}} \quad (3.2)$$

dove

$$\mathbf{m}_t = \int_0^{l_1} \omega A \mathbf{N}_{v_1} \mathbf{N}_{v_1}^T dx_1 + \int_0^{l_2} \omega A \mathbf{N}_{v_2} \mathbf{N}_{v_2}^T dx_2 \quad (3.3)$$

è la matrice delle masse traslazionale e

$$\mathbf{m}_\rho = \int_0^{l_1} \omega J \mathbf{N}_{\theta_1} \mathbf{N}_{\theta_1}^T dx_1 + \int_0^{l_2} \omega J \mathbf{N}_{\theta_2} \mathbf{N}_{\theta_2}^T dx_2 \quad (3.4)$$

è la matrice delle masse rotazionale.

La somma delle (3.3) e (3.4) fornisce la matrice delle masse \mathbf{m} dell'elemento fessurato.

Nella (3.4) $\mathbf{N}_{\theta k}$, per $k=1,2$ denota la matrice delle funzioni di interpolazione della rotazione per il tratto k .

La matrice delle masse traslazionale può prendere la forma:

$$\mathbf{m}_t = \frac{\omega A l}{\left[1 + \Gamma(1+Z) + 4Z - 12 \frac{l_1}{l^2} Z + 12 \frac{l_1^2}{l^2} Z \right]^2} \cdot \begin{bmatrix} m_{11}^t & m_{12}^t & m_{13}^t & m_{14}^t \\ & m_{22}^t & m_{23}^t & m_{24}^t \\ & & m_{33}^t & m_{34}^t \\ \text{SIMM.} & & & m_{44}^t \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

La matrice delle masse rotazionale assume l'aspetto:

$$\mathbf{m}_\rho = \frac{\omega J}{l \left[1 + \Gamma(1+Z) + 4Z - 12 \frac{l_1}{l^2} Z + 12 \frac{l_1^2}{l^2} Z \right]^2} \cdot \begin{bmatrix} m_{11}^\rho & m_{12}^\rho & m_{13}^\rho & m_{14}^\rho \\ & m_{22}^\rho & m_{23}^\rho & m_{24}^\rho \\ & & m_{33}^\rho & m_{34}^\rho \\ \text{SIMM.} & & & m_{44}^\rho \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Gli elementi delle matrici delle masse traslazionale e rotazionale m_{ij}^t e m_{ij}^ρ coincidono con quelli delle masse dell'elemento integro [4-6], quando si annulla l'influenza del crack, ossia per $Z=0$.

4 Matrice di rigidità dell'elemento fessurato

Per il problema in esame, un modo per ottenere la matrice di rigidità dell'elemento fessurato è quello di procedere con il metodo diretto. Secondo la definizione, la matrice di rigidità mette in relazione le forze nodali raccolte nel vettore $\mathbf{Q} = [T_i \ M_i \ T_j \ M_j]^T$ con gli spostamenti nodali $\mathbf{q} = [v_i \ \theta_i \ v_j \ \theta_j]^T$. Risulta:

$$\begin{bmatrix} T_i \\ M_i \\ T_j \\ M_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^c & k_{12}^c & k_{13}^c & k_{14}^c \\ k_{21}^c & k_{22}^c & k_{23}^c & k_{24}^c \\ k_{31}^c & k_{32}^c & k_{33}^c & k_{34}^c \\ k_{41}^c & k_{42}^c & k_{43}^c & k_{44}^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

oppure:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{k}_c \mathbf{q} \quad (4.2)$$

Gli elementi posti al di sopra della diagonale principale della matrice simmetrica di rigidità \mathbf{k}_c dell'elemento fessurato sono riportati qui di seguito:

