

# APPLICAZIONE DELLA MECCANICA DELLA FRATTURA LINEARE ELASTICA ALLA DETERMINAZIONE DELLE TENSIONI RESIDUE

Marco Beghini, Leonardo Bertini e Francesca Di Puccio

*Dipartimento di Costruzioni Meccaniche e Nucleari, Università degli Studi di Pisa,*

*Via Diotisalvi 2 -56126 Pisa*

## **Sommario**

L'applicazione dei metodi della meccanica della frattura alla valutazione delle tensioni residue attraverso la tecnica del taglio progressivo viene illustrata per un problema piano del tutto generale.

Si suppone che un taglio assimilabile ad una fessura venga introdotto in un corpo piano in cui siano presenti delle tensioni residue; il taglio causa un rilassamento ed una redistribuzione delle tensioni nel corpo con un conseguente rilascio delle deformazioni che può essere misurato attraverso degli estensimetri. Il taglio è supposto dritto ma non necessariamente perpendicolare alla superficie o giacente su un piano di simmetria, per cui le tensioni residue rilasciate sulle facce della fessura possono avere componenti sia normali che tangenziali. Le relazioni tra deformazioni misurate e tensioni residue rilasciate nell'avanzamento del taglio vengono ricavate per generica posizione dell'estensimetro. Le corrispondenti funzioni di influenza sono ottenute tenendo conto del Modo Misto I-II e della loro interazione reciproca attraverso l'applicazione del metodo delle "Weight Functions".

## **Abstract**

*The application of fracture mechanics approach to residual stresses evaluation is reviewed and extended to a general plane problem. The method is related to the progressive cutting technique where the cut is so thin to be considered as a crack and a Linear Elastic Fracture Mechanics approach is then applied.*

*When a crack-like cut is produced in a plane body affected by residual stresses, stresses rearrange and the resulting strain relaxation is measured. The relationship between released residual stresses and measured relaxed strains is discussed for a general position of the strain-gage. Moreover a general condition is assumed where the crack is supposed to be straight but not necessarily perpendicular to the surface or lying in a plane of symmetry; thus residual stress released on the crack-faces has both normal and shear components. In this condition Mode I and Mode II Loadings are produced and also their interaction has to be taken into account. The influence functions for the strain-gages are obtained by the application of the Weight Functions Method.*

## **1. Introduzione**

La determinazione dello stato di tensione residuo attraverso metodi di sezionamento, è basata sul rilassamento delle tensioni prodotto dalla variazione di geometria del corpo dovuta alla rimozione di materia. Tra questi metodi di particolare interesse è quello taglio progressivo proposto una decina di anni fa da Ritchie e Leggatt (1), utilizzato per misure di tensioni residue nello spessore anche in casi in cui la forma della sezione e la distribuzione delle tensioni sono complesse. In questo metodo lo stato di tensione residuo presente in un corpo viene rilassato attraverso l'introduzione di un taglio di profondità crescente; la conseguente redistribuzione delle tensioni nel corpo è correlata ad un rilascio di deformazioni che viene

misurato attraverso degli estensimetri. La procedura richiede quindi la determinazione delle funzioni di influenza che stabiliscono la relazione tra deformazioni misurate, stato di tensione residuo e variazione di geometria dovuta al taglio. La possibilità di ricorrere ai metodi della Meccanica della Frattura Lineare Elastica per determinare queste funzioni è stata provata recentemente da Cheng e Finnie (2-5) nei casi in cui il taglio introdotto nel corpo sia molto sottile come quello prodotto dall'elettroerosione a filo e possa così essere assimilato ad una fessura; questo metodo è noto come "crack compliance method". Approcci analoghi sono stati presentati anche da Kang e Seol (6) e Fett (7).

I fondamenti teorici e le applicazioni dei metodi sopracitati sono limitati al caso in cui è presente solo il primo modo di apertura della fessura; nel presente lavoro si discute l'estensione del metodo ad un caso piano più generale in presenza di modo misto I-II.

