

METODO DI IDENTIFICAZIONE BASATO SUGLI STRUMENTI DELL'ANALISI MODALE E DELLA MECCANICA DELLA FRATTURA

E. Viola, L. Federici

*D.I.S.T.A.R.T. Istituto di Scienza delle Costruzioni - Università di Bologna
Viale Risorgimento 2 - 40136 Bologna (BO)*

SOMMARIO: In questa nota viene presentato un metodo per l'identificazione della posizione e profondità di un crack, presente in una struttura danneggiata. Il procedimento è basato sulla teoria dell'analisi modale e della Meccanica della Frattura. Le misure delle frequenze naturali e dei modi di vibrare della struttura sono impiegate per valutare l'energia elastica di deformazione associata alle oscillazioni libere, della trave integra e fessurata, attraverso un procedimento quasi-statico. Dette energie di deformazione sono combinate con il lavoro necessario per la formazione di un crack, per definire l'equazione di bilancio energetico da cui, tramite un procedimento iterativo, si stima la profondità del difetto. L'identificazione della posizione del crack viene effettuata attraverso la ricerca del minimo di una funzione obiettivo.

PAROLE CHIAVE: Frattura - Identificazione - Vibrazioni - Struttura - Crack

INTRODUZIONE

Nell'ambito dell'identificazione di un difetto presente in un solido strutturale fessurato, in questo lavoro viene illustrato un metodo modale combinato con le equazioni della Meccanica della Frattura. Per l'applicazione del metodo, le grandezze da misurare sono le frequenze e i modi di vibrare della struttura integra e della struttura contenente il crack, nonché le caratteristiche fisiche e geometriche della struttura stessa. L'energia di deformazione della struttura in vibrazione libera viene stimata attraverso le misure delle pulsazioni e dei corrispondenti modi naturali. Le espressioni delle energie di deformazione $\Phi(0)$ e $\Phi(a)$, associate alle strutture integra e fessurata, rispettivamente, sono impiegate per la formulazione dell'equazione di bilancio energetico, unitamente al lavoro richiesto per la formazione di un crack. La profondità della cricca può essere ricavata successivamente, proprio a partire dall'equazione di bilancio energetico. Il metodo viene applicato ad una serie di mensole in acciaio, ciascuna contenente un singolo crack di assegnata profondità, posto in differenti punti dell'asse delle trave. Viene illustrato l'andamento, al variare della posizione e della profondità del difetto, del lavoro necessario per la formazione di nuove superfici di frattura. Introducendo, senza ulteriori ipotesi, una funzione obiettivo "e" risulta possibile identificare posizione e profondità di un crack, mediante la conoscenza delle autosoluzioni delle strutture integra e danneggiata. I risultati dell'identificazione, per diversi autovettori della struttura, sono riportati in forma grafica e tabellare.

EQUAZIONE DI BILANCIO ENERGETICO

Secondo la teoria di Griffith, condizione necessaria per la formazione di un crack in una struttura è che l'energia potenziale totale Π del solido elastico fessurato:

$$\Pi = \Phi - L \quad (1)$$

subisca un decremento. Il punto di maggior interesse della Meccanica della Frattura riguarda la determinazione delle condizioni in cui il decremento di Π risulta pari al lavoro necessario per la creazione della superficie del crack stesso.

Per una struttura, soggetta ad un carico costante P , contenente un crack la cui profondità parte dal valore nullo fino ad un valore "a", l'equazione di bilancio energetico prende la forma:

$$W_F(a) - \Phi(a) + \Phi(0) = 0 \quad (2)$$

E' da notare come l'energia di deformazione elastica $\Phi(a)$ della struttura con crack sia esattamente la somma di quella della struttura senza crack, $\Phi(0)$, e del lavoro necessario per la formazione della nuova superficie, $W_F(a)$. Il lavoro richiesto per la formazione di un crack di ampiezza nulla, $W_F(0)$, è uguale a zero.

METODO MODALE ESPANSO

Il metodo modale espanso consente di ricavare una stima delle due energie di deformazione elastica dell'equazione (2), anche quando non siano direttamente disponibili le matrici di rigidezza corrispondenti della struttura.

Siano ψ_i e λ_i , ($i = 1, 2, 3, \dots, n$), gli autovettori e i corrispondenti autovalori della struttura con crack. Per qualunque struttura si può scrivere:

$$\mathbf{u} = \mathbf{\Psi} \boldsymbol{\eta} \quad (3)$$

dove $\mathbf{u}[n \times 1]$ è il vettore degli spostamenti, $\mathbf{\Psi}[n \times n]$ è la matrice modale del sistema e $\boldsymbol{\eta}[n \times 1]$ è il vettore delle coordinate principali o modali.

