

ANALISI TEORICA DI BARRE FESSURATE

SOGGETTE A FLESSIONE ROTANTE

Roberto Brighenti, Andrea Carpinteri e Andrea Spagnoli

Dipartimento di Ingegneria Civile, Università degli Studi di Parma

Viale delle Scienze - 43100 Parma, Italy

Sommario

La nota affronta il problema della propagazione a fatica di difetti superficiali trasversali in barre a sezione circolare piena, soggette a flessione rotante. Per qualunque posizione della fessura rispetto all'asse di sollecitazione, il fattore d'intensificazione degli sforzi lungo il fronte del difetto viene determinato mediante una analisi numerica ad elementi finiti esaedrici ed applicando il principio di sovrapposizione degli effetti. I percorsi di propagazione - che descrivono l'andamento del rapporto d'aspetto della fessura ad arco di ellisse all'aumentare della profondità relativa - sono ricavati tramite un modello teorico a due parametri, e vengono confrontati con quelli ottenuti per la flessione ciclica alterna. Nel caso di flessione rotante il difetto tende ad assumere una configurazione caratterizzata da un rapporto d'aspetto più basso (fronte più piatto) rispetto al caso di flessione ciclica alterna. Inoltre viene mostrato che la vita a fatica calcolata per flessione rotante risulta inferiore rispetto a quella valutata per flessione ciclica alterna.

Abstract

Fatigue growth of a surface flaw in a round bar under rotary bending is examined through a two-parameter theoretical model. For any position of the elliptical-arc part-through defect with respect to the bending moment axis, the stress-intensity factor distribution along the crack front is determined by employing a three-dimensional finite element analysis and the superposition principle. The flaw propagation paths in the diagram of the flaw aspect ratio against the relative crack depth are numerically obtained for rotary bending and compared to those for reversed cyclic bending. It is shown that, during crack growth, the defect front under the former loading case becomes flatter than that under the latter one; moreover the fatigue life for rotary bending is shorter than that for reversed cyclic bending.

1. Introduzione

La rottura di componenti strutturali metallici è spesso causata dalla propagazione di un difetto superficiale - inizialmente piccolo - fino al raggiungimento di una dimensione critica intollerabile [1-10] . Barre a sezione circolare piena, soggette a flessione rotante, sono piuttosto frequenti in applicazioni strutturali : l'elemento cilindrico è cioè in rotazione attorno al proprio asse, mentre su di esso agisce un momento flettente costante. Se il componente contiene un difetto superficiale trasversale, questo vede cambiare continuamente la direzione del vettore momento a causa del movimento rotatorio [11,12] : cioè si ha una flessione deviata.

Nella presente nota viene considerato un difetto superficiale trasversale, per il quale si assume che il

fronte sia descrivibile tramite un arco di ellisse [1-3] . La geometria della fessura è quindi definita mediante due parametri : la profondità relativa $\xi = a / D$ del punto più interno del fronte (punto A) ed il rapporto d'aspetto $\alpha = a / b$ dell'ellisse (Fig.1). La posizione del difetto rispetto al momento flettente M agente (considerato fisso) è definita mediante il parametro angolare ϑ , misurato dall'asse di sollecitazione $l-l$ (ortogonale al vettore M) all'asse di simmetria $c-c$ ed assunto positivo se orario da l a c . Il generico punto P appartenente al fronte della fessura è identificato mediante la coordinata adimensionale $\zeta^* = \zeta / h$, che risulta compresa tra 0 e 2.

