

M. Marchetti, C. Missana, B. Paoni

Dipartimento Aerospaziale, Università di Roma "La Sapienza"

Sommario

Lo scopo del presente lavoro è stato quello di individuare dei metodi per stabilire se il grano di propellente si trovi ad operare in condizioni di sicurezza; è stato preso in considerazione un grano privo del difetto ed uno in cui è presente una cricca che procede dall'interno verso l'esterno. Nel primo caso l'analisi è stata eseguita facendo riferimento ad una geometria tridimensionale relativa ad un grano con sezione interna circolare, mentre nel secondo caso la geometria di riferimento è bidimensionale essendo stata presa in considerazione la sezione orizzontale di un grano avente sezione interna stellare.

I metodi presi in esame sono quello della massima deformazione ottaedrale e quello della tenacità a frattura.

Abstract

The purpose of this work is to define some methods for the prediction of grain security during its operation life; so we have studied a grain without failure and one with a crack that proceeds from the internal surface to the case. In the first configuration we have studied a three-dimensional grain with a circular port while in the second we have a two-dimensional star shaped grain.

The methods used for these analyses are the maximum octahedral strain and the fracture toughness respectively.

1. Introduzione

I propellenti solidi compositi sono costituiti da una miscela di particelle di ossidante immerse in una matrice di combustibile; le caratteristiche meccaniche del propellente sono influenzate soprattutto dal legante che è costituito da polimeri che presentano un comportamento spiccatamente viscoelastico.

Nella teoria viscoelastica lo sforzo dipende dalla deformazione e dalle sue derivate; nell'ambito della teoria lineare possiamo far riferimento al principio di sovrapposizione di Boltzmann per cui lo sforzo dipenderà esclusivamente dalla storia temporale della deformazione fino all'istante preso in considerazione. In definitiva se la storia della deformazione è continua possiamo introdurre una rappresentazione in forma integrale della relazione costitutiva data da:

$$\sigma_{ij}(t) = \varepsilon_{ij}(t) \cdot D_{ijkl}(0) + \int_0^t \varepsilon_{ij}(t-s) \cdot \frac{dD_{ijkl}(s)}{ds} \cdot ds \quad (1)$$

$D(t)$ è un tensore del quarto ordine "Relaxation Function" analogo alla matrice di rigidità dipendente dal tempo; è una matrice simmetrica e poiché consideriamo il materiale isotropo solo due coefficienti

risulteranno linearmente indipendenti: il modulo di rilassamento al taglio $G(t)$ e quello a compressione $K(t)$. Altri due parametri, il modulo di rilassamento elastico $E(t)$ ed il coefficiente di Poisson $\nu(t)$ si ricavano da $G(t)$ e $K(t)$ attraverso le relazioni:

$$E(t) = \frac{9G(t) \cdot K(t)}{3K(t) + G(t)}; \quad \nu(t) = \frac{3K(t) - 2G(t)}{6K(t) + 2G(t)}. \quad (2)$$

2. Analisi del Grano Privo del Difetto

2.1 Determinazione delle Sollecitazioni e delle Deformazioni

Un grano, in generale, è sottoposto a stress di pressione, termici, d'accelerazione e d'immagazzinamento che danno vita a sollecitazioni e deformazioni che possono esprimersi con espressioni del tipo:

$$\sigma = \sigma(I, x, E, \nu, E_c, \nu_c); \quad \varepsilon = \varepsilon(I, x, E, \nu, E_c, \nu_c). \quad (3)$$

I è l'ingresso generico (pressione, temperatura, accelerazione), x è il punto in esame, E, ν ed E_c, ν_c sono il modulo di Young e di Poisson del propellente e dell'involucro. Le caratteristiche del propellente, a causa della sua natura viscoelastica, sono funzioni del tempo.

Attraverso prove sperimentali di rilassamento si ottiene la $E_{rel}(t)$ che può essere espressa mediante uno sviluppo in serie:

$$E_{rel}(t) = E_e + \sum_k E_k e^{-t/\tau_k}. \quad (4)$$

dove E_e, E_k, τ_k sono costanti ricavate dall'interpolazione dei punti sperimentali.