## 2. Studio di una fessura in un campo di tensioni residue

Si consideri un corpo piano, isotropo, non soggetto a carichi esterni ma contenente tensioni residue dovute ad esempio al processo di fabbricazione (Fig.1a); si supponga poi di introdurre in tale corpo, partendo dalla superficie, una fessura con un'inclinazione  $\alpha$  rispetto al contorno (Fig.1b). Il taglio prodotto determina un rilassamento delle tensioni residue iniziali ed una conseguente redistribuzione che dipende sia dallo stato iniziale che dalla "nuova" geometria fessurata del corpo.

Si pongono inoltre le seguenti ipotesi: l'introduzione della fessura non produce ulteriori deformazioni plastiche nel corpo (o comunque queste possono essere trascurate), le tensioni si rilassano rimanendo in campo elastico in ogni punto del corpo e la MFLE si suppone applicabile.

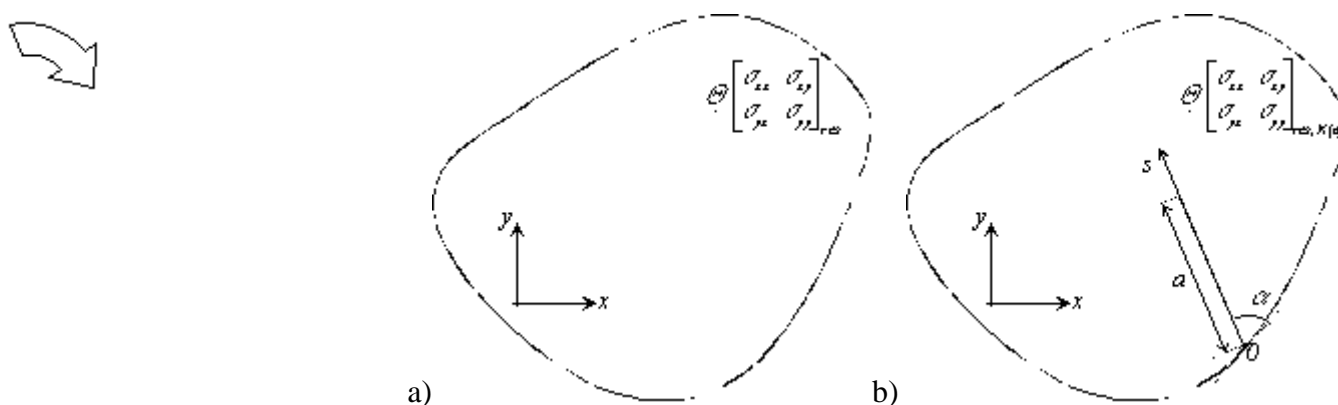


Fig.1 Corpo iniziale con tensioni residue ed introduzione di una fessura.

### 2.1 Primo modo di apertura della fessura

Per semplicità si prende in esame innanzitutto il caso particolare dove sia il corpo che lo stato di tensione residuo sono simmetrici rispetto allo stesso asse e dove un taglio assimilabile ad una fessura viene introdotto lungo quest'asse iniziando dalla superficie. Per simmetria le tensioni residue sul piano della fessura contengono solo la componente normale, per cui il taglio produce solo apertura secondo il Modo I.

Grazie all'applicazione del principio di sovrapposizione degli effetti, illustrato in Fig.2, si ha che le tensioni e le deformazioni dovute all'introduzione della fessura (B) si possono ottenere applicando alle facce della fessura le tensioni che vi esistevano nel corpo integro cambiate di segno (-C) e aggiungendole allo stato di sollecitazione iniziale (A). In generale per una grandezza  $\Phi$  che può rappresentare uno spostamento, una deformazione, una tensione etc. si ha:

$$\Phi_B = \Phi_A - \Phi_C \quad (1)$$

Il vantaggio di questa impostazione è che nel corpo integro (A) molte grandezze sono nulle (come il

fattore di intensificazione degli sforzi) o possono essere prese come riferimento (spostamenti e deformazioni); quindi, effettuando delle misure sperimentali nella configurazione *B*, le relazioni del tipo (1) possono essere utilizzate per determinare lo stato di tensione residuo iniziale:

$$\Phi_{E_{gr}} = -\Phi_C(\sigma_{res}) \quad (2)$$

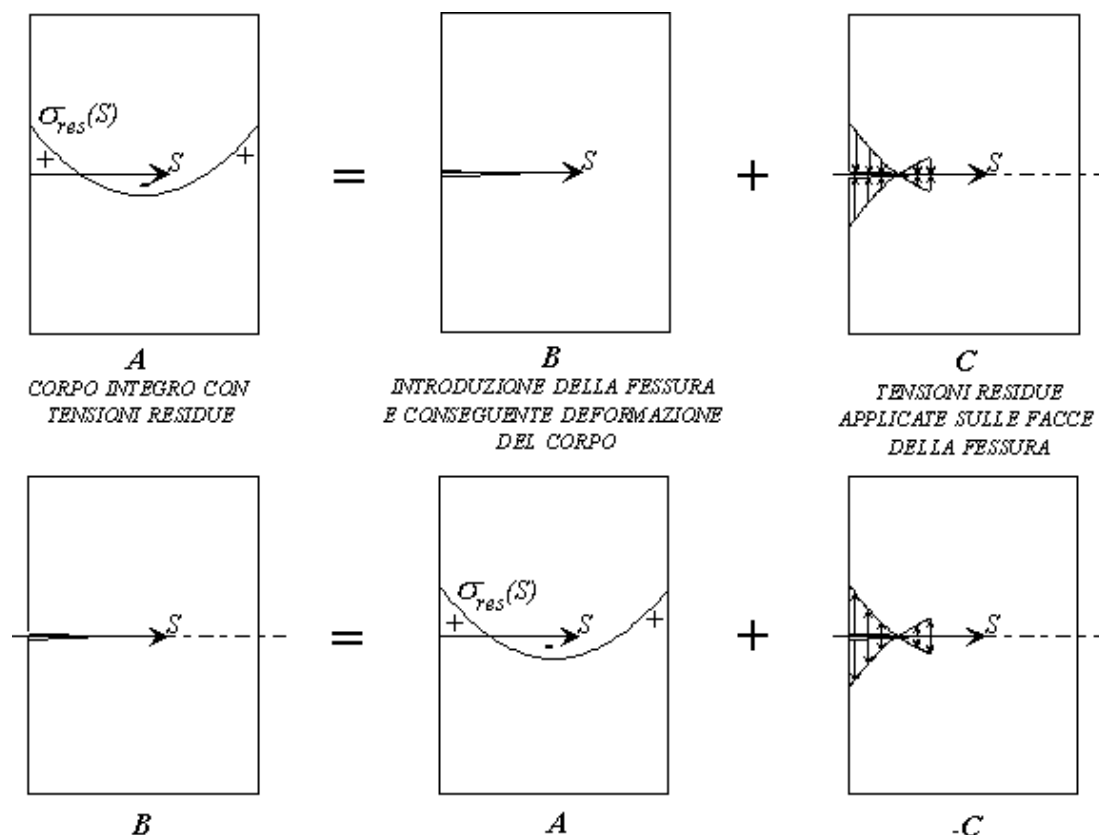


Fig.2 Principio di sovrapposizione degli effetti nel caso di introduzione di una fessura in un corpo contenente tensioni residue.

Su analoghe considerazioni si fonda il metodo delle "Weight Functions" introdotto da Bueckner (8), in base al quale il fattore di intensificazione degli sforzi (FIS), può essere ottenuto dalla seguente relazione:

$$K(a) = \int_0^a h(s, a) \cdot \sigma_{res}(s) \cdot ds \quad (3)$$

dove  $h(s, a)$  è la "Weight Function" per la geometria in esame e  $\sigma_{res}(s)$  è la tensione residua agente sul piano della fessura nel corpo prima dell'introduzione del taglio.

Si considera di seguito un caso più generale dove le ipotesi di simmetria fatte in precedenza non sono più valide e dove la fessura è arbitrariamente orientata e non necessariamente disposta al centro del corpo.

## 2.2 Modo Misto ed influenza reciproca

Nel caso di un problema piano generale, seppur ancora limitato al caso di una fessura dritta, una sollecitazione di tipo misto I-II sarà presente legata a due questioni fondamentali:

- 1) le tensioni residue originarie sul piano della fessura hanno sia una componente normale che una tangenziale;
- 2) la fessura può non giacere sul piano di simmetria.