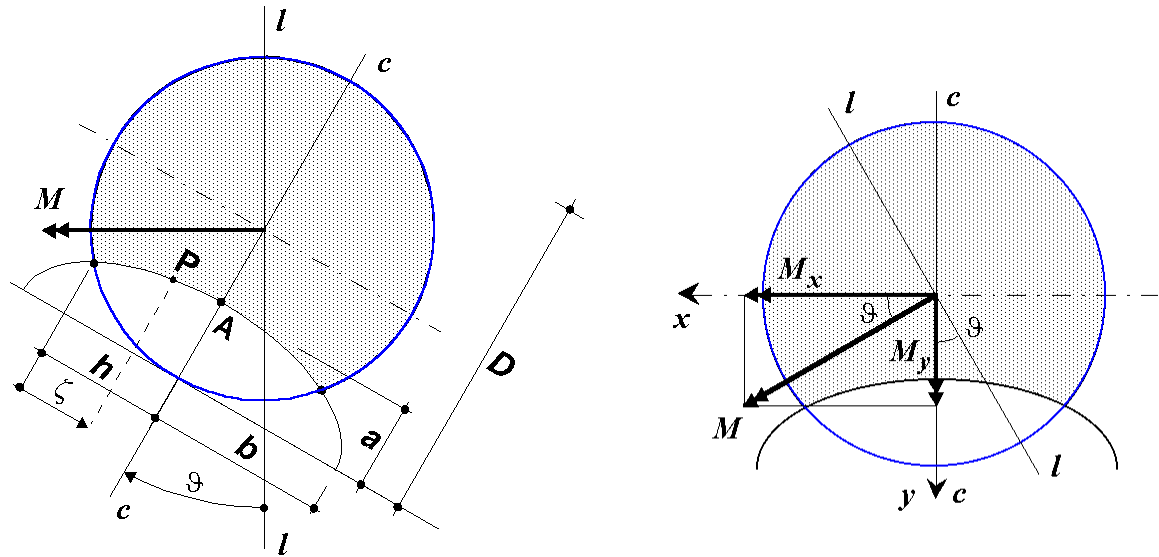


Figura 1 Barra circolare soggetta a flessione rotante, contenente un difetto superficiale trasversale ad arco di ellisse.

L'andamento del fattore di intensificazione degli sforzi (SIF, Stress Intensity Factor) lungo il fronte della fessura per una generica posizione del difetto - individuata dall'angolo ϑ - è ottenuto mediante un'analisi tridimensionale ad elementi finiti esaedrici ed applicando il principio di sovrapposizione degli effetti.

Una volta nota la distribuzione dello SIF al variare delle dimensioni e della posizione del difetto, è possibile studiare l'evoluzione della fessura considerando una opportuna legge di crescita a fatica ed utilizzando un modello di propagazione del fronte del difetto (nel presente studio si adotta un modello a due parametri, proposto in [5]). I risultati delle simulazioni numeriche condotte per il caso della flessione rotante vengono infine confrontati con quelli relativi alla flessione ciclica caratterizzata da un rapporto di fatica pari a -1 e $\vartheta = 0^\circ$.

2. Analisi mediante elementi finiti

I fattori di intensificazione degli sforzi per due particolari posizioni della fessura ($\vartheta = 0^\circ$, caso N.1; $\vartheta = 90^\circ$, caso N.2) possono essere calcolati mediante le relazioni :

$$K_{I(1)} (\vartheta = 0^\circ, \alpha, \xi, \zeta^*) = f_1(\alpha, \xi, \zeta^*) \sigma_M \sqrt{\pi a} , \quad (1)$$

$$K_{I(2)} (\vartheta = 90^\circ, \alpha, \xi, \zeta^*) = f_2(\alpha, \xi, \zeta^*) \sigma_M \sqrt{\pi a} , \quad (2)$$

dove f_1 ed f_2 sono funzioni d'influenza (anche definite "SIF adimensionali"), mentre $\sigma_M = M / (\pi D^3 / 32)$ è il valore della tensione massima dovuta alla flessione nel caso di barra a sezione circolare piena priva di fessure.