Nel caso in cui l'ingresso I sia di forma qualsiasi può essere ricondotto ad una somma di gradini; pertanto la risposta (σ, ε) può essere calcolata servendosi della espressione dovuta a Duhamel:

$$\sigma(t) = \int_0^t \sigma(t-\tau) \left[\frac{d(\tau)}{d\tau} \right] \cdot d\tau; \quad \varepsilon(t) = \int_0^t \varepsilon(t-\tau) \left[\frac{d(\tau)}{d\tau} \right] \cdot d\tau. \quad (5)$$

dove $\sigma(t-\tau), \varepsilon(t-\tau)$ sono le risposte al tempo $0 < t-\tau < t$ al gradino unitario ($I = 1$) che si ha in corrispondenza del tempo τ .

Si consideri un grano di propellente racchiuso da griglie ed inserito in un tubo d'alluminio.

Riportiamo l'esempio di calcolo in un caso in cui la sollecitazione e la deformazione sono generate da una pressione interna. Per quanto riguarda gli sforzi si ha:

$$\sigma_{r,\theta} = \pm \frac{a^2 b^2 (p_0 - p_i)}{r^2 (b^2 - a^2)} + \frac{p_i a^2 - p_0 b^2}{b^2 - a^2}; \quad \sigma_z = -p'. \quad (6)$$

Dove p_0, p' e p_i , sono rispettivamente la pressione fra involucro e propellente, la pressione fra griglie e propellente e la pressione interna, a è il raggio interno del grano, b il raggio esterno del grano, r il raggio generico tale che $a < r < b$.

Per quanto riguarda le deformazioni le relazioni sono:

$$\varepsilon_{r,\theta} = \frac{1}{E} \left[\pm(1+\nu) \frac{a^2 b^2 (p_0 - p_i)}{r^2 (b^2 - a^2)} + (1-\nu) \frac{p_i a^2 - p_0 b^2}{b^2 - a^2} + p' \right]; \quad \varepsilon_z = -\frac{1}{E} \left[p' + 2\nu \frac{p_i a^2 - p_0 b^2}{b^2 - a^2} \right]. \quad (7)$$

Facendo uso del codice di calcolo MARC è stata eseguita un'analisi agli elementi finiti su di un cilindro sottoposto a diversi valori della pressione interna. La geometria presa in esame ci permette di creare un modello per l'analisi numerica di tipo assialsimmetrico. Prendendo in esame il nodo corrispondente allo spigolo libero della base del grano si può valutare l'andamento del valore degli sforzi e delle deformazioni nell'intervallo temporale $10^{-6} \div 10^5$ secondi, permettendo così di avere un quadro del fenomeno viscoelastico (Fig. 1 e 2).

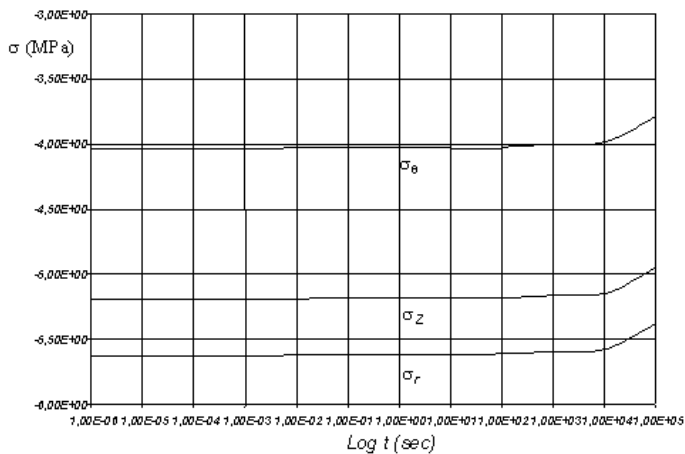


Figura 1

Sforzo in funzione del tempo

($p_i = 1 \text{ MPa}$).

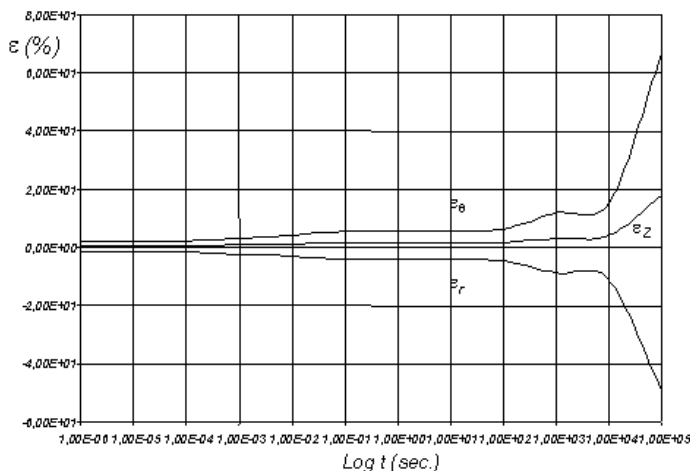


Figura 2

Deformazione in funzione del tempo

($p_i = 1 \text{ MPa}$).