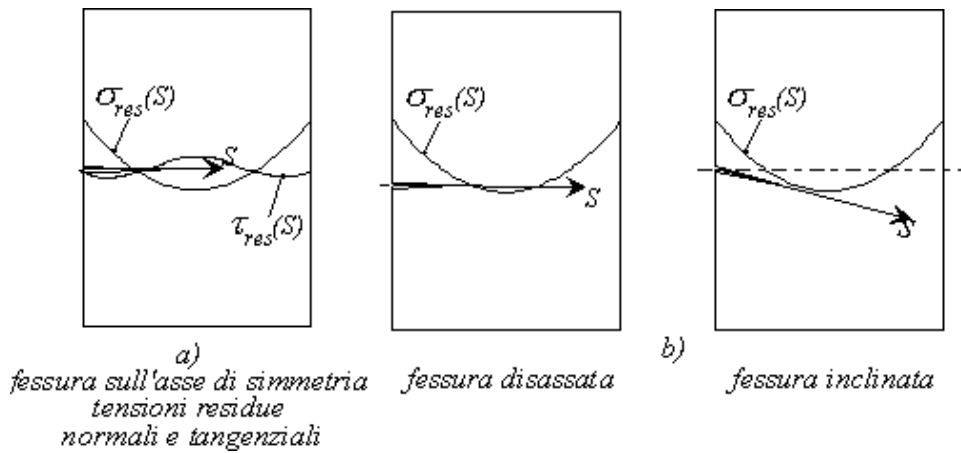


Fig.3 Esempi di sollecitazioni di tipo misto sulla fessura.

Inoltre solo per una fessura giacente sul piano di simmetria, le tensioni normali sulle facce della fessura producono Modo I e quelle tangenziali Modo II, cioè le due azioni possono essere disaccoppiate (Fig.3.a). Negli altri casi in cui la fessura non giace nel piano di simmetria, perché è inclinata o decentrata (Fig.3.b), il problema è un po' più complesso ed un Modo Misto generale I-II è prodotto da azioni normali e tangenziali, richiedendo una particolare attenzione per l'applicazione del metodo delle "Weight Functions".

Il principio di sovrapposizione degli effetti continua a valere, non essendo dipendente dal tipo di sollecitazione, ed in generale il fattore di intensificazione degli sforzi può essere ottenuto dalle seguenti espressioni dove compaiono quattro "Weight Functions":

$$K_I(a) = \int_0^a h_{I,\sigma}(s,a) \cdot \sigma_{res}(s) \cdot ds + \int_0^a h_{I,\tau}(s,a) \cdot \tau_{res}(s) \cdot ds \quad (4.a)$$

$$K_{II}(a) = \int_0^a h_{II,\tau}(s,a) \cdot \tau_{res}(s) \cdot ds + \int_0^a h_{II,\sigma}(s,a) \cdot \sigma_{res}(s) \cdot ds \quad (4.b)$$

Sebbene possa apparire strano, nelle espressioni precedenti si è considerato che tensioni tangenziali possono produrre Modo I cioè spostamenti normali al piano contenente la fessura e viceversa tensioni normali possono produrre Modo II con scorrimenti paralleli alla fessura. Una spiegazione fisica di questo si può avere considerando la differente rigidezza delle parti in cui la fessura separa il corpo.

Sfortunatamente in molti casi l'applicazione delle eqq.(4.a-b) è ancora puramente teorica a causa della mancanza di disponibilità di tutte le "Weight Functions" in particolare delle componenti miste,  $h_{I,t}(s,a)$  e  $h_{II,\sigma}(s,a)$ .

### 3. Misure di tensioni residue

Nel caso in cui si disponga di tutte le "Weight Functions", quanto premesso consente di ottenere le tensioni residue valutando  $K(a)$  per diverse profondità del taglio e risolvendo le equazioni integrali (4.a-b), il che equivale a scrivere la eq.(2) in termini di fattore di intensificazione degli sforzi per diverse lunghezze di fessura. Comunque poiché il FIS non può essere misurato direttamente con soddisfacente accuratezza, si preferisce generalmente fare ricorso ad una valutazione indiretta che utilizzi degli estensimetri. A tale scopo però è necessario determinare una relazione tra il fattore di intensificazione degli sforzi e la deformazione rilevata dallo strumento.