I valori del fattore di intensificazione adimensionale f_1 per il caso di fessura nella posizione individuata da $\vartheta = 0^\circ$ (caso N. 1) sono stati oggetto di pubblicazione in [4] , mentre i valori di f_2 relativi alla fessura nella posizione $\vartheta = 90^\circ$ (caso N.2) sono presentati in [13] . Tali risultati sono stati ottenuti mediante un'analisi ad elementi finiti esaedrici, con i quali si è modellata una metà del componente strutturale (mesh realizzata con 798 elementi a 20 nodi), impiegando elementi con singolarità ("quarter-point finite elements") nelle adiacenze del fronte della fessura per riprodurre la singolarità (di ordine pari a $-1/2$) del campo di tensioni e di deformazioni.

Per ogni valore dell'angolo ϑ , il valore dello SIF dovuto al momento flettente M può essere determinato mediante una semplice combinazione lineare dei valori calcolati mediante le formule (1) e (2) :

$$K_{I,M}(\vartheta, \alpha, \xi, \zeta^*) = K_I(M_x) + K_I(M_y) = \quad (3)$$

$$= \cos \vartheta K_{I(1)}(\vartheta=0^\circ, \alpha, \xi, \zeta^*) + \sin \vartheta K_{I(2)}(\vartheta=90^\circ, \alpha, \xi, \zeta^*)$$

La precedente equazione può essere adimensionalizzata dividendo per $\sigma_M \sqrt{\pi a}$:

$$K_{I,M}^*(\vartheta, \alpha, \xi, \zeta^*) = f_1(\alpha, \xi, \zeta^*) \cos \vartheta + f_2(\alpha, \xi, \zeta^*) \sin \vartheta \quad (4)$$

Come esempio, in Fig.2 è riportato lo stress-intensity factor adimensionale per $\xi = 0.3$, $\vartheta = 60^\circ$ e diversi valori di α .

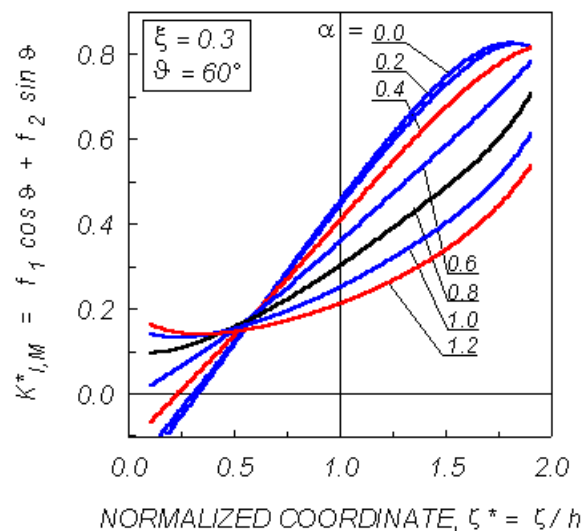


Figura 2 Andamento dello SIF adimensionale per diversi valori di α .

Nella Fig.3 vengono mostrati gli andamenti dello SIF adimensionale lungo il fronte del difetto (curve continue) per una profondità relativa $\xi = 0.2$ ed un rapporto d'aspetto α pari a 0.2 (fronte "piatto", caso (a)) oppure 1.0 (fronte "semicircolare", caso (b)), per diverse posizioni del difetto rispetto al momento flettente (cioè diversi valori di ϑ). In tale figura sono anche riportati i risultati pubblicati in [11] (curve tratteggiate), che appaiono in buon accordo con quelli del presente studio. Inoltre è possibile notare come il massimo (o minimo) di una data curva si ha per $\zeta^* = \bar{\zeta}^*$, con $\bar{\zeta}^*$ influenzato notevolmente dal valore dell'angolo di rotazione ϑ .