2.2 Valutazione della Rottura e Criterio di Sicurezza

Sono state effettuate prove di trazione su provini di tipo JANNAF B, forniti dalla Fiat-Avio di Colleferro, a sezione rettangolare e con lunghezza effettiva di 68,6 mm. La macchina utilizzata è un'Instron tipo TT-CM1 che permette di mantenere la velocità di prova costante e far variare la temperatura da valori positivi a negativi rispetto allo zero. Le prove sono state effettuate a tre differenti velocità ($V_m = 0.5, 5, 50 \text{ mm/min.}$) per sette diverse temperature (da -57°C a 76°C). Per eliminare la dipendenza dalla temperatura è stata introdotta la relazione di Williams-Landel-Ferry:

$$\log a_T = \log \frac{R_R}{R_T} = -\frac{7.84 \cdot (T - T_R)}{171.37 + (T - T_R)}. \quad (8)$$

dove T_R e T sono rispettivamente la temperatura di riferimento pari a 298 K e quella operativa, mentre le due costanti si trovano sperimentalmente.

Il criterio di sicurezza preso in esame è quello della massima deformazione ottaedrale, che deriva dalla teoria sviluppata da Mohr. Questo criterio non fa altro che ridurre le tre direzioni principali ad un'unica direzione, quindi permette di porre in relazione i risultati delle prove sperimentali che sono di tipo monoassiali, con i risultati che derivano dall'implementazione numerica al MARC di tipo triassiale.

L'espressione seguente mette in relazione la sollecitazione ottaedrica con le sollecitazioni dovute sia agli sforzi di taglio sia a quelli normali rispetto alle direzioni principali:

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (9)$$

Riconducendoci alla (9), per una prova sperimentale di tipo monoassiale il solo sforzo principale diverso da zero lo possiamo indicare con σ_f , ed il valore corrispondente dell'energia totale di deformazione sarà il seguente:

$$\tau_{0f} = \frac{1}{3} \sqrt{\sigma_f^2} \quad (10)$$

Utilizzando queste ultime due espressioni possiamo formulare la teoria d'energia di deformazione massima, che ci permette di individuare un criterio di rottura:

$$[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\sigma(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)] \geq \sigma_f^2 \quad (11)$$

Quindi il criterio della massima deformazione ottaedrale può essere specificato in queste due relazioni ponendo $\nu = 0.5$.

$$\sigma_R \geq \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)}; \quad \epsilon_R \geq \frac{2}{3} \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2 - (\epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_1\epsilon_3 + \epsilon_2\epsilon_3)} \quad (12)$$

Andando a sostituire i valori per ogni tempo ottenuti dall'analisi numerica nelle (12) si può verificare se il grano di propellente solido con la particolare geometria presa in esame, resiste a determinati valori della pressione interna; nelle figure 3 e 4 sono riportati gli andamenti degli sforzi e delle deformazioni per pressioni interne che variano da 1 a 10 MPa.

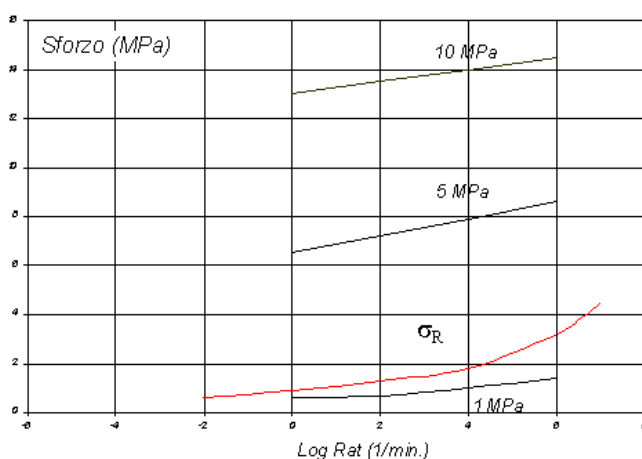


Figura 3
Criterio di rottura per gli sforzi.