Si riprende ora al corpo nelle condizioni di Fig.1.b e si considera di aver applicato tra due punti  $P$  e  $Q$  del

suo contorno un estensimetro con una griglia attiva di lunghezza  $t$  e di aver disposto un sistema di acquisizione per registrare le deformazioni in funzione della profondità del taglio (Fig.4). La soluzione del problema richiede una funzione che colleghi la deformazione misurata alla lunghezza della fessura ed allo stato di tensione residuo. Di seguito si considera il corpo non vincolato o vincolato isostaticamente.

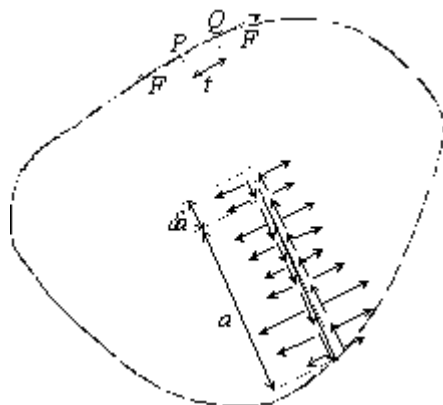


Fig.4 Applicazione del teorema di Castigliano con estensimetro disposto lungo PQ.

Ricorrendo il teorema di Castigliano si introduce una coppia di forze opposte  $F$ , parallele al contorno, applicate in  $P$  ed in  $Q$ . La variazione di energia potenziale elastica  $\delta U$  dovuta ad una variazione virtuale della lunghezza di fessura  $\delta a$  è collegata alla variazione di distanza tra  $P$  e  $Q$  nel seguente modo:

$$\delta(u_Q - u_P) = \left[ \frac{\partial \delta U}{\partial F} \right]_{F=0} \quad (5)$$

dove  $u_Q$  e  $u_P$  indicano le componenti di spostamento nella direzione delle forze  $F$ , rispettivamente per i punti  $Q$  e  $P$ . Poiché l'estensimetro misura la deformazione media della griglia, la lettura corrispondente ad una propagazione del difetto si può scrivere:

$$\delta \varepsilon = \frac{\delta(u_Q - u_P)}{t} = \left[ \frac{1}{t} \left( \frac{\partial \delta U}{\partial F} \right) \right]_{F=0} \quad (6)$$

In termini di fattore di intensificazione degli sforzi,  $\delta U$  può essere ottenuto dalla:

$$\delta U = \frac{B}{E'} (K_I^2 + K_{II}^2) \delta a = \frac{B}{E'} \left[ (K_{I, res} + K_{I, F})^2 + (K_{II, res} + K_{II, F})^2 \right] \delta a \quad (7)$$

dove  $E' = E$  per stato piano di tensione ed  $E' = E / (1 - \nu^2)$  per stato piano di deformazione e  $B$  è lo spessore del corpo. Nell'eq.(7) si sono messi in evidenza i due contributi al fattore di intensificazione degli sforzi, ossia il termine dovuto alle tensioni residue e quello dovuto alla coppia di forze  $F$  (Fig. 4). Combinando le eqq.(6) e (7), essendo  $F=0$  e  $\partial K_F / \partial F = K_F / F$ , si arriva alla seguente espressione:

$$\delta \varepsilon = \frac{2B}{E' F t} (K_{I, res} K_{I, F} + K_{II, res} K_{II, F}) \delta a \quad (8)$$

che dà l'effetto delle tensioni residue sulle misure degli estensimetri in funzione dei valori del FIS. Per determinare la distribuzione delle tensioni residue  $\sigma_{res}(s)$ ,  $\chi_{res}(s)$  agenti sulla linea della fessura, si sostituiscono per i FIS le equazioni (4.a-b) ottenendo l'espressione seguente:

$$\frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \alpha} \frac{E'}{2B} = \int_0^a \left[ h_{I,\sigma}(s, \alpha) \sigma_{res}(s) + h_{I,\tau}(s, \alpha) \tau_{res}(s) \right] ds \cdot g_I(\alpha) + \int_0^a \left[ h_{II,\tau}(s, \alpha) \tau_{res}(s) + h_{II,\sigma}(s, \alpha) \sigma_{res}(s) \right] ds \cdot g_{II}(\alpha) \quad (9)$$

dove

$$g_I(\alpha) = \frac{1}{tF} \int_0^a \left[ h_{I,\sigma}(s, \alpha) \sigma_F(t, s) + h_{I,\tau}(s, \alpha) \tau_F(t, s) \right] ds$$

$$g_{II}(\alpha) = \frac{1}{tF} \int_0^a \left[ h_{II,\tau}(s, \alpha) \tau_F(t, s) + h_{II,\sigma}(s, \alpha) \sigma_F(t, s) \right] ds \quad (10)$$