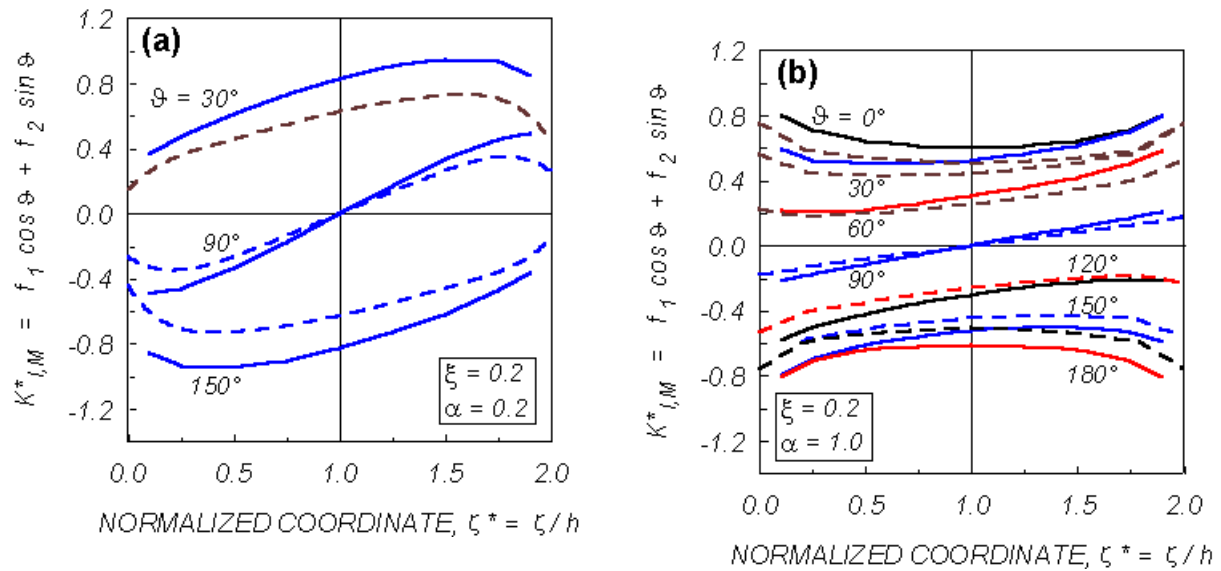


Figura 3 Andamento dello SIF lungo il fronte della fessura, per diversi angoli di rotazione. Risultati di confronto (curve tratteggiate) tratti da [11].

In Fig.4 è rappresentato lo stress intensity factor adimensionale $K_{I,M}^*$ al variare di ϑ , per diversi punti lungo il fronte; viene esaminata una fessura ad arco di cerchio ($\alpha = 1.0$) con profondità relativa $\xi = 0.5$. Si osserva che il valore di ϑ per il quale si verificano i massimi delle diverse curve dipende in modo notevole dal punto considerato sul fronte (cioè dipende da ζ^*): nel seguito tale angolo caratteristico viene indicato con il simbolo ϑK_{max} . Un comportamento del tutto analogo si riscontra anche per valori diversi dei parametri geometrici ξ ed α .

Si consideri ora una data configurazione della fessura, individuata dalla coppia di valori (ξ, α), ed un particolare punto lungo il fronte, identificato mediante la coordinata adimensionale $\zeta^* = \zeta/h$. Nel caso di flessione rotante, il massimo valore dello SIF in tale punto si verifica in corrispondenza dell'angolo ϑK_{max} , definito in precedenza, che può essere determinato uguagliando a zero la derivata dell'equazione (3), eseguita rispetto alla variabile angolare ϑ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_{I,M}(\vartheta, \alpha, \xi, \zeta^*)}{\partial \vartheta} &= & (5) \\ &= -\sin \vartheta_{K_{max}} K_{I(1)}(\vartheta=0^\circ) + \cos \vartheta_{K_{max}} K_{I(2)}(\vartheta=90^\circ) = 0 \end{aligned}$$