$$\begin{aligned} k_{11}^c &= \frac{EJ \frac{12}{l^3} (1+Z)}{\left[1 + \Gamma(1+Z) + 4Z - 12 \frac{l_1}{l} Z + 12 \left(\frac{l_1}{l} \right)^2 Z \right]} & k_{12}^c &= \frac{EJ \frac{6}{l^2} \left(1 + 2 \frac{l_1}{l} Z \right)}{\left[1 + \Gamma(1+Z) + 4Z - 12 \frac{l_1}{l} Z + 12 \left(\frac{l_1}{l} \right)^2 Z \right]} \\ k_{13}^c &= \frac{-EJ \frac{12}{l^3} (1+Z)}{\left[1 + \Gamma(1+Z) + 4Z - 12 \frac{l_1}{l} Z + 12 \left(\frac{l_1}{l} \right)^2 Z \right]} & k_{14}^c &= \frac{-EJ \frac{6}{l^2} \left(1 + 2Z - 2 \frac{l_1}{l} Z \right)}{\left[1 + \Gamma(1+Z) + 4Z - 12 \frac{l_1}{l} Z + 12 \left(\frac{l_1}{l} \right)^2 Z \right]} \\ k_{22}^c &= \frac{EJ \left(\frac{4}{l} + \frac{\Gamma}{l} + 12 \frac{l_1^2}{l^3} Z \right)}{\left[1 + \Gamma(1+Z) + 4Z - 12 \frac{l_1}{l} Z + 12 \left(\frac{l_1}{l} \right)^2 Z \right]} & k_{23}^c &= \frac{-EJ \frac{6}{l^2} \left(1 + 2 \frac{l_1}{l} Z \right)}{\left[1 + \Gamma(1+Z) + 4Z - 12 \frac{l_1}{l} Z + 12 \left(\frac{l_1}{l} \right)^2 Z \right]} \\ k_{24}^c &= \frac{\frac{EJ}{l} \left(2 - \Gamma + 12 \frac{l_1}{l} Z - 12 \left(\frac{l_1}{l} \right)^2 Z \right)}{\left[1 + \Gamma(1+Z) + 4Z - 12 \frac{l_1}{l} Z + 12 \left(\frac{l_1}{l} \right)^2 Z \right]} & k_{33}^c &= \frac{EJ \frac{12}{l^3} (1+Z)}{\left[1 + \Gamma(1+Z) + 4Z - 12 \frac{l_1}{l} Z + 12 \left(\frac{l_1}{l} \right)^2 Z \right]} \\ k_{34}^c &= \frac{-EJ \frac{6}{l^2} \left(1 + 2Z - 2 \frac{l_1}{l} Z \right)}{\left[1 + \Gamma(1+Z) + 4Z - 12 \frac{l_1}{l} Z + 12 \left(\frac{l_1}{l} \right)^2 Z \right]} & k_{44}^c &= \frac{\frac{EJ}{l} \left(-2 + \Gamma + 6 \frac{l-l_1}{l} + 6 \frac{l_1}{l} + 12 \frac{l-l_1}{l} Z - 12 \frac{(l-l_1)l_1}{l^2} Z \right)}{\left[1 + \Gamma(1+Z) + 4Z - 12 \frac{l_1}{l} Z + 12 \left(\frac{l_1}{l} \right)^2 Z \right]} \end{aligned}$$

Si può notare come, anche in questo caso, annullando l'influenza del crack gli elementi della matrice di rigidità coincidano con quelli dell'elemento integro [4-6].

* Ringraziamenti: questo lavoro è stato svolto con il contributo finanziario

Bibliografia

1. H. Okamura, K. Watanabe, T. Takano, *Applications of the compliance concept in fracture mechanics*, ASTM STP 536, 423-438, 1973.
2. E. Viola and G. Pascale, *Static analysis fatigue and fracture of cracked beams on elastic foundation*, Eng. Fracture Mechanics, 21(2), 365-375, 1985.
3. S. Timoshenko, D. H. Young, W. Weaver, *Vibrations problems in engineering*, Wiley & Sons, 1974.
4. T. Yokoyama, *Vibration analysis of Timoshenko beam-columns on two-parameter elastic foundations*, Computers & Structures, 61(6), 995-1007, 1996.
5. Friedman, Z., Kosmata, J.B., *An improved two-node Timoshenko beam finite element*, Computers & Structures, 47(3), 473-481, 1993.
6. J. B. Kosmatka, *An improved two-node finite element for stability and natural frequencies of axial-loaded Timoshenko beams*, Computers & Structures, 57(1), 141-149, 1995.

Atti del convegno

[[Precedente](#)] [[Successiva](#)]

Versione HTML realizzata da