Tra i termini che compaiono nell'equazione (9):

$\delta \mathcal{E}$  è una quantità misurabile,

$\delta \alpha$  è imposta durante il taglio,

$h_{I,\sigma}(s, \alpha)$ ,  $h_{I,\tau}(s, \alpha)$ ,  $h_{II,\tau}(s, \alpha)$ ,  $h_{II,\sigma}(s, \alpha)$  sono le "Weight Functions" considerate note,

$\sigma_F(t, s)$ ,  $\tau_F(t, s)$  sono le componenti di tensione prodotte dalla coppia di forze  $F$  in corrispondenza del piano della fessura nel corpo integro.

Le funzioni  $\sigma_F(t, s)$ ,  $\tau_F(t, s)$  dipendono dalle dimensioni e dalla posizione degli estensimetri e devono essere determinate, ad esempio attraverso calcoli agli Elementi Finiti essendo note in forma analitica solo per pochi casi, (e.a. per fessure superficiali in un semi piano o in un anello).

Dall'equazione (9) risultano evidenti i diversi contributi presenti nelle misure estensimetriche, in particolare si osserva che l'effetto delle tensioni residue è pesato da una funzione che dipende dalla posizione e dalla dimensioni dell'estensimetro (attraverso  $g_I(\alpha)$  e  $g_{II}(\alpha)$ ) e dalla geometria della fessura (attraverso le "Weight Functions").

Le funzioni  $g_I(\alpha)$  e  $g_{II}(\alpha)$  possono essere determinate sia analiticamente attraverso una semplice integrazione -nel caso in cui le funzioni  $\sigma_F(t, s)$  e  $\tau_F(t, s)$  sono note-, sia ricorrendo ad un approccio di tipo sperimentale. In questo caso si utilizza un provino libero da tensioni residue, avente la stessa geometria e la stessa disposizione di estensimetri del corpo da esaminare, e lo si sottopone ad una sollecitazione che produce una distribuzione di tensioni nota; ad esempio, nel caso di sforzo uniforme, l'equazione (9) diviene:

$$\frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \alpha} \frac{E'}{2B} = \int_0^a h_{I,\sigma}(s, \alpha) \sigma ds \cdot g_I(\alpha) + \int_0^a h_{II,\sigma}(s, \alpha) \sigma ds \cdot g_{II}(\alpha) \quad (11)$$

dove gli integrali possono essere facilmente calcolati, ottenendo così una equazione lineare in due incognite per ogni lunghezza di fessura.

Una volta determinate  $g_I(\alpha)$  e  $g_{II}(\alpha)$ , le componenti di tensioni residue possono essere ottenute risolvendo l'equazione integrale (9), assumendo che esse siano esprimibili attraverso un'espansione in serie del tipo:

$$\sigma_{res}(s) = \sum_{i=0}^n \sigma_i \Psi_i(s) \quad e \quad \tau_{res}(s) = \sum_{i=0}^n \tau_i \Psi_i(s) \quad (12)$$