ovvero

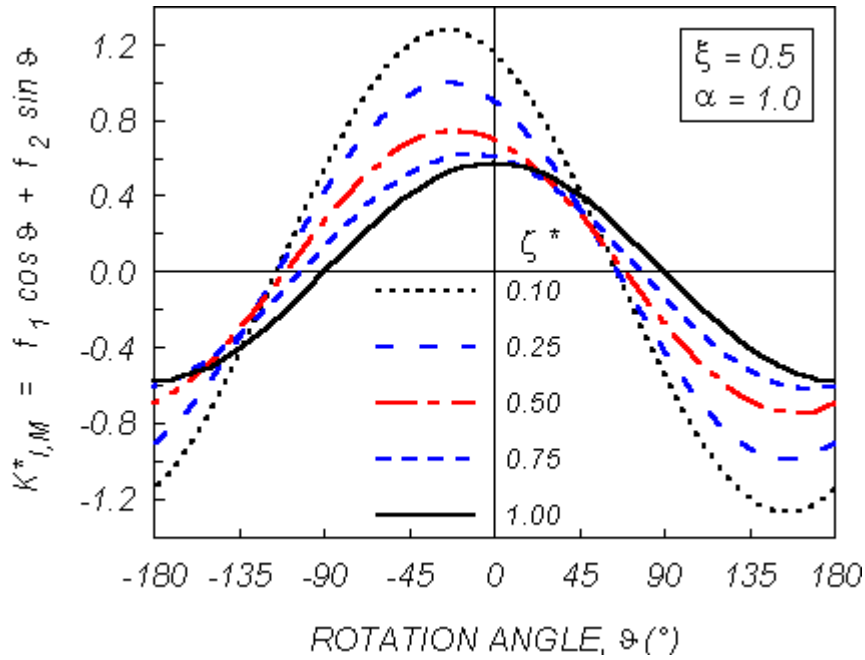


Figura 4 Andamento dello SIF al variare di ϑ , per diversi punti sul fronte della fessura.

$$\vartheta_{K_{max}} = \arctg \left(\frac{K_{I(2)}(\vartheta=90^\circ, \alpha, \xi, \zeta^{**})}{K_{I(1)}(\vartheta=0^\circ, \alpha, \xi, \zeta^{**})} \right) = \arctg \left(\frac{f_2(\alpha, \xi, \zeta^{**})}{f_1(\alpha, \xi, \zeta^{**})} \right) \quad (6)$$

Tale angolo caratteristico dipende dal punto considerato sul fronte, dalla profondità e dal rapporto d'aspetto della fessura. Tuttavia la dipendenza dalla profondità ξ risulta meno accentuata al diminuire del valore di α , cioè per fronti del difetto tendenti alla configurazione rettilinea (Fig. 5).

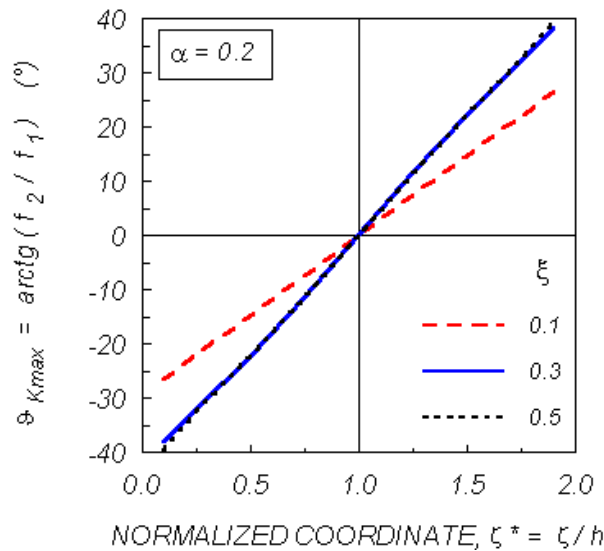


Figura 5 Angolo di rotazione per il quale, in un dato punto (ζ^*) sul fronte della fessura, viene attinto il massimo SIF.