Indicando con $\mathbf{K}[n \times n]$ e $\mathbf{M}[n \times n]$, rispettivamente, le matrici di rigidezza e di massa del sistema, l'energia di deformazione immagazzinata dalla struttura con crack risulta essere:

$$\Phi(a) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (4)$$

Sostituendo la (3) in (4) si ottiene:

$$\Phi(a) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\eta} = \frac{1}{2} (\lambda_1 \eta_1^2 + \dots + \lambda_n \eta_n^2) \quad (5)$$

dove $\boldsymbol{\Lambda}$ è la matrice diagonale dei quadrati delle pulsazioni proprie $\omega_i^2 = \lambda_i$ della struttura. Si supponga che la struttura oscilli secondo l'i-esimo modo; la risposta corrispondente al vettore delle velocità iniziali avente solo l'i-esima componente diversa da zero risulta essere:

$$\eta_i = \frac{\dot{\eta}_{i0}}{\omega_i} \sin \omega_i t \quad (6)$$

Poiché il vettore delle coordinate modali ha una sola componente diversa da zero, il valore massimo dell'energia di deformazione modale associata all'i-esimo modo di vibrare della trave fessurata è pari a:

$$\hat{\Phi}_i(a) = \max\{\Phi_i(a)\} = \frac{1}{2} \dot{\eta}_{i0}^2 \quad (7)$$

Quando la struttura vibra secondo il modo i-esimo, il vettore delle forza d'inerzia \mathbf{f}_i ammette la rappresentazione:

$$\mathbf{f}_i = -\mathbf{M} \boldsymbol{\psi}_i \ddot{\eta}_i \quad (8)$$

essendo ψ_i l'autovettore i-esimo, ossia la i-esima colonna della matrice modale.

Il valore massimo della forza d'inerzia modale associato al modo i-esimo si ottiene calcolando \hat{f}_i dalla (6):

$$\hat{f}_i = \max \{ \mathbf{f}_i \} = \mathbf{M} \psi_i \hat{\eta}_i = \omega_i \dot{\eta}_{i0} \mathbf{M} \psi_i \quad (9)$$

Si vuol far rilevare che la massima energia di deformazione modale (7), è pari al massimo dell'energia di deformazione della struttura soggetta alla forzante (9) pensata agente staticamente.

Si ipotizzi un istante t_0 , in cui l'energia di deformazione della struttura integra sia circa uguale alla massima energia di deformazione corrispondente al modo i-esimo della struttura con crack. Indicando con il simbolo “ \sim ” le grandezze relative alla struttura integra, si ha:

$$\tilde{\mathbf{f}}_i(t_0) \cong \hat{f}_i = \mathbf{M} \tilde{\Psi} \tilde{\Lambda} \tilde{\eta}(t_0) \quad (10)$$

L'approssimazione (10) avverte che la massima forza d'inerzia modale della struttura con crack associata all'i-esimo modo di vibrare, risulta equivalente alla combinazione delle forze d'inerzia della struttura integra associate ai primi “i” modi di vibrare della struttura integra stessa.

Dalla (10) si ha:

$$\tilde{\eta}(t_0) = \tilde{\Lambda}^{-1} \tilde{\Psi}^T \hat{f}_i \quad (11)$$

In base alla (5), l'energia di deformazione della struttura integra prende la forma

$$\Phi(0) = \frac{1}{2} \tilde{\eta}^T \tilde{\Lambda} \tilde{\eta} \quad (12)$$

Per le (2), (7) e (12) si è in grado di valutare il lavoro speso per la formazione di un crack di dimensione “a”.

$$W_F(a) = \Phi(a) - \Phi(0) \quad (13)$$

Noto il valore numerico del lavoro necessario per la formazione di un crack di dimensione “a”, si può risalire alla dimensione del crack tramite le equazioni della Meccanica della Frattura.

EQUAZIONI DELLA MECCANICA DELLA FRATTURA

Attraverso l'equazione (13) si è in grado di valutare il lavoro necessario per la creazione di un crack di estensione “a”.

Il lavoro necessario per la formazione di un crack in un solido cilindrico di sezione rettangolare può essere espresso come [Tada, Paris e Irwin (1973)]:

$$W_F = b \int_0^a \left[(K_I^2 + K_{II}^2) / E' + (1 + \nu) K_{III}^2 / E \right] da \quad (14)$$

dove “b” è la larghezza della sezione trasversale della trave e K_I , K_{II} , K_{III} sono i fattori di intensificazione degli sforzi.

Nel caso di trave sezione rettangolare sollecitata dalle due caratteristiche di sollecitazione momento M e taglio P, dovuti all'azione della porzione di trave a sinistra del crack si ottiene

$$W_F = b \int_0^a \left[(K_{IM} + K_{IP})^2 + K_{IIP}^2 \right] / E' da \quad (15)$$

Indicando con $s = a/h$ ove h denota l'altezza della trave, si ha:

$$K_{IM} = \left(\frac{6M}{bh^2} \right) \sqrt{\pi a} F_I(s) ; K_{IP} = \left(\frac{3Pl}{bh^2} \right) \sqrt{\pi a} F_I(s) ; K_{IIP} = \left(\frac{P}{bh} \right) \sqrt{\pi a} F_{II}(s)$$

$$F_I(s) = \sqrt{\left(\frac{2}{\pi s}\right) \tan\left(\frac{\pi s}{2}\right)} \frac{0.923 + 0.199 \left[1 - \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\right]^4}{\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)} ; F_{II}(s) = (3s - 2s^2) \frac{1122 - 0.561s + 0.085s^2 + 0.18s^3}{\sqrt{1-s}} \quad (16)$$