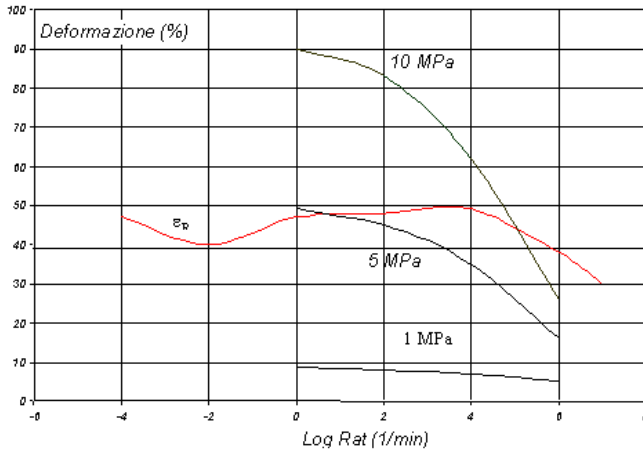


Figura 4

Criterio di rottura per la deformazione.

3. Analisi Numerico-Sperimentale della Tolleranza al Danno

3.1 Determinazione della Tenacità a Frattura del Propellente

Per la determinazione del K_{IC} è stata eseguita una campagna di prove su provini CT standard costituiti da un materiale meccanicamente equivalente al propellente e fornito dalla Fiat Avio di Colleferro.. La procedura di prova è stata ripresa dalla norma ASTM 399-90 tenendo conto del comportamento viscoelastico del materiale e della dipendenza del risultato dalla velocità di prova e dalla temperatura; tutte le prove sono state effettuate alla stessa temperatura ($T \cong 25 \text{ }^\circ\text{C}$) ed alla stessa velocità ($V_m = 50 \text{ mm/min}$). Per validare i risultati si è fatto ricorso alla seguente relazione:

$$2.5 \cdot (K_Q / \sigma_{ys})^2 \leq B. \quad (13)$$

dove B è lo spessore del provino e σ_{ys} è lo sforzo di snervamento del materiale, K_Q è il fattore di intensità degli sforzi legato al carico critico P_Q dalla seguente relazione:

$$K_Q = \frac{P_Q \cdot f\left(\frac{a}{W}\right)}{B \cdot \sqrt{W}}. \quad (14)$$

Dove W è l'ampiezza del provino ed $f(a/W)$ è la funzione di calibrazione data da:

$$f\left(\frac{a}{W}\right) = \frac{\left(2 + \frac{a}{W}\right) \cdot \left(0.886 + 4.64 \frac{a}{W} - 13.32 \frac{a^2}{W^2} + 14.72 \frac{a^3}{W^3} - 5.6 \frac{a^4}{W^4}\right)}{\left(1 - \frac{a}{W}\right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (15)$$

Per quanto riguarda la determinazione del carico critico P_Q si procede eseguendo una costruzione grafica sul diagramma P vs COD che consiste nel mandare una retta per l'origine avente una pendenza pari al 95% della pendenza della tangente nell'origine (Fig. 5).

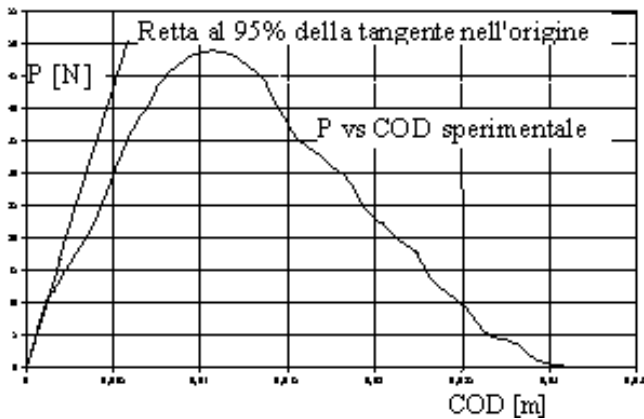


Figura 5

Andamento del P vs COD.