Infine il massimo SIF adimensionale per un determinato punto sul fronte del difetto superficiale in esame può essere ottenuto mediante le equazioni (4) e (6):

$$K_{I,max}^*(\alpha, \xi, j^{**}) = f_1(\alpha, \xi, j^{**}) \cos \vartheta K_{max} + f_2(\alpha, \xi, j^{**}) \sin \vartheta K_{max} \quad (7)$$

Quindi, per una barra di sezione circolare piena, soggetta a flessione rotante e contenente una fessura superficiale trasversale, il massimo valore del fattore di intensificazione degli sforzi ($K_{I,max}^*$, eq.(7)) per un particolare punto del fronte ed il valore dell'angolo di rotazione corrispondente (ϑK_{max} , eq.(6)) possono essere ottenuti semplicemente conoscendo le funzioni d'influenza f_1 ed f_2 , relative solamente a due posizioni del difetto ($\vartheta = 0^\circ$ e $\vartheta = 90^\circ$).

3. Propagazione a fatica della fessura

Precedenti studi sperimentali e teorici hanno mostrato come l'evoluzione (in modo I) di difetti superficiali in piastre e componenti cilindrici soggetti a flessione ciclica tenda ad avvenire secondo percorsi preferenziali di propagazione [3,5], cioè l'accrescimento del difetto, oltre certe profondità, è pressoché indipendente dalla sua configurazione iniziale. In tali analisi è stato assunto il vettore momento agente secondo un asse principale d'inerzia della sezione. In altri lavori è stata invece esaminata la propagazione a fatica per flessione rotante [12].

Nel caso di flessione rotante, ipotizzando che il difetto non si chiuda qualora si venga a trovare in un campo di tensioni di compressione, la massima variazione dello SIF durante una rotazione completa della barra si può calcolare mediante la relazione :

$$\Delta K_{I,rotary}(j^{**}) = 2 K_{I,max}(j^{**}) \quad (8)$$

dove $K_{I,max}(j^{**})$ è il massimo dello SIF durante un intero ciclo (con ϑ che varia da -180° a $+180^\circ$; ad esempio vedi Fig. 4). Invece nel caso di una fessura nella posizione $\bar{\vartheta}$, soggetta a flessione ciclica caratterizzata da un rapporto di fatica pari a R_f , si ha :

$$\Delta K_{I,cyclic}(\bar{\vartheta}, j^{**}) = (1 - R_f) K_{I,M}(\bar{\vartheta}, j^{**}) \quad (9)$$

Adottando per la crescita a fatica di un difetto la legge di Paris, che si basa sulla variazione dello SIF, i percorsi di propagazione (α al variare di ξ) possono essere determinati impiegando un modello a due parametri proposto in [5]. Le curve di propagazione ottenute mediante tale modello sono rappresentate in Fig.6 (curve continue) e si riferiscono a sei diverse configurazioni iniziali del difetto superficiale: profondità relativa $\xi_0 = 0.1$ e rapporto d'aspetto α_0 uguale a 0.001 (fessura con fronte rettilineo, caso N.1), 1.2 (caso N.6) o valori intermedi (casi dal N.2 al N.5). Risulta evidente come le curve continue rappresentate tendano a convergere, con l'aumentare della profondità del difetto, ad un asintoto inclinato; ovviamente tali percorsi di propagazione hanno significato solo per $\xi_0 \leq \xi \leq \xi_f$, dove ξ_f è la profondità relativa del difetto per la quale viene raggiunta la tenacità a frattura del materiale, con conseguente propagazione instabile della fessura e frattura del componente strutturale.

In Fig. 6 sono anche rappresentate le curve di propagazione per il caso di flessione ciclica alterna con $R_f = -1$ e $\vartheta = 0^\circ$ (curve tratteggiate), relative ai sei difetti iniziali considerati per flessione rotante. Tali curve si discostano in modo evidente dalle precedenti. Ciò è dovuto essenzialmente al fatto che, nel caso di flessione rotante, il massimo valore dello SIF per il punto A viene raggiunto per $\vartheta = 0^\circ$, mentre per un generico punto sul fronte della fessura il