Nota l'espressione di W_F dalla (15), dalla (2) si ottiene un'equazione in cui l'unica incognita è rappresentata dalla dimensione "a" del crack:

$$\left\{ b \int_0^a \left[(K_{IM} + K_{IP})^2 + K_{IIP}^2 \right] / E' da \right\} - (\Phi(a) - \Phi(0)) = 0 \quad (17)$$

Si può quindi risalire alla profondità "a" del crack ricorrendo all'uso di semplici algoritmi iterativi quali, ad esempio, quello di Newton-Raphson.

IDENTIFICAZIONE DELLA PROFONDITA' DEL CRACK

Il procedimento di identificazione della profondità di un crack precedentemente illustrato, viene ora applicato ad una mensola fessurata in acciaio, le cui caratteristiche geometriche e meccaniche sono illustrate in Fig.1. In questa prima fase si considera nota la posizione del danno nella struttura.

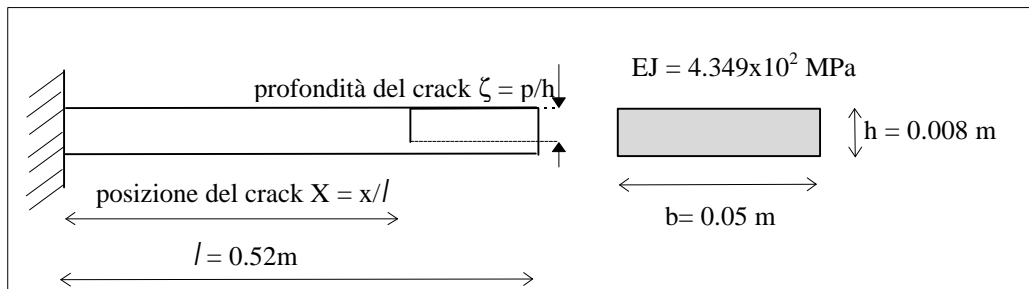


Figura 1 - Caratteristiche geometriche e meccaniche della mensola

Misure sperimentali degli autovalori sono state effettuate sia sulla trave integra, sia su quelle contenenti singoli crack di varie dimensioni [Bentini *et al*, 1993]. E' stato anche sviluppato un modello ad elementi finiti, dal quale sono state successivamente ricavate le frequenze proprie ed i modi di vibrare della travi, contenenti singoli crack di differenti profondità, posti in varie posizioni. Note le caratteristiche di oscillazione delle travi, integra e danneggiata, in termini di pulsazioni naturali e modi propri, la dimensione del crack può essere determinata attraverso la (17), utilizzando le autosoluzioni dei primi tre modi di vibrare della struttura fessurata.

Per dimostrare l'accuratezza del cosiddetto metodo modale espanso, nell'eq. (10) vengono adottati differenti troncamenti modali. Nel procedimento di identificazione, viene impiegata solo l'autosoluzione del primo modo di vibrare della trave integra, quando si sceglie la prima coppia autovettore-pulsazione della trave con crack. Se, invece, viene scelto il secondo modo della trave danneggiata, allora si utilizzeranno i primi due modi della trave integra; infine, vengono impiegati i primi tre modi della trave integra se per il procedimento di identificazione viene scelto il terzo modo della trave con crack. I valori stimati di $\Phi(0)$ per varie travi danneggiate e per i tre diversi gradi di approssimazione in parola sono riportati in Tab. 1. Il lavoro di deformazione W_F risulta

calcolato per ogni posizione e profondità del danno e per i tre diversi troncamenti modali impiegati nell'identificazione, mediante l'equazione di bilancio energetico (17). I dati ricavati sono illustrati nelle figure 2,3,4. Determinati i valori dell'energia di deformazione elastica $\Phi(0)$ e $\Phi(a)$, per i diversi casi esposti, sfruttando l'equazione (13), sono state ricavate le profondità dei singoli crack dislocati nelle diverse posizioni lungo l'asse della trave. I risultati sono riportati numericamente nella Tab. 2

Tabella 1: Valori dell'energia di deformazione per la trave integra, stimata con differenti troncamenti modali associati alla trave con crack.