Nella eq.(12),  $\Psi_i(s)$  rappresenta una opportuna base di funzioni note e  $\sigma_i$  e  $\tau_i$  sono i coefficienti incogniti. Combinando le eqq.(12) e (9), si arriva alla seguente espressione:

$$\frac{\delta \mathcal{E}}{\delta a} \frac{E'}{2B} = \sum_{i=0}^n \sigma_i \left[ g_{I,\sigma}(a) \int_0^a h_{I,\sigma}(s,a) \Psi_i(s) ds + g_{II,\sigma}(a) \int_0^a h_{II,\sigma}(s,a) \Psi_i(s) ds \right] + \sum_{i=0}^n \tau_i \left[ g_{I,\tau}(a) \int_0^a h_{I,\tau}(s,a) \Psi_i(s) ds + g_{II,\tau}(a) \int_0^a h_{II,\tau}(s,a) \Psi_i(s) ds \right] \quad (13)$$

che può essere ulteriormente semplificata:

$$\frac{\delta \mathcal{E}}{\delta a} \frac{E'}{2B} = \sum_{i=0}^n \left[ \sigma_i c_{\sigma_i}(a) + \tau_i c_{\tau_i}(a) \right] \quad (14)$$

Per ogni lunghezza di fessura e per ciascun estensimetro, si ottiene quindi un'equazione lineare in  $2(n+1)$  incognite  $\sigma_i$  e  $\tau_i$ . Il numero di equazioni necessario per risolvere il problema può essere ottenuto sia aumentando il numero  $p$  degli estensimetri, sia incrementando il numero  $m$  di profondità del taglio. In generale, si avrà  $p \cdot m \geq 2(n+1)$  dove se il numero di equazioni è maggiore del numero delle incognite, la soluzione può essere ottenuta risolvendo il sistema nel senso dei minimi quadrati.

Una scelta opportuna del numero degli estensimetri e della loro disposizione può essere ottenuta da un'analisi di stabilità del sistema (14).

#### 4. Conclusioni

L'applicazione dei metodi di Meccanica della Frattura Lineare Elastica per la determinazione delle tensioni residue, come quello della "crack compliance" introdotto da Cheng e Finnie, è stata limitata a casi in cui sia la geometria che le considerazioni sul tipo di sollecitazione facevano supporre la presenza del solo Modo I. Nel presente lavoro si sono richiamati i fondamenti teorici del metodo completandone la formulazione per un problema piano generale in modo da definirne le basi per una sua estensione a casi più complessi. Alcuni esempi di possibili applicazioni del metodo sono riportati in Fig.5, relativi alla determinazione dello stato di tensione residuo in elementi saldati.

La conoscenza dell'insieme delle "Weight Functions" per la geometria in esame è richiesta per la determinazione sia delle componenti normali che di quelle tangenziali delle tensioni residue. La procedura illustrata conduce ad un sistema le cui proprietà matematiche possono essere usate per definire la disposizione ottimale degli estensimetri consentendo una più elevata sensibilità delle misure.

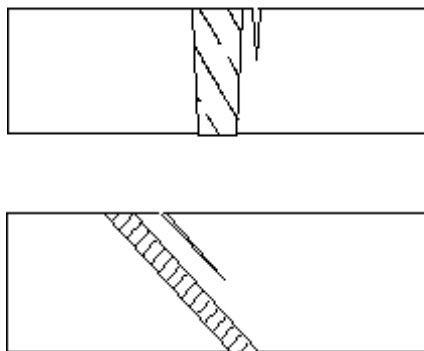


Fig.5 Esempi di possibili applicazioni del metodo.

## Bibliografia

1. Ritchie D., Leggatt R.H.; *Strain*, May 1987, pp.61-70.
2. Cheng Weili, Finnie Iain and Vardar O; *J. Engng Mater. Technol.*, vol.113, April 1991, pp.199-204.
3. Cheng Weili, Finnie Iain; *Engng. Fracture Mech.*, vol.46, n°1, 1993, pp.79-91.
4. Cheng Weili, Finnie Iain and Vardar O; *J. Engng Mater. Technol.*, vol.117, October 1995, pp.373-378.
5. Gremaud M., Cheng Weili, Finnie Iain, Prime M.B.; *J. Engng Mater. Technol.*, vol.116, October 1994, pp.550-560.
6. Kang, K.J. Seol S.Y. O; *J. J. Engng Mater. Technol.*, vol.118, April 1996, pp.217-223.
7. Fett, T.; *Engng. Fracture Mech.*, vol.55, n°4 , 1996, pp.571-576.
8. Bueckner, H.F.; *Z. angew.Math. Mech.*, vol.50, 1970, pp.529-546.

# Atti del convegno

[ [Precedente](#) ] [ [Successiva](#) ]

Versione HTML realizzata da