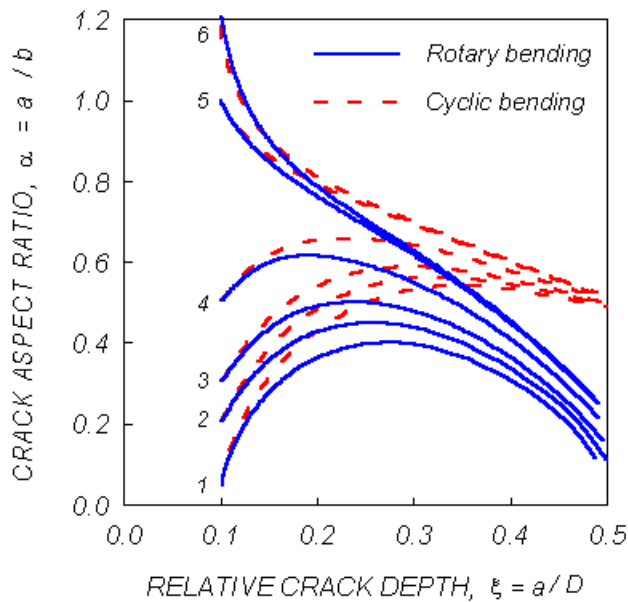


Figura 6

Percorsi di propagazione per sei fessure iniziali nel caso di flessione rotante (curve continue) e di flessione ciclica alterna con $R_f = -1$ (curve tratteggiate).

massimo SIF viene attinto per $\vartheta \neq 0^\circ$ ed è maggiore del valore (nello stesso punto) per $\vartheta = 0^\circ$. Quindi il fronte del difetto, in corrispondenza del punto A, si propaga nello stesso modo per i due tipi di carico in esame; viceversa, per tutti gli altri punti del fronte la propagazione nel caso di flessione rotante è più accentuata, e conseguentemente il difetto tende ad appiattirsi maggiormente rispetto al caso di carico ciclico alterno.

In Fig. 7 sono infine rappresentate le fasi di evoluzione per i difetti iniziali N.1 e N.5, a partire dalla profondità iniziale ($\xi_0 = 0.1$) fino alla profondità $\xi = 0.5$, con passi d'incremento pari a $\Delta \xi = 0.05$, per la flessione rotante (curve continue) e per la flessione ciclica alterna (curve tratteggiate). A lato di alcune di tali configurazioni evolutive ($\xi = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$) sono stati anche riportati i numeri di cicli (in migliaia) necessari per raggiungerle, avendo assunto un valore massimo di tensione, provocata dal momento flettente, pari a $\sigma = 100 \text{ N mm}^{-2}$. I numeri di cicli sottolineati sono relativi al caso di flessione rotante, gli altri sono relativi al caso di flessione ciclica alterna.

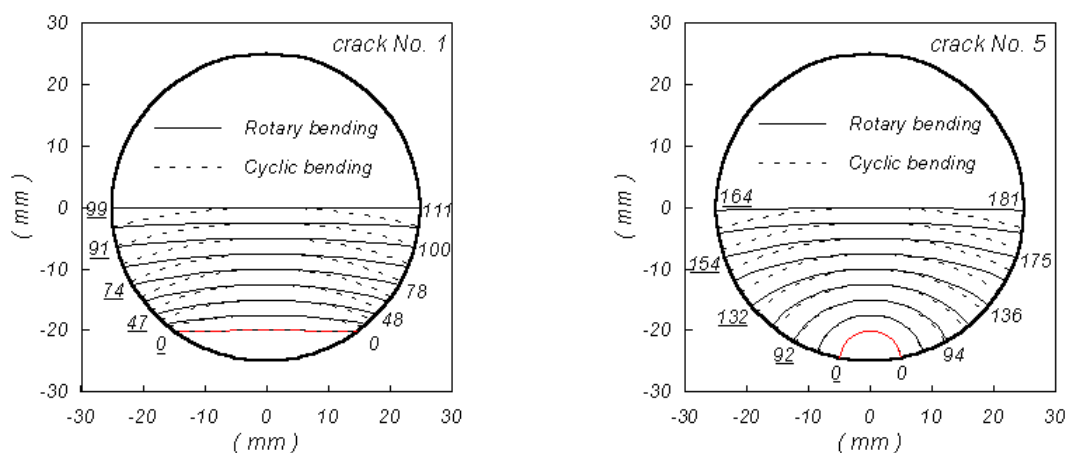


Figura 7 Evoluzione dei difetti iniziali N.1 e N.5 per flessione rotante e per flessione ciclica alterna, e numeri di cicli (in migliaia) per raggiungere alcune delle configurazioni evolutive (i numeri di cicli sono sottolineati nel caso di flessione rotante).