$\Phi(0)$ - I MODO della trave fessurata ($\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2$)										
$\zeta \backslash X$	1/20	3/20	1/4	7/20	9/20	11/20	13/20	3/4	17/20	19/20
0.25	2464.81	2476.28	2485.33	2490.09	2495.17	2497.40	2499.15	2499.34	2499.72	2500.00
0.50	2127.49	2238.17	2332.52	2383.97	2442.34	2468.20	2490.33	2494.21	2499.37	2500.00
0.75	1071.95	1327.57	1616.13	1869.12	2110.67	2271.46	2428.49	2457.30	2495.89	2499.69

$\Phi(0)$ - II MODO della trave fessurata ($\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2$)										
$\zeta \backslash X$	1/20	3/20	1/4	7/20	9/20	11/20	13/20	3/4	17/20	19/20
0.25	745.96	749.97	750.00	745.05	741.56	743.84	746.42	747.53	749.66	749.99
0.50	714.75	749.56	725.64	697.28	672.74	685.25	706.82	719.34	749.59	749.74
0.75	594.64	747.04	665.47	563.09	471.60	443.95	493.44	541.34	711.94	747.93

$\Phi(0)$ - III MODO della trave fessurata ($\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2$)										
$\zeta \backslash X$	1/20	3/20	1/4	7/20	9/20	11/20	13/20	3/4	17/20	19/20
0.25	363.59	362.74	361.28	362.66	363.96	362.37	360.24	360.52	363.12	364.00
0.50	359.98	350.09	337.29	350.09	362.77	347.60	325.25	325.35	351.56	363.17
0.75	356.00	322.64	306.71	334.56	358.93	328.16	270.66	218.40	260.12	356.13

E' da notare che le due grandezze M e P, che compaiono all'interno delle espressioni dei fattori di intensificazione degli sforzi, rappresentano le caratteristiche di sollecitazione che la parte della trave a sinistra del crack esercita sulla sezione danneggiata quando soggetta al massimo dell'i-esima forza modale di inerzia. Tale forzante, agente nei vari nodi in cui è stata schematizzata la struttura, è direttamente proporzionale al valore della velocità iniziale $\dot{\eta}_{i0}$. I risultati mostrano una buona convergenza del valore del crack, identificato tramite il procedimento di identificazione in narrativa, a quello attuale.

Gli errori riscontrati sono dell'ordine del 1%÷2%, ad eccezione dei punti in corrispondenza dei nodi del modo di vibrare scelto per l'identificazione.

Se si osserva che il primo modo della mensola non presenta alcun nodo, risulta possibile identificare con ottima precisione un crack di qualsiasi dimensione, dislocato nella trave fino ad una distanza massima di circa 6/7 della lunghezza.