Per ogni provino si è ottenuto un diagramma P vs COD dal quale è stato ricavato un carico critico P_Q e di conseguenza un fattore di intensità degli sforzi K_{I_Q} . Il valore della tenacità a frattura è stato ottenuto come media dei risultati utili per cui:

$$K_{I_C} = 16 \text{ kPa}\sqrt{\text{m}}.$$

Nell'ambito della determinazione della tenacità a frattura è stato sviluppato un modello agli elementi finiti per simulare la prova sperimentale una volta nota la caratterizzazione viscoelastica del materiale.

Questa simulazione è stata su di un provino CT standard delle stesse dimensioni di quelli utilizzati nelle prove sperimentali imponendo lo stesso spostamento all'anello di carico; per quanto riguarda la caratterizzazione viscoelastica si è fatto ricorso ai coefficienti dello sviluppo in serie di Prony dei moduli ottenuti dalle prove di rilassamento del materiale precedentemente viste.

Dovendo eseguire un confronto con i risultati delle prove sperimentali è stato necessario tracciare il diagramma numerico del carico applicato P in funzione dell'apertura dell'intaglio del provino COD; per raggiungere questo scopo ad ogni passo temporale il codice di calcolo fornisce in uscita l'apertura dell'intaglio COD e la variazione di energia di deformazione ΔU , dal ΔU è possibile risalire al J-integral normalizzando la variazione di energia rispetto all'incremento della superficie di frattura come si vede dalla seguente relazione:

$$J = \frac{\Delta U}{B \cdot \Delta a} \quad (16)$$

Dove B è lo spessore del provino e Δa è l'avanzamento virtuale della cricca secondo il metodo di Parks; in questo caso il J-integral può essere interpretato come rilascio di energia dovuto all'avanzamento della cricca e quindi si può risalire al fattore di intensità degli sforzi K_I mediante la seguente relazione:

$$K_I = \sqrt{\frac{E \cdot J}{1 - \nu^2}} \quad (17)$$

dove E è il modulo di Young relativo al passo temporale preso in considerazione. In definitiva è possibile dal fattore di intensità degli sforzi K_I passare al carico applicato P utilizzando la relazione per i provini CT standard che abbiamo già visto in precedenza.

A questo punto siamo in grado di tracciare il diagramma numerico del carico in funzione dell'apertura dell'intaglio e fare il confronto con uno dei diagrammi sperimentali (Fig. 6), si vede subito che i due andamenti sono molto diversi ma questo è facilmente spiegabile poiché mentre nel comportamento reale la cricca si propaga fino alla rottura del provino nella simulazione numerica effettuata i vincoli impediscono la propagazione della cricca che al passare del tempo non varia di lunghezza.

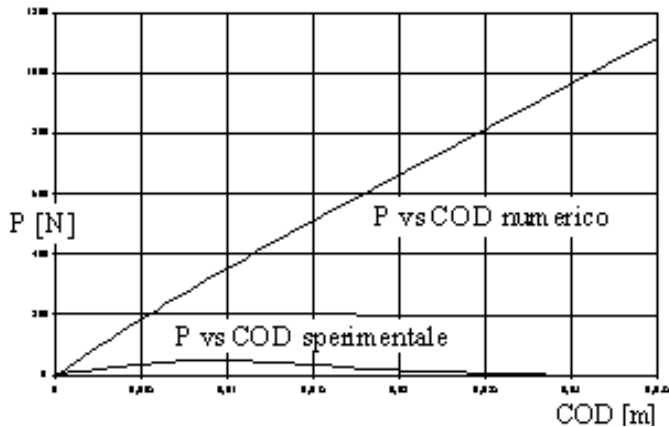


Figura 6

Confronto numerico-sperimentale.

3.2 Valutazione del Fattore di Intensità degli Sforzi per il Grano di Propellente

Lo scopo dello studio della tolleranza al danno del grano di propellente è stato quello di dare una stima della lunghezza massima di cricca ammissibile al momento dell'accensione del motore; per ottenere questo risultato è stato necessario determinare attraverso un'analisi numerica agli elementi finiti il diagramma del fattore di intensità degli sforzi K_I in funzione della lunghezza iniziale di cricca a .

La caratterizzazione del materiale fa riferimento al comportamento elastico equivalente che si ottiene dalle prove sperimentali di trazione precedentemente viste prendendo in considerazione il modulo di Young valutato nel caso di velocità di prova pari a 50 mm/min e di temperatura di prova pari a 25 °C; fare questa scelta non è un errore poiché si suppone che al momento dell'accensione venga imposta all'interno del grano una pressione a gradino dell'ordine dei 100 bar per cui l'analisi risulta essere di tipo istantaneo e non temporale.