4. Considerazioni conclusive

Al variare della posizione della fessura superficiale trasversale, presente in una barra di sezione circolare piena soggetta a flessione rotante, il valore del fattore d'intensificazione degli sforzi (SIF) in un qualsiasi punto del fronte può essere ottenuto semplicemente applicando il principio di sovrapposizione, mediante una combinazione lineare delle funzioni d'influenza f_1 ed f_2 . Tali funzioni d'influenza rappresentano gli Stress-Intensity Factors adimensionali per due particolari posizioni del difetto : $\vartheta = 0^\circ$ (caso N.1) e $\vartheta = 90^\circ$ (caso N.2). Inoltre, il massimo valore dello SIF per un determinato punto sul fronte e l'angolo di rotazione per il quale tale massimo si verifica possono essere determinati una volta note le funzioni f_1 ed f_2 .

La propagazione a fatica del difetto può essere poi analizzata mediante un modello teorico a due parametri. Per il caso della flessione rotante è stata evidenziata la tendenza della fessura ad appiattirsi maggiormente rispetto al caso della flessione ciclica alterna; inoltre la vita a fatica calcolata per il componente strutturale sottoposto a flessione rotante risulta inferiore rispetto a quella valutata per il caso di flessione ciclica alterna.

Ringraziamenti

Gli autori desiderano ringraziare il Ministero dell'Università e della Ricerca Scientifica e Tecnologica (MURST) e il Consiglio Nazionale delle Ricerche (CNR) per i contributi finanziari ricevuti per svolgere la presente ricerca.

Bibliografia

- 1 R.G. Forman, V. Shivakumar, In *Fracture Mechanics : Seventeenth Volume*, ASTM STP 905, 59 (1986).
- 2 I.S. Raju, J.C. Newman, In *Fracture Mechanics : Seventeenth Volume*, ASTM STP 905, 789 (1986).
- 3 T. Lorentzen, N.E. Kjaer e T.K. Henriksen, *Engng Fract. Mech.*, 23, 1005 (1986).
- 4 A. Carpinteri, *Fatigue Fract. Engng Mater. Struct.*, 15, 1141 (1992).
- 5 A. Carpinteri, *Int. J. Fatigue*, 15, 21 (1993).
- 6 A. Carpinteri (Editor), *Handbook of Fatigue Crack Propagation in Metallic Structures*, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, The Netherlands, 1994.
- 7 A. Carpinteri, R. Brighenti, *Int. J. Fatigue*, 18, 33 (1996).
- 8 A. Carpinteri, R. Brighenti, *Fatigue Fract. Engng Mater. Struct.*, 19, 1471 (1996).
- 9 X.B. Lin, R.A. Smith, *Int. J. Fatigue*, 19, 461 (1997).
- 10 Y.S. Shih, J.J. Chen, *Int. J. Fatigue*, 19, 477 (1997).
- 11 M. Shiratori, T. Miyoshi, Y. Sakai e G.R. Zhang, Analysis and application of influence coefficients for round bar with a semi-elliptical surface crack. In *Handbook of Stress Intensity Factors*, Vol.II (Editor : Y. Murakami), 659 (1987).

12 M. de Fretais, D. François, *Fatigue Fract. Engng Mater. Struct.*, 18, 171 (1995).

13 R. Brighenti, A. Carpinteri e A. Spagnoli, in corso di revisione, *Fatigue Fract. Engng Mater. Struct.* (1998).

Atti del convegno

[[Precedente](#)] [[Successiva](#)]

Versione HTML realizzata da