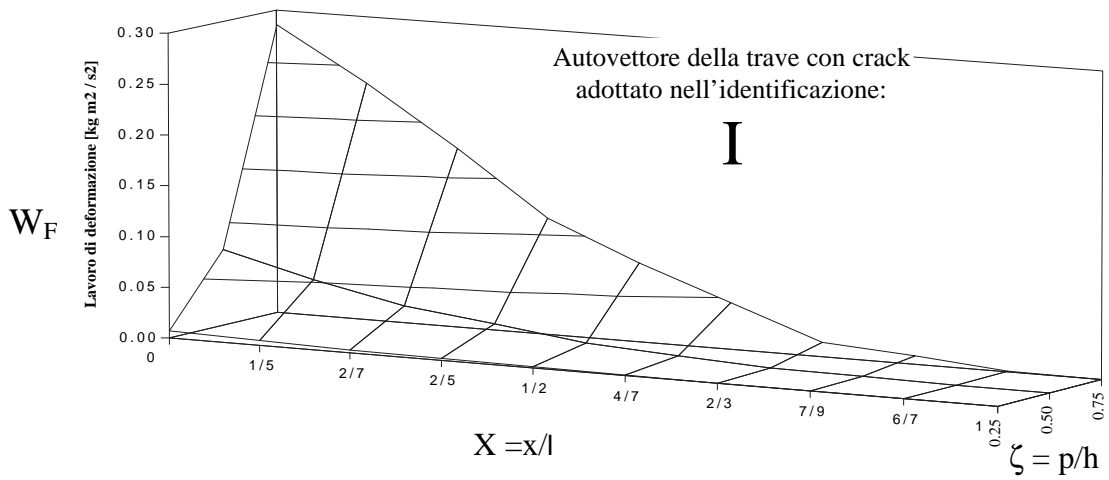


Figura. 2: Andamento di W_F al variare della posizione e profondità del crack

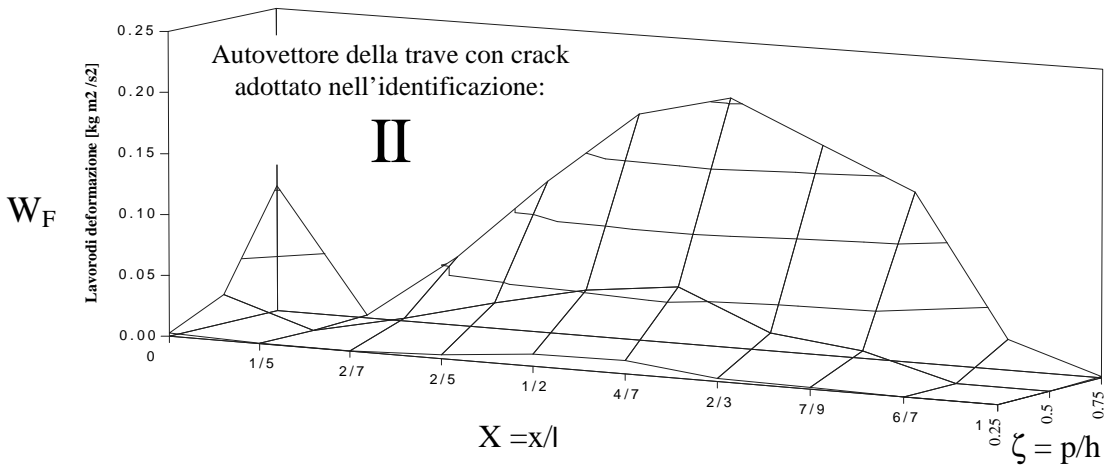


Figura. 3: Andamento di W_F al variare della posizione e profondità del crack.

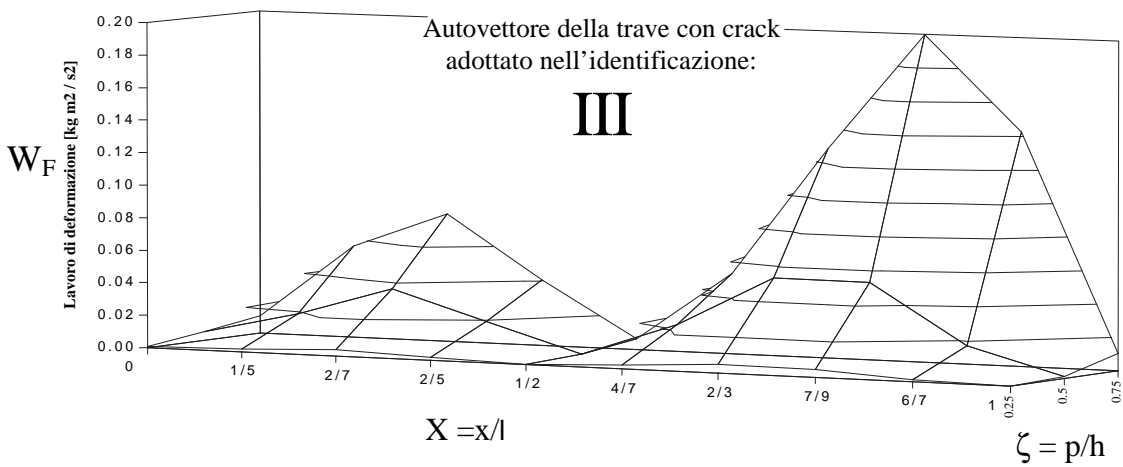


Figura. 4: Andamento di W_F al variare della posizione e profondità del crack

Inoltre, l'errore è sensibilmente dipendente anche dalla profondità del crack, essendo solitamente minore per difetti di dimensioni dell'ordine del 60÷75% dell'altezza della trave. La discretizzazione adottata nel modello ad elementi finiti risulta essere poco influente. I risultati ottenuti dall'applicazione del metodo modale espanso, ed in particolare la Fig. 5, mostrano come non sia garantita l'unicità della soluzione del problema di identificazione; infatti, sezionando a varie quote la superficie di Fig. 4 con un piano orizzontale, si ottengono delle curve ad uguale lavoro di deformazione. Dette curve indicano il luogo dei punti, le cui coordinate rappresentano le coppie posizione-profondità dei crack equivalenti dal punto di vista dell'energia di frattura. Pertanto, dalla sola conoscenza del valore del lavoro di frattura, non deriva un'unica combinazione possibile di posizione e profondità della fessura. Ad esempio in Fig. 5, i punti A e B individuano due delle possibili combinazioni di un medesimo livello energetico.

IDENTIFICAZIONE DELLA POSIZIONE DEL CRACK

Nelle applicazioni interessa rilevare non solo la presenza di un'eventuale cricca all'interno della struttura, ma anche determinarne profondità e dislocazione. I dati che si hanno a disposizione sono delle misure sperimentali di alcuni parametri (autovalori, autovettori, spostamenti, ...). Se nella struttura è presente una cricca, la differenza $\Phi(a) - \Phi(0)$ risulterà diversa da zero, ma nulla si può dire circa la posizione e profondità del difetto. Per effettuare l'identificazione, senza ricorrere ad ipotesi aggiuntive, è necessario valutare l'equazione di bilancio energetico supponendo il crack dislocato in diverse posizioni all'interno della struttura. Per ogni posizione si potrà determinare la corrispondente profondità "a". Si otterranno una serie di coppie $(X_i ; \zeta_i)$ $i=\{1, 2, \dots, n\}$ equivalenti dal punto di vista energetico, caratterizzanti n strutture. Per ciascuna delle n strutture in discorso si possono ottenere, mediante una modellazione ad elementi finiti, le corrispondenti matrici modali e spettrali Ψ_i e Λ_i . La coppia $(X_i ; \zeta_i)$ corrispondente alla struttura da identificare viene scelta confrontando le grandezze modali sperimentali con quelle associate alle n strutture considerate. Si può introdurre una funzione obiettivo "e" che descriva lo scarto che si ha tra le grandezze misurate e quelle analitiche di ciascuna delle n strutture in considerazione. La funzione obiettivo ammette minimo in corrispondenza della coppia posizione-profondità corrispondente alla struttura esaminata sperimentalmente. Indicando con l'apice "s" le grandezze sperimentalmente ottenute, con l'apice "X_i" quelle relative alle travi contenenti un crack in posizione X_i e di profondità ζ_i , con il pedice j l'autovettore che si sta considerando, si ha che una possibile espressione per la componente $e_j^{X_i}$ del vettore \mathbf{e}_j risulta essere:

$$e_j^{X_i} = \sqrt{\sum_{h=1}^H (\psi_{jh}^{(s)} - \psi_{jh}^{(X_i)})^2} \quad (18)$$

in cui H è il numero delle componenti del singolo autovettore.

Il vettore "e_j" è costituito da tante componenti quante sono le coppie posizione-profondità scelte per l'identificazione. La componente $e_j^{X_i}$ minima di \mathbf{e}_j individua la coppia $(X_i ; \zeta_i)$ che identifica l'effettiva posizione e profondità del crack nella struttura esaminata

$$\min_{i=\{1, \dots, n\}} \{e_j^{X_1}, e_j^{X_2}, \dots, e_j^{X_n}\} \Rightarrow (X_i ; \zeta_i) \quad (19)$$

I risultati ottenuti considerando la trave di fig.1 sono riportati in forma grafica nelle figg. 6,7 e 8. Come emerge dall'analisi dei risultati, la posizione del crack, in cui si ha il minimo scarto tra grandezza sperimentale e numerica, risulta essere sempre $X= 7/20$, indipendentemente dall'autovettore che si esamina.

Tabella 2: Profondità del crack identificate tramite il metodo modale espanso

	I MODO		II MODO		III MODO	
	Profondità	Errore	Profondità	Errore	Profondità	Errore
<i>Posizione X = 1/20</i>						
p = 2mm (z = 0.25)	2.00569	0.2845%	2.00602	0.3008%	2.00660	0.3299%
p = 4mm (z = 0.50)	4.00693	0.1732%	4.00699	0.1747%	4.00752	0.1880%
p = 6mm (z = 0.75)	6.00892	0.1487%	6.00999	0.1664%	6.01211	0.2019%
<i>Posizione X = 3/20</i>						
p = 2mm (z = 0.25)	2.00896	0.4480%	2.00966	0.4829%	2.04699	2.3494%
p = 4mm (z = 0.50)	4.00975	0.2438%	4.00998	0.2495%	4.08745	2.1862%
p = 6mm (z = 0.75)	6.00986	0.1643%	6.00998	0.1663%	6.15698	2.6163%
<i>Posizione X = 1/4</i>						
p = 2mm (z = 0.25)	2.01126	0.5629%	2.01260	0.6299%	2.02569	1.2845%
p = 4mm (z = 0.50)	4.00999	0.2497%	4.01568	0.3920%	4.05690	1.4225%
p = 6mm (z = 0.75)	6.01020	0.1700%	6.01236	0.2060%	6.08954	1.4923%
<i>Posizione X = 7/20</i>						
p = 2mm (z = 0.25)	2.00239	0.1195%	2.00598	0.2990%	2.01025	0.5125%
p = 4mm (z = 0.50)	4.01489	0.3723%	4.01587	0.3967%	4.02567	0.6417%
p = 6mm (z = 0.75)	6.02589	0.4315%	6.02456	0.4093%	6.02569	0.4282%
<i>Posizione X = 9/20</i>						
p = 2mm (z = 0.25)	2.02698	1.3490%	2.02999	1.4993%	2.02896	1.4478%
p = 4mm (z = 0.50)	4.03569	0.8922%	4.03569	0.8922%	4.06015	1.5038%
p = 6mm (z = 0.75)	6.03144	0.5241%	6.03144	0.5241%	6.09013	1.5021%
<i>Posizione X = 11/20</i>						
p = 2mm (z = 0.25)	2.05697	2.8485%	2.05697	2.8485%	2.04013	2.0063%
p = 4mm (z = 0.50)	4.03598	0.8995%	4.03570	0.8925%	4.07113	1.7781%
p = 6mm (z = 0.75)	6.03187	0.5312%	6.03195	0.5325%	6.10225	1.7041%
<i>Posizione X = 13/20</i>						
p = 2mm (z = 0.25)	2.08754	4.3770%	2.08884	4.4420%	2.04975	2.4876%
p = 4mm (z = 0.50)	4.09856	2.4640%	4.13299	3.3247%	4.07985	1.9963%
p = 6mm (z = 0.75)	6.09853	1.6422%	6.15370	2.5616%	6.11153	1.8589%
<i>Posizione X = 3/4</i>						
p = 2mm (z = 0.25)	2.08423	4.2113%	2.07895	3.9475%	2.05020	2.5099%
p = 4mm (z = 0.50)	4.07460	1.8650%	4.06895	1.7238%	4.08019	2.0047%
p = 6mm (z = 0.75)	6.09568	1.5947%	6.07485	1.2475%	6.11255	1.8758%
<i>Posizione X = 17/20</i>						
p = 2mm (z = 0.25)	2.09658	4.8292%	2.02695	1.3475%	2.06497	3.2485%
p = 4mm (z = 0.50)	4.15634	3.9085%	4.05689	1.4223%	4.08954	2.2385%
p = 6mm (z = 0.75)	6.15896	2.6493%	6.09115	1.5192%	6.12459	2.0765%
<i>Posizione X = 19/20</i>						
p = 2mm (z = 0.25)	2.15650	7.8250%	2.09584	4.7920%	2.11255	5.6273%
p = 4mm (z = 0.50)	4.16489	4.1222%	4.07485	1.8712%	4.13036	3.2590%
p = 6mm (z = 0.75)	6.16059	2.6765%	6.12591	2.0985%	6.20154	3.3590%