Il primo problema incontrato è stato quello di dove inserire la cricca ma da un'analisi degli sforzi e delle deformazioni del grano privo del difetto si è subito visto che le zone di maggiore sollecitazione risultano essere le punte della stella; di conseguenza è stata inserita una cricca a partire da una delle punte della stella ed è stata eseguita una campagna di simulazioni numeriche parametrizzate rispetto alla lunghezza di cricca.

Le simulazioni numeriche sono state eseguite in condizioni di plane stress perché le reali condizioni di lavoro del grano possono essere riassunte ipotizzando uno stato di plane stress pressurizzato dove al semplice caso di plane stress dovuto alla pressione interna P si aggiunge una pressione di uguale entità che agisce in direzione normale rispetto alla superficie della sezione del grano; inoltre procedendo analiticamente mediante il principio di sovrapposizione degli effetti si vede che il caso semplice e quello pressurizzato sono tra loro legati attraverso un parametro D che dipenderà dalle caratteristiche meccaniche e geometriche del problema per cui una volta nota la soluzione nel caso semplice si può risalire a quella del caso pressurizzato:

$$D = \frac{(1 - \nu) + (E/E_c) \cdot (b/h)}{(1 - 2\nu) + (E/E_c) \cdot (b/h)} \quad (18)$$

dove b è il raggio esterno del grano, h lo spessore dell'involucro, E e ν il modulo di Young ed il coefficiente di Poisson del propellente, E_c il modulo di Young dell'involucro.

Questo legame valido per gli sforzi può essere esteso anche alla valutazione del fattore di intensità degli sforzi per cui il $K_I^{(2)}$ relativo al caso pressurizzato è dato da quello valutato per il caso semplice $K_I^{(1)}$ diviso il parametro D per cui si ha:

$$K_I^{(2)} = K_I^{(1)} / D. \quad (19)$$

dove il fattore di intensità degli sforzi $K_I^{(1)}$, nel caso di plane stress, viene valutato in modo analogo a quanto visto nella precedente simulazione numerica tenendo presente che il legame con il J-integral è diverso poiché non siamo più in plane strain:

$$K_I^{(1)} = \sqrt{E \cdot J}. \quad (20)$$

Altra cosa da mettere in evidenza è che l'analisi è di tipo istantaneo per cui E è costante e corrisponde al modulo di Young del materiale; procedendo così si è ottenuto il diagramma del fattore di intensità degli sforzi al variare della lunghezza iniziale di cricca (Fig. 7).

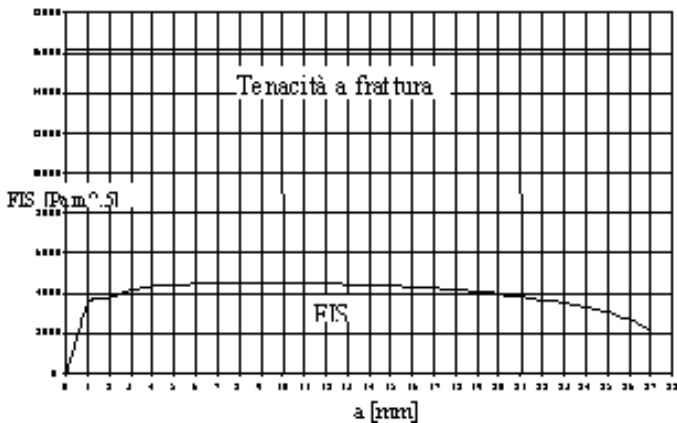


Figura 7

Confronto del fattore di intensità degli sforzi con la tenacità a frattura.

Da una prima analisi di questo diagramma si vede che il K_I subisce un brusco innalzamento per lunghezze di cricca comprese nei primi tre millimetri, dopodiché continua ad aumentare ma in modo più lento fino a raggiungere un massimo per i sette millimetri ed infine per lunghezze superiori diminuisce.

Si può subito affermare che la lunghezza di 7 mm è un primo valore critico del difetto; infatti la cricca ha raggiunto una dimensione pari al 25% della dimensione caratteristica della struttura (data dalla lunghezza della linea di continuità del materiale) per cui il successivo diminuire del fattore di intensità degli sforzi non sta ad indicare un effettivo miglioramento della resistenza della struttura, bensì dimostra che il grano ha ormai ceduto.