CONCLUSIONI

In questo lavoro è stato presentato un metodo per l'identificazione della profondità e posizione di un crack all'interno di una struttura. Per determinare l'equazione di bilancio energetico sono stati usati i concetti dell'analisi modale e della meccanica della frattura. Dall'equazione in parola si può ricavare la profondità del crack tramite uno schema iterativo.

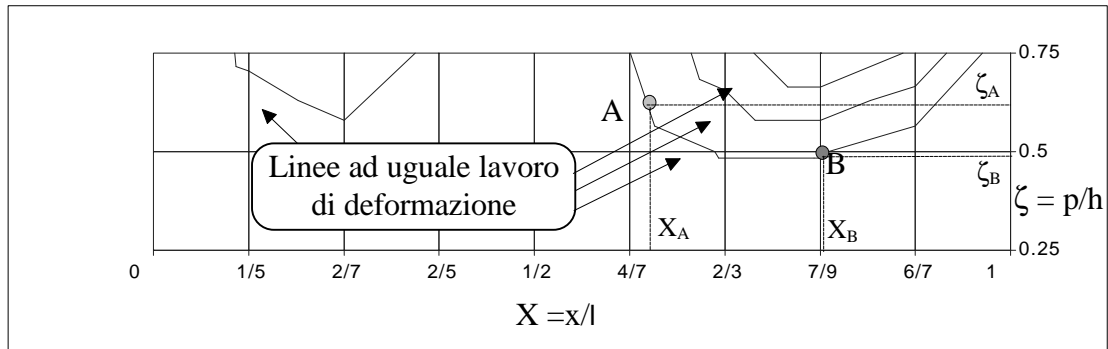


Figura. 5: Curve luogo dei punti posizione - profondità del crack ad uguale valore del lavoro di deformazione W_F

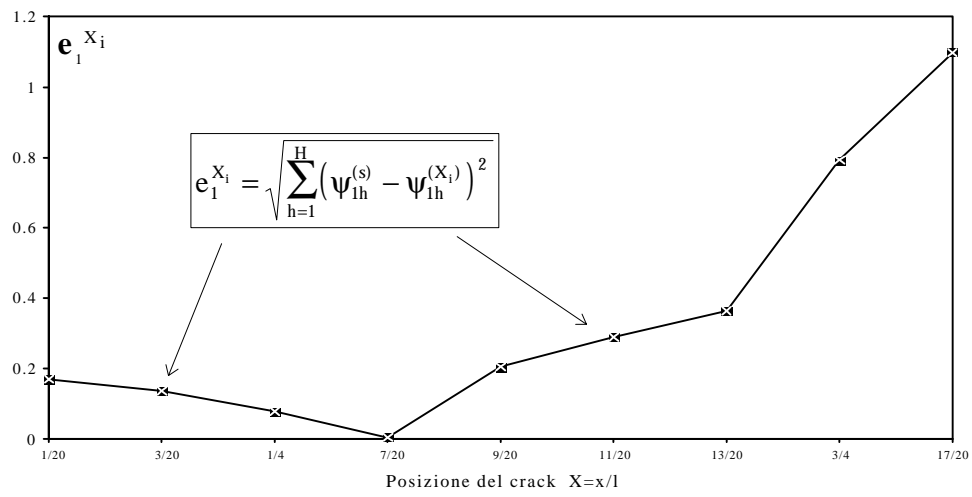


Figura 6: Andamento dell'errore in funzione del primo autovettore

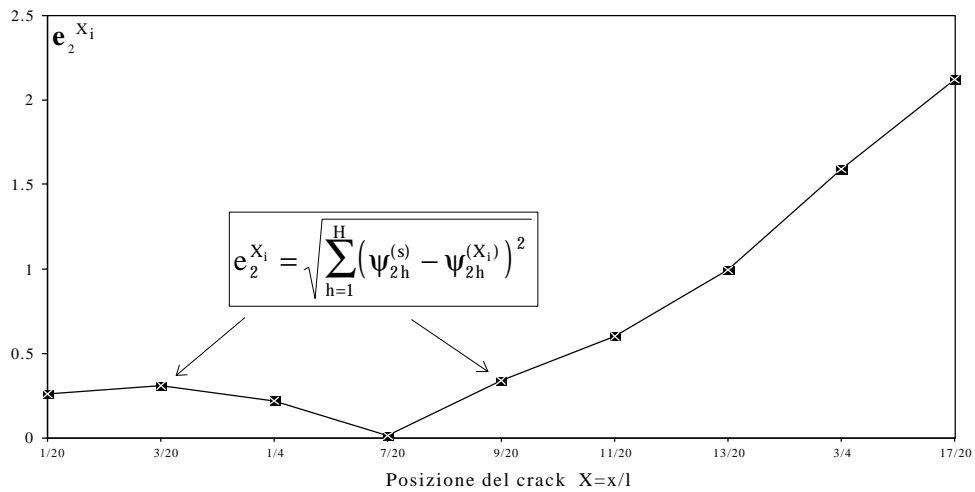


Figura 7: Andamento dell'errore in funzione del secondo autovettore

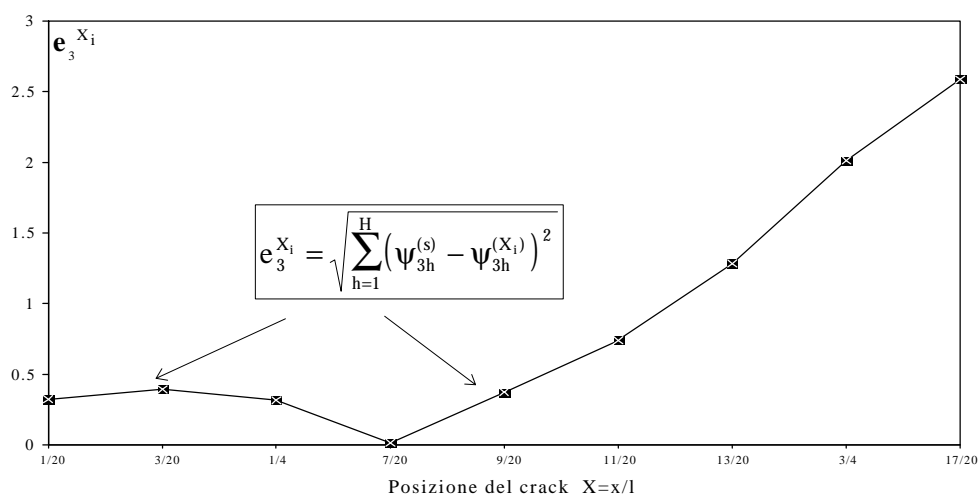


Figura 8: Andamento dell'errore in funzione del terzo autovettore

Le misurazioni delle prime (due o tre) autosoluzioni della struttura, con e senza la presenza del crack, sono necessarie per valutare l'energia di deformazione elastica. Note $\Phi(a)$ e $\Phi(0)$ si può costruire l'equazione di bilancio energetico in narrativa. Per illustrare l'accuratezza del metodo sono state condotte applicazioni su mensole in acciaio, aventi crack di dimensioni diverse e dislocati lungo l'asse delle travi stesse. Sono stati esaminati i fattori che influenzano la precisione del procedimento e si è messo in evidenza come quest'ultima sia totalmente indipendente dalle condizioni scelte. L'unicità della soluzione viene ottenuta introducendo una funzione obiettivo in cui si confrontano le autosoluzioni registrate sperimentalmente con quelle analitiche, relative a strutture contenenti crack in diverse posizioni. I risultati ottenuti non risultano sensibilmente influenzati dalle forme modali prese in esame per l'identificazione.

Ringraziamenti: Questo lavoro è stato svolto con il contributo finanziario del Ministero dell'Università e della Ricerca Scientifica e Tecnologica M.U.R.S.T (40%).

BIBLIOGRAFIA

- Bentini, C., Di Leo, A., Viola, E., 1993, "Sull'identificazione del danno mediante prove dinamiche", Proc. of XXII Nation.Cong. AIAS, pp.398-406.
- Kam, T.Y., Lee, T.Y., 1992, "Detection of cracks in structures using modal test data", Eng. Fract. Mech., Vol 42, No. 2, pp. 381-387
- Kam, T.Y., Lee, T.Y., 1993, "Detection of crack location via a global minimization approach", Eng. Opt., Vol. 21, pp. 147-159.
- Kam, T.Y., Lee, T.Y., 1994, "Crack size identification using an expanded mode method", Int. J. Solids Structure, Vol. 31, No. 7, pp. 925-940
- Qian, G.L., Gu, S.N., Jiang, J.S., 1990, "The dynamic behaviour and crack detection of beam with a crack", J. of Sound and Vibration, Vol 138, No. 2, pp. 233-243
- Tada, H., Paris, P., Irwin, G., 1973, "The stress analysis of cracks handbook", Del Research Corporation, Hellertown, P.A.