Per valutare un eventuale limite inferiore si è pensato di introdurre il valore della tenacità a frattura, ricavato precedentemente per via sperimentale, ma si vede che in questo caso il valore massimo del fattore di intensità degli sforzi è circa tre volte inferiore rispetto alla tenacità a frattura per cui non si avrà mai propagazione instabile della cricca.

4. Discussione dei Risultati e Conclusioni

I risultati ottenuti, applicando il criterio della massima deformazione con l'ausilio del codice di calcolo agli elementi finiti, sono serviti a formulare un criterio di rottura idoneo sia per il tipo di materiale, nel caso specifico viscoelastico, sia per la geometria presa in esame. Facendo riferimento al criterio di rottura ed andando ad osservare le deformazioni si nota che per tempi molto bassi ci troviamo sotto il valore della deformazione di rottura, mentre per quanto riguarda gli sforzi ci troviamo sotto a quello di rottura soltanto per pressioni interne prossime ad 1 MPa.

In conclusione le proprietà meccaniche del materiale viscoelastico si deteriorano con il tempo e quindi se

ne consiglia l'applicazione per intervalli di tempi molto piccoli.

Altro aspetto fondamentale, è che le proprietà meccaniche sono legate anche alla geometria presa in esame, in particolare alle dimensioni del grano di propellente, che, variando, permettono al grano di resistere più o meno anche a pressioni interne molto elevate.

Per quanto riguarda la valutazione numerico-sperimentale della tolleranza al danno si è per prima cosa ricavato per via sperimentale il valore della tenacità a frattura del propellente dopodiché sono state eseguite due analisi numeriche con il compito rispettivamente di stabilire la possibilità di simulare numericamente la prova sperimentale e di tracciare l'andamento del fattore di intensità degli sforzi relativo ad un grano di propellente al momento dell'accensione del motore.

Da quanto visto sono sorte tre problematiche diverse. Per quanto riguarda la parte sperimentale si è riscontrata la necessità di ottenere una caratterizzazione del materiale più coerente eseguendo nuove prove al variare della temperatura, della velocità e della pressione di prova. Per quanto riguarda la prima simulazione si vede che nasce l'esigenza di sviluppare un modello analitico di propagazione della cricca in campo viscoelastico al fine di aggiornare la dimensione della cricca ad ogni passo temporale. Infine per quanto riguarda la seconda analisi numerica si ripresenta la stessa necessità della prima ed inoltre si rende necessario introdurre un modello di propagazione del fronte di fiamma in modo da poter aggiornare la geometria del problema ad ogni passo temporale ottenendo così una serie di curve del FIS al variare del tempo parametrizzate rispetto alla lunghezza iniziale di cricca al fine di stabilire in modo più esatto una stima della lunghezza massima ammissibile.

Ringraziamenti: si ringrazia la Soc. Fiat Avio di Colleferro per il supporto dato.

Bibliografia

1. E.M.Arruda, M.C.Boyce - *"A Three Dimensional Constitutive Model for the Large Stretch Behavior of Rubber Elastic Materials"*; *J. Mech. Phys. Solids* 41, 1993, p. 389-412.
1. A.M.Messner, R.N.Shearly - *"Stress Analysis of Axisymmetric Propellant Grains with Arbitrary End Geometries"*; *Transactions seventh symposium of ballistic missiles and space technology, August 1962.*
1. J.C.Simo - *"On a Fully Three-Dimensional Finite Strain Viscoelastic Damage Model: Formulation and Computational Aspects"*; *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.60, 1987, p. 153-173.*
1. E.C.Francis, C.H.Carlton - *"Viscoelastic Fracture of Solid Propellants in Pressurization Loading Conditions"*; *JSR, vol. 11, No. 10, 1974, p. 691-696.*
1. D.M.Parks - *"A Stiffness Derivative Finite Element Technique for Determination of Crack Tip Stress Intensity Factors"*; *Journal of Fracture, vol. 10, No. 4, Dec. 1974, p. 487-501.*
1. A.J.Kinloch, R.A.Gledhill - *"Propellant Failure: A Fracture-Mechanics Approach"*; *JSR vol. 18, No. 4, Jul.-Aug. 1981, p. 333-337.*

Atti del convegno

[[Precedente](#)] [[Successiva](#)]

Versione HTML realizzata da